7 Gruppenübungen

A. 1: (a)

$$f(x,0) = \frac{e^x - x - 1}{x^2} \to \frac{1}{2} \text{ für } x \to 0 (\text{de l'Hospital})$$
$$f(x,-x) = 0 \to 0 \text{ für } x \to 0.$$

Also kann f nicht stetig in (0,0) werden.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}. \text{ Sei } f(0,0) = a.$$
$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{e^t - t - 1}{t^2} - a}{t} = \frac{e^t - t - 1 - at^2}{t^3}$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - t - 1 - at^2}{t^3} \overset{(dH)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - 2at}{3t^2} \overset{(dH)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 2a}{6t} = A$$

Damit der letzte Grenzwert existiert, muss der Zähler gegen 0 konvergieren. D.h. $a = \frac{1}{2}$. Damit ist

$$A \overset{(dH)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{6} = \frac{1}{6}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existiert genau dann, wenn $a = \frac{1}{3} = f(0,0)$.

(c)

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(-t,2t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{e^t - t - 1}{t^2 + 4t^2} - a}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - t - 1 - 5at^2}{5t^3} \overset{(dH)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - 10at}{15t^2} \overset{(dH)}{=}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 10a}{30t} = B$$

Damit der letzte Grenzwert existiert, muss $a = \frac{1}{10}$ sein.
Damit ist

$$B = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{30} = \frac{1}{30}.$$

$D_v f(0,0)$ existiert genau dann, wenn $f(0,0) = \frac{1}{10}$.

A. 2: (a) Da $g(t) = |t|$ in jedem Punkt $t \neq o$ differenzierbar ist, ist f differenzierbar für alle (x,y) mit $xy \neq 0$.
Sei also $xy = 0$. Daraus folgt, $x = 0$ oder $y = 0$.
OBdA : $y = 0$.
$a = (x,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t} = \begin{cases} |x| & t \to 0+ \\ -|x| & t \to 0- \end{cases}$$

Also $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$existiert nur für $x = 0$. Daraus folgt, dass f in allen Punkten $(x,0)$ und $(0,x)$ mit $x \neq 0$ nicht differenzierbar ist.

$$a = (0,0), h = (h_1,h_2), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$
$$\left| \frac{f(a+h) - f(a) - 0 \cdot h}{\|h\|} \right| = \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \underset{\|h\|\to 0}{\to} 0.$$

Daraus folgt, dass f in (0,0) differenzierbar ist.

(b) Da $g(t) = \sqrt{t}$ in jedem Punkt $t > 0$ differenzierbar ist, ist f in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$differenzierbar.
Sei $a = (0, 0), h = (h_1, h_2)$.
Dann ist $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a) - 0 \cdot h}{\|h\|} \right| = \frac{|h_1| \sqrt{h_1^2 + h_2^4}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \overset{\text{für } |h_2| \leq 1}{\leq} \frac{|h_1| \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = |h_1| \to 0$$

Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.

A. 3: a) Wir berechnen zunächst die Ableitung von f:

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 e^{\frac{x_2}{2}} & \frac{1}{2} \cdot 3x_1^2 e^{\frac{x_2}{2}} \end{pmatrix}$$

Einsetzen liefert:

$$f'(2, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene ergibt sich nach Definition:

$$\varepsilon(x) = f(2, 0) + f'(2, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix} = 12 + 12x_1 - 24 + 6x_2 = 12x_1 + 6x_2 - 12$$

b) Zunächst mit der Definition:

$$D_v f(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Es gilt $a + tv = \begin{pmatrix} 2 + t \\ 3t \end{pmatrix}$ und damit

$$D_v f(2, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{3(2 + t)^2 e^{\frac{3t}{2}} - 12}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{12e^{\frac{3t}{2}} + 12te^{\frac{3t}{2}} + 3t^2 e^{\frac{3t}{2}} - 12}{t}$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt:

$$D_v f(2, 0) = \lim_{t \to 0} (12 \cdot \frac{3}{2} e^{\frac{3t}{2}} + 12e^{\frac{3t}{2}} + 12t \cdot \frac{3}{2} e^{\frac{3t}{2}} + 6te^{\frac{3t}{2}} + 3t^2 \cdot \frac{3}{2} e^{\frac{3t}{2}}) = 18 + 12 = 30$$

Die Ebene $x_2 = 3x_1$ steht normal auf die x_1-x_2-Ebene und schneidet sie ausgehend vom Koordinatenursprung in Richtung $v = (1, 3)$. Schneidet man nun die Ebene ε mit der Ebene $x_2 = 3x_1$, so entsteht eine Schnittgerade, die eben genau in diese Richtung verläuft.

Dazu setzen wir zunächst $x_1 = t$, daraus folgt sofort $x_2 = 3t$ und durch Einsetzen in ε ergibt sich $x_3 = 30t - 12$. Die Schnittgerade wird also durch

$$g : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ 30t - 12 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Läuft man in der x_1-x_2-Ebene einmal entlang des Vektors $(1, 3)$, so verändert sich dabei der x_3-Wert der Geraden um den Wert 30. Das ist also die Richtungsableitung in Richtung $v = (1, 3)$ (Vorsicht: das ist **nicht** genau die Steigung der Geraden, dazu müsste man noch durch die Länge des Vektors $(1, 3)$ dividieren!!!).