4 Gruppenübungen

A. 1: (a) Sei $P = \{-1, a_1, a_2, \dots, a_n, 1\}$ mit $-1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$.
Dann ist $L(f, P) = 0$ für alle P, also $\sup_P L(f, P) = 0$.

Sei nun $P_n = \left\{-1, -\frac{n-1}{n}, -\frac{n-2}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$,

dann ist $U(f, P_n) = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{2}{n}$.

Also bekommen wir $\inf_P U(f, P) \leq \frac{2}{n}$ für alle $n \geq 1$.

Daraus folgt also $\inf_P U(f, P) \leq 0$.

Da $0 = \sup_P (f, P) \leq \inf_P U(f, P)$, erhalten wir

$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P) = 0$.

D.h. f ist auf $[0, 1]$ integrierbar und $\int_{-1}^{1} f = 0$.

(b) Sei $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit $-1 = a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$.
Dann ist $\inf_{[a_i, a_{i+1}]} f = 0 \Rightarrow L(f, P) = 0$.
Außerdem ist $\sup_{[a_i, a_{i+1}]} f \geq 1$,

also ist $U(f, P) \geq \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot 1 = 2$.
Wäre f integrierbar, so hätten wir:

$$0 = \sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P) \geq 2$$

was ein Widerspruch ist. Also ist f auf $[-1, 1]$ nicht integrierbar.

A. 2: Sei $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. Dann ist

$$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

Daraus folgt $\inf_P U(f, P_n) \leq U(f, P_n) \forall n \geq 1$.

Nun bekommen wir $\inf_P U(f, P) \leq \frac{1}{3}$. Analog erhalten wir

$$\sup_P L(f, P) \geq L(f, P_n) \Rightarrow \sup_P L(f, P) \geq \frac{1}{3}.$$

Damit ist:

$$\frac{1}{3} \leq \sup_P L(f, P) \leq \inf_P U(f.P) \leq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P) = \frac{1}{3}$. D.h. f ist auf [0,1] integrierbar und

$$\int_0^1 f = \frac{1}{3}.$$

A. 3: Aus $f \geq 0$ folgt, dass $\forall P$ ist $L(f, P) \geq 0$.
Damit ist $\sup_P L(f, P) \geq 0$. Da F integrierbar ist, gilt:

$$\inf U(f, P) = \sup L(f, P) \geq 0 \text{ d.h. } \int_a^b f \geq 0.$$