3 Gruppenübungen

A. 1: Anwendungen von Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Wir werden im laufenden Semester häufig mit Funktionen (= Abbildungen) vom Typ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu tun haben. Es ist wichtig, dass Sie für verschiedene Werte von n und m die richtigen „Bilder“ und repräsentative Beispiele im Kopf haben. Dazu eine Übung:

Geben Sie je ein konkretes (möglichst kreatives) Anwendungsbeispiel für folgende Funktionstypen an! Fertigen Sie - wo möglich - eine Skizze zu Ihren Beispielen an! Aus welchen Gründen kann es interessant sein, sich mit Ihren gewählten Funktionen zu beschäftigen?
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
e) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Musterbeispiel zu e: Temperatur an einem bestimmten Punkt des Raumes zu einem bestimmten Zeitpunkt $T(x_1, x_2, x_3, t) = \cdots$. Hat man eine Funktion dieser Art zur Verfügung, so kann man Fragen nach der zeitlichen Temperaturveränderung an einem Punkt beantworten, kann die Temperaturverteilung im Raum zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten vergleichen, man kann sich für das Temperaturmaximum bzw. -minimum interessieren, Prognosen über den zukünftigen Temperaturverlauf anstellen, uvm.

Musterlösung: a) Kreisförmige Bahn (Radius $3m$) einer Modelleisenbahn in der Ebene in Abhängigkeit von der Zeit. $f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$.
b) Seehöhe über einem Koordinatenpunkt (x_1, x_2) der Ebene,

$$h(x_1, x_2) = \cdots$$

c) Temperatur an einem Punkt des Raumes,

$$T(x_1, x_2, x_3) = \cdots$$

d) Position eines Modellflugzeugs im Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt,

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

e) Siehe Beispiel oben!
f) Landeposition eines Schlagballes in der Ebene in Abhängigkeit vom horizontalen und vertikalen Abwurfwinkel sowie von der Abwurfgeschwindigkeit,

$$f(\alpha, \beta, v) = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Skizzen sind nur bei a), b) sinnvoll möglich, bei d) eingeschränkt (man hat dann keine Information darüber, *wann* das Modellflugzeug *wo* ist, sondern nur über die zurückgelegte „Spur“).

A. 2: (a) i. $b \neq 0$.
Dann ist $x \sin \frac{1}{y}$ in (a, b) stetig, also existiert der Grenzwert:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x \sin \frac{1}{y} = a \sin \frac{1}{b}.$$

ii. $a \neq 0, b = 0$.
Der Grenzwert existiert nicht, da z.B.:

$$(x_n, y_n) = \left(a, \frac{1}{\pi n}\right), \lim_{n\to\infty} x_n \sin \frac{1}{y_n} = a \cdot 0 = 0.$$

$$(x_n, y_n) = \left(a, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right), \lim_{n\to\infty} x_n \sin \frac{1}{y_n} = a \neq 0.$$

iii. $a = 0, b = 0$.
Sei $(x, y) \to (0, 0)$. Dann ist

$$\left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| \to 0.$$

Daraus folgt: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0$.

(b) i. $a + b \neq 0$, dann ist $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \frac{xy}{x + y} = \frac{ab}{a + b}$.

ii. $(a, b) = (a, -a), a \neq 0$.
Wähle eine beliebige Folge $(x, y) \to (a, -a)$.
Dann ist $xy \to -a^2 \neq 0$ und $x + y \to 0$.
Damit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{xy}{x + y}$ nicht.

iii. $(a, b) = (0, 0)$. Wähle :

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0, 0), \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n} + 0} = 0$$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) \to (0, 0), \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = -1$$

Der Grenzwert existiert demnach nicht!

A. 3: Nein! Gegenbeispiel:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dann ist $f(a, t) = \frac{a^2 t}{a^4 + t^2}$ für $a \neq 0$ stetig und $f(0, t) = 0$ auch stetig auf $\mathbb{R}$. Analog ist $f(t, b)$ stetig auf $\mathbb{R}$ für alle $b \in \mathbb{R}$.
Aber f ist selber nicht stetig in $(0, 0)$: Wähle $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right)$
Dann ist $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ und

$$f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

A. 4: Sei $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$.
Dann ist : $x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$.
Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt:

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$