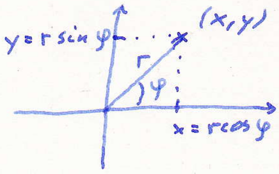
Analysis II, Globalübung 2



Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2}$

Um diesen Grenzwert zu berechnen, empfiehlt es sich, Polarkoordinaten zu verwenden, also

$x = r\cdot\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

zu setzen und dann den Grenzfall $r \to 0^+$ zu betrachten.

$$\left|\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi}\right| = |r|\cdot\left|\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi}\right|$$

$$\leq |r|\cdot\frac{1}{|1+\sin\varphi\cos\varphi|} \underset{\uparrow}{\leq} |r|\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2|r| \to 0$$

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

$-\frac{1}{2} \leq \sin\varphi\cos\varphi \leq \frac{1}{2}$

Also ist $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2} = 0$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2-xy+y^2}$

Analog zu a):

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2-xy+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)}\right| = |r|\cdot\left|\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1-\sin\varphi\cdot\cos\varphi}\right|$$

$$\leq |r|\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \to 0.$$

$\sin\varphi\cos\varphi \leq \frac{1}{2}$ (vgl. a))

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2-xy+y^2} = 0.$

Aufgabe 2: Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^4+y^4)^p}$?

Für $p=0$ ist der zu untersuchende Ausdruck $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$,

auch für $p<0$ ist der Fall klar: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^4+y^4)^p} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^4+y^4)^{\overset{>0}{-p}} = 0 \cdot 0$,

für $p \le 0$ existiert der Grenzwert also.

Um eine Ahnung zu bekommen, wie sich das in den übrigen Fällen verhält, betrachten wir eine konkrete Folge:

$(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, 0)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{(\frac{1}{n^4})^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{4p}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{4p-2} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } 4p-2<0 \\ 1 & \text{falls } 4p-2=0 \\ \text{nicht vorhanden,} & \text{falls } 4p-2>0 \end{cases}.$$

Für $p > \frac{1}{2}$ existiert der Grenzwert nicht.

Die unterschiedlichen Werte für $p=\frac{1}{2}$ und $p<\frac{1}{2}$ legen nahe, diese Fälle getrennt zu betrachten.

$p=\frac{1}{2}$. Betrachte $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

$$\frac{2\cdot\frac{1}{n^2}}{(2\cdot(\frac{1}{n})^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\cdot n^{4/2}}{n^2\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Auch für $p=\frac{1}{2}$ existiert der Grenzwert also nicht.

$0<p<\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{x^2+y^2}{(x^4+y^4)^p}\right| = \left|\frac{r^2}{(r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi)^p}\right| = r^{2-4p}\cdot\frac{1}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^p} \le \frac{r^{2-4p}}{(\frac{1}{2})^p} \to 0.$$

$$\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = (\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1-2(\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi)^2 = 1-\tfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi \ge \tfrac{1}{2}$$

Der Grenzwert existiert für $p<\frac{1}{2}$, für $p \ge \frac{1}{2}$ existiert er nicht.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^p}$

$p \le 0$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^p} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y (x^2+y^2)^{\overset{\ge 0}{-p}} = 0.$

Untersuche $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$: $\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^p} = \frac{\frac{1}{n^3}}{(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2})^p} = \