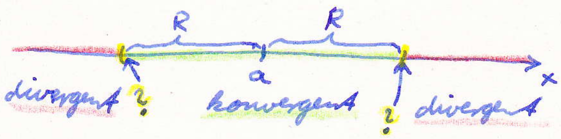
Analysis II, Globalübung 1

Aufgabe 1: Betrachtet man eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ und fragt, für welche Werte von x diese Reihe konvergiert, so stellt man fest, dass dies für alle x aus einem Intervall mit Mittelpunkt a der Fall ist:



R heißt hierin Konvergenzradius und kann berechnet werden als

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dabei lässt sich der limes superior einer Folge b_n beispielsweise berechnen als

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \text{ falls } b_n \text{ konvergiert,}$$

oder als

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{mit der monoton}$$

fallenden Folge c_n mit $c_n := \sup\{b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\}$.

a) $a_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}$. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = ?$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}}{\sqrt[n]{n}}$$

$\sqrt[n]{n} \to 1$, es bleibt zu untersuchen $\sqrt[n]{3^n+(-2)^n} \to ?$

$$\sqrt[n]{3^n+(-2)^n} \le \sqrt[n]{3^n+2^n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2} \to 3$$

$$\sqrt[n]{3^n+(-2)^n} = 3\sqrt[n]{1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^n} \ge 3\cdot\sqrt[n]{1-\tfrac{2}{3}} = 3\cdot\sqrt[n]{\tfrac{1}{3}} \to 3$$

Also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}}{\sqrt[n]{n}} = \dfrac{3}{1} = 3 \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{1}{3}.$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{e}$$

c) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Hierzu beachte, dass (für $n \ge 2$)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \le \frac{(n!)^2}{(2n)!} \le n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

bzw. $$\left(\frac{1}{4}\right)^n (2n)! \le (n!)^2 \le n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot (2n)! \qquad (*)$$

Beweis per Induktion:

IA: $n=2$: $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (2\cdot 2)! = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{16} = \frac{3}{2} \le 4 = (2!)^2 \le 6 = 2^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot(2\cdot 2)!$

IV: Es gelte (*) für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

IS: Dann gilt auch

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} (2(n+1))! \leq ((n+1)!)^2 \leq (n+1)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} (2(n+1))! .$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} (2(n+1))! = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} (2n)! \, \frac{(2n+2)(2n+1)}{4} \overset{IV}{\leq} (n!)^2 \frac{(2n+2)(2n+1)}{4} \leq (n!)^2 \frac{2n+2}{2} \cdot \frac{2n+2}{2}$$

$$\leq ((n+1)!)^2$$

$$= (n+1)^2 (n!)^2 \overset{IV}{\leq} (n+1)^2 n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n (2n)! \leq (n+1)^2 \frac{2n+2}{2} \cdot \frac{2n+1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n (2n)!$$

$$\leq (n+1)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} (2(n+1))! .$$

Also ist

$$\frac{1}{4} \leftarrow \sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}\right)^n} \overset{(*)}{\leq} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(*)}{\leq} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow \quad R = 4$

(siehe auch Aufgabe 2!)

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$, $\quad a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq k^2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \underbrace{=}_{\substack{m = \sqrt{n} \\ n\to\infty \Rightarrow m\to\infty}} \lim_{m\to\infty} 2^{-\frac{1}{m}} = 1$$

$\Rightarrow R = 1$

e) $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$ $\qquad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = ?$

$$\sqrt[n]{\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}} = 3^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n^2+1}}} \; ; \quad 3^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1,$$

$\sqrt[n]{\sqrt{n^2+1}} \geq \sqrt[n]{\sqrt{n^2}} = \sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{\sqrt{n^2+1}} \leq \sqrt[n]{\sqrt{4n^2}} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$, also $\sqrt[n]{\sqrt{n^2+1}} \to 1$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 3^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n^2+1}}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \qquad \Rightarrow R = 1$$

f) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \to 1 \qquad \Rightarrow R = 1$$

g) $a_n = \begin{cases} 2, & 2 \mid n \\ 4, & 2 \nmid n \end{cases}$, also $a_n = 3 + (-1)^{n+1}$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{3+(-1)^{n+1}} \leq \sqrt[n]{4} \to 1 \qquad \Rightarrow R = 1$$

h) $a_n = (2 + (-1)^n)^n$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2+(-1)^n)^n} = \limsup_{n\to\infty} 2 + (-1)^n$$

Zu $b_n = 2 + (-1)^n$ betrachte $c_n = \sup\{b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots\}$

$= \sup\{3, 1, 3, 1, \ldots\}$

$= \sup\{3, 1\} = 3 \to 3$ $\qquad \Rightarrow R = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe.

