9 Gruppenübungen

A. 1: Teil a) $f \circ g$ ist nicht möglich, da die Bilder von g dreidimensional sind, während die Argumente von f zweidimensional sind.

$g \circ f$ ist möglich, da die Bilder von f zweidimensional sind, ebenso wie die Argumente von g.

$f'(a)$ ist eine (2×2)-Matrix: $f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix}$

$g'(b)$ ist eine (3×2)-Matrix: $g'(b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(b) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(b) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(b) \end{pmatrix}$

$(g \circ f)'(a)$ ist als Produkt von $g'(f(a))$ mit $f'(a)$ eine (3×2)-Matrix.

Teile b bis h)

	$g \circ f$	$f \circ g$	$f'(a)$	$g'(b)$	$(g \circ f)'(a)$	$(f \circ g)'(b)$
b)	ja	ja	2×3	3×2	3×3	2×2
c)	nein	ja	3×1	1×2	-	3×2
d)	ja	ja	3×3	3×3	3×3	3×3
e)	ja	nein	2×2	3×2	3×2	-
f)	nein	nein	4×2	3×2	-	-
g)	ja	nein	2×2	3×2	3×2	-
h)	nein	ja	5×1	1×2	-	5×2

A. 2: (a)

$$u = x^2 y, v = x + y, w = 2xy^3.$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) \cdot 2xy + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) \cdot 2y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) \cdot x^2 + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) \cdot 6xy^2$$

(b)

$$Df(-1,1) = (0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2, 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-6)) = (1, -7)$$

A. 3: Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $u(x,y) = (3x^2 y, e^{x-y}, x + y^2)$.
Dann ist $f = g \circ u$, somit $Df(x,y) = Dg(u(x,y)) \cdot Du(x,y)$,
Also $Df(1,1) = Dg(3,1,2) \cdot Du(1,1)$

$$Du(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & 2y \end{pmatrix}, \qquad Du(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 17 & 13 \end{pmatrix}$$

A. 4: Sei $x = u - v, y = v \Leftrightarrow u = x + y, v = y$. und
$g(u,v) := f(u - v, v) = f(x,y)$.

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot 1 = 0$$

Daraus folgt:$g(u,v) = \varphi(u)$ - eine Funktion die von v unabhängig ist. Damit erhalten wir

$$f(x,y) = f(u - v, v) = g(u,v) = \varphi(u) = \varphi(x + y).$$