6 Gruppenübungen

A. 1: (a)

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{Bmatrix} u = \sqrt{x}, x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{Bmatrix} = \int e^u \cdot 2u\,du =$$

$$2\int ue^u\,du = 2ue^u - 2e^u = 2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + C.$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} &= \begin{Bmatrix} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{Bmatrix} = \int \frac{2u\,du}{\sqrt{u+1}} = 2\int \frac{u+1-1}{\sqrt{u+1}}\,du = \\ &= 2\int \sqrt{u+1}\,du - 2\int \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,du = \frac{4}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}} - 4(u+1)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{\sqrt{x}+1} + C. \end{aligned}$$

A. 2: (a)

$$\begin{aligned} \int_0^R x^k e^{-x}\,dx &= -x^k e^{-x}\Big|_0^R + \int_0^R kx^{k-1}e^{-x}\,dx = \\ &= \frac{-R^k}{e^R} + k \cdot \int_0^R x^{k-1}e^{-x}\,dx = \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{R^k}{e^R} = 0$, existiert $\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx$ genau dann, wenn $\int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}\,dx$ existiert!
Wir wiederholen dieses Verfahren um zu schließen, dass $\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx$ existiert $\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-x}\,dx$ existiert.
Da nun gilt: $\int_0^R e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^R = 1 - e^{-R} \to 1$ wenn $R \to +\infty$. Daraus folgt, dass $\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx$ existiert und $\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx = k!$.

(b) Aus der letzten Übung: $\int \log x\,dx = x\log x - x$

$$\int_a^1 |\log x|\,dx = -\int_a^1 \log x\,dx = 1 + a\log a - a$$

Aus AnaI wissen wir: $\lim\limits_{a\to 0+} a\log a = 0$. Damit ist

$$\int_0^1 |\log x|\,dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 |\log x|\,dx = \lim_{a\to 0+} 1 + a\log a - a = 1$$

(c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{Bmatrix} x = \sin t \text{ für } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =: I \\ dx = \cos t\,dt \end{Bmatrix} = \int \frac{\cos t}{|\cos t|}\,dt \overset{t\in I}{=} \int \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = t = \arcsin x.$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to -1+}\int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{b\to 1-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi.$$

A. 3: (a) Da $|\sin x| \leq |x|$, erhalten wir

$$\left|\frac{\sin x \cdot \log x}{x}\right| \leq |\log x|.$$

Da $|\log x|$ auf (0,1) integrierbar ist, ist auch $\left|\frac{\sin x \cdot \log x}{x}\right|$ auf (0,1) integrierbar. Damit ist $\frac{\sin x \cdot \log x}{x} = -\left|\frac{\sin x \cdot \log x}{x}\right|$ auch auf (0,1) integrierbar.

(b) $\int_0^\infty \frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$0 \leq \frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{x}}$ für $x \in (0,1)$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist auf (0,1) integrierbar. Damit ist $\frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}}$ auf (0,1) integrierbar.

$0 \leq \frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq (1+x^3)e^{-x}$ - integrierbar auf $(1,\infty)$.

Damit ist $\frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}}$ auf $(0,\infty)$ integrierbar

A. 4: Gleichmäßige Konvergenz von f_n bedeutet, dass die Floge $a_n := \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ konvergiert gegen 0. Also erhalten wir:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq (b-a) \cdot a_n \to 0.$$