Gilt für den Konvergenzradius R, dass $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$?

Antwort: NEIN.

Ein Gegenbeispiel ist die Reihe aus Aufgabe 1g):

$$a_n = \begin{cases} 2 & 2 \mid n \\ 4 & 2 \nmid n \end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{4}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \frac{2}{4}, \dots\right\} = \sup\left\{2, \tfrac{1}{2}\right\} = 2 \neq 1 = \frac{1}{R}.$$

Es gilt aber $R \geq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ und, falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, auch $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

Erinnerung: Quotientenkriterium

I. Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, falls $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

II. Ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, so ist die Reihe divergent.

Die Reihe $\sum a_n x^n$ konvergiert also, wenn

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|},$$

also dann, wenn x näher am Entwicklungspunkt liegt als $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, d.h. $R \geq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. Damit dieser Ausdruck aber <u>gleich</u> dem Konvergenzradius würde, müsste die Potenzreihe für $|x| > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ divergieren.

Diese Aussage (Reihe $\sum a_k$ divergent, falls $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$) liefert das Quotientenkriterium aber <u>nicht</u>.

Ist allerdings fast immer $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ (was insbesondere erfüllt ist, wenn $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ existiert), divergiert $\sum a_n$, das heißt $\sum a_n x^n$ divergiert, wenn $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ und damit ist in diesem Fall der Konvergenzradius $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

Vorsicht: Dies funktioniert nur, wenn $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ reicht nicht.

Mit diesem Verfahren lässt sich dann auch Aufgabe 1c) schneller lösen:

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}. \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4}, \quad \text{also} \quad R = 4.$$

Aufgabe 3: $f(x) = \frac{x^5+x+1}{e^{x^2}}$ $\qquad f^{(100)}(0) = ?$

Um diese Aufgabe zu lösen, ist es zweckmäßig, f als Potenzreihe darzustellen:

$$f(x) = (x^5+x+1)e^{-x^2} = (x^5+x+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x^5+x+1)\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(x^{2n+5}+x^{2n+1}+x^{2n}\right).$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+5} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}.$$

Zur Bestimmung der 100. Ableitung an der Stelle 0 verwenden wir folgenden

Satz: Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R.

Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ f k-mal diff'bar auf (x_0-R, x_0+R) und die k-te Ableitung an der Stelle x_0 ist $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$.

Potenzreihen können gliedweise differenziert werden. Beim Differenzieren eines Polynoms verringert sich der Exponent um 1, das heißt, beim k-fachen Ableiten entfallen alle Terme mit Exponenten $n<k$; alle Terme mit $n>k$ enthalten immer noch $(x-x_0)^{n-k} = 0^{n-k} = 0$; übrig bleibt nur $(a_k \cdot (x-x_0)^k)^{(k)} = a_k \cdot (x-x_0)^{(k)} = a_k \cdot k!$.

Zu bestimmen sind in

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+5} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{n!}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

also die a_{100}, das heißt: die Vorfaktoren vor x^{100}. x^{100} steht dabei nur in $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, nämlich für $n=50$, in den anderen beiden Reihen steht x nur mit ungeradem Exponenten.

Also ist $\quad a_{100} = \frac{(-1)^{50}}{50!}$

und daher

$$f^{(100)}(0) = \frac{(-1)^{50}}{50!}\cdot 100! = \frac{100!}{50!}.$$

Aufgabe 4: a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$

f ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ausnahme der Stellen, an denen

- einzelne Summanden $\frac{(-1)^n x}{n+x}$ nicht definiert sind
  (für $x \in \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$)
- die Reihe divergiert
  (nie der Fall; Leibnizkriterium: Folge alterniert
  konvergiert gegen 0
  fällt betraglich monoton).

