8 Gruppenübungen

A. 1: (a)

$$f(x,y,z) = f(0,0,0) + (-y,z,x+2y)^T + (xz,x^2,0)^T$$

Die Abbildung $(x,y,z) \mapsto (-y,z,x+2y)^T$ ist linear.
Um zu zeigen, dass diese Abbilodung gleich $Df(0,0,0)$ ist, müssen wir beweisen:

$$\frac{(xz,x^2,0)^T}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \to 0 \quad \text{wenn } (x,y,z) \to (0,0,0) \tag{1}$$

(1) ist äquivalent zu $\dfrac{\sqrt{x^2z^2+x^4}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \to 0$.

$$\sqrt{\frac{x^2z^2+x^4}{x^2+y^2+z^2}} = |x| \cdot \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq |x| \to 0.$$

(b)

$$f(1+x,1+y,z) = \begin{pmatrix} (1+x)z-(1+y) \\ (1+x)^2+z \\ (1+x)+2(1+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+xz-1-y \\ 1+2x+x^2+z \\ 1+x+2+2y \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-y \\ 2x+z \\ x+2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xz \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da wir in (a) schon gezeigt haben, dass $\dfrac{|(xz,x^2,0)^T|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \to 0$ für $(x,y,z) \to (0,0,0)$, ist $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} z-y \\ 2x+z \\ x+2y \end{pmatrix}$ die Ableitung $Df(1,1,0)$.

A. 2: (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} \cdot y + 8x^7, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{xy} \cdot x.$$
$$D_v f(x,y) = 2 \cdot (e^{xy} \cdot y + 8x^7) + (-3) \cdot e^{xy} \cdot x$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \cdot 20(x+y)^{19} + (x+y)^{20}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 20x(x+y)^{19}$$
$$D_v f(x,y) = 2 \cdot (x \cdot 20(x+y)^{19} + (x+y)^{20}) + (-3) \cdot 20x(x+y)^{19}$$

A. 3: 1. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq e^x$, dann existiert $D_v f(x,y) \forall v \in \mathbb{R}^2$, da f im Punkt (x,y) differenzierbar ist.
2. Sei $(x,y) = (a,,e^a)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Wir suchen alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, damit der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((a,e^a)+t(v_1,v_2)) - f(a,e^a)}{t} \qquad \text{existiert.} \tag{2}$$

$$\frac{f(a+tv_1,e^a+tv_2)-f(a,e^a)}{t} = \frac{|e^a+tv_2-e^{a+tv_1}|}{t} =$$
$$= \frac{|t|}{t}\left|\frac{e^a-e^{a+tv_1}+tv_2}{t}\right|$$

Daruas folgt, dass der Grenzwert (2) genau dann existiert, wenn $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^a - e^{a+t_v 1} + tv_2}{t} = 0$

$$\frac{e^a-e^{a+tv_1}+tv_2}{t} = e^a \cdot \frac{1-e^{tv_1}}{t} + v_2 \overset{l'H.}{\to} -e^a v_1 + v_2 \text{ für } t \to 0.$$

Also existiert der Grenzert (2) genau dann, wenn $v_2 = e^a v_1$ gilt.