$D = \mathbb{R} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$$f(x) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Da x überall diff'bar, genügt es, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ auf Differenzierbarkeit zu überprüfen.

$$f_n(x) := \frac{(-1)^n}{n+x} \qquad f_n'(x) = (-1)^n \cdot (-1) \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Um $f'(x) = \sum f_n'(x)$ auf einem Intervall $(x_0 - a, x_0 + a)$ zu erhalten, müssen wir nachweisen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ existiert und dass die Konvergenz dieser Funktionenreihe auf $[x_0 - a, x_0 + a]$ gleichmäßig ist:

$$\|f_n'\|_\infty = \|(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+x)^2}\|_\infty \leq \frac{1}{(n + x_0 - a)^2} \quad \text{(falls } n \text{ groß genug)}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x_0-a)^2} < \infty$, folgt mit dem Weierstraß'schen Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ gleichmäßig konvergiert und damit $f'(x_0)$ (für unser beliebig vorgegebenes $x_0 \in D$) existiert, also ist f auf ganz D differenzierbar.

b) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2} = |x| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

f ist überall definiert ($D = \mathbb{R}$), denn $\frac{1}{n^2+x^2} < \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}; \quad f_n'(x) = -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}$$

$\sum f_n'$ konvergiert glm. auf $\mathbb{R}$, denn

$$\left| -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2} \right| \leq \frac{2}{n^2+x^2} \cdot \frac{|x|}{n^2+x^2} \leq \frac{2}{n^2} \cdot \frac{|x|}{1+|x|^2} < \frac{2}{n^2} \cdot 1$$

und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty$. f diff'bar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

zu 0: Existiert $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, d.h. ist $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$?

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} > \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

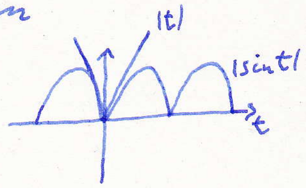
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} < \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{1+x^2} = -1$$

$\Rightarrow f$ nicht diff'bar in 0.

Allgemein: Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \to 0} g(x) = a \neq 0$.

Dann ist $f(x) = |x| \cdot g(x)$ nicht diff'bar in 0.

Aufgabe 5: f kann in $(0,0)$ genau dann stetig fortgesetzt werden, wenn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert.



a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{|x|+|y|} = ?$

Es gilt $|\sin t| \le |t|$, wie man sich leicht anhand der zugehörigen Funktionsgraphen veranschaulichen kann. Beachte dabei, dass die Steigung des Sinus in 0 1 ist und danach abfällt.

$$\left|\frac{\sin xy}{|x|+|y|}\right| \le \frac{|xy|}{|x|+|y|} = |y| \cdot \frac{|x|}{|x|+|y|} \le |y| \to 0.$$

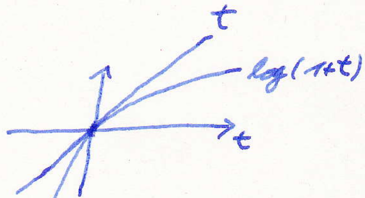
Mit $f(0,0):=0$ wird f stetig in $(0,0)$ (und damit auf ganz $\mathbb{R}^2$).

b) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

$(x_n,y_n) := (\frac{1}{n}, 0)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\cdot 0}{\frac{1}{n^4}+0} = 0$

$(x_n,y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$

f kann in $(0,0)$ nicht stetig fortgesetzt werden.

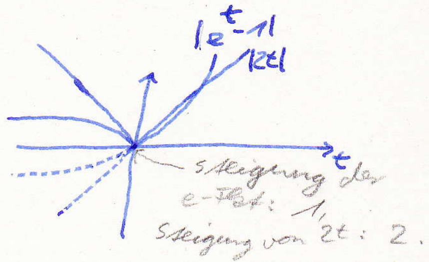


c) $f(x,y) = \frac{\log(1+x^2y)}{\sqrt{x^2+3y^4}}$

Es gilt $\log(1+t) \le t$, da $1+t \le e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\ldots$, und damit

$$\left|\frac{\log(1+x^2y)}{\sqrt{x^2+3y^4}}\right| \le \left|\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+3y^4}}\right| \le |xy|\cdot\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^4}}\right| \le |xy| \to 0$$

$f(0,0):=0$.



d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^3}-1}{x^2+y^4} = ?$

Für betraglich kleine t ist $|e^t-1| \le 2|t|$.

$$\left|\frac{e^{xy^3}-1}{x^2+y^2}\right| \le \frac{2|xy^3|}{x^2+y^4} = 2|y|\cdot\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \le 2|y|\cdot\frac{1}{2} = |y| \to 0.$$

$f(0,0):=0$.

e) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy} = e^{xy\log(x^2+y^2)}$

$(x,y)\to 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\to 0$; $z := x^2+y^2$

$$|xy\log(x^2+y^2)| \le \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,|\log(x^2+y^2)| = |z\log z| \to 0 \text{ für } z\to 0^+.$$

$f(0,0) := e^0 = 1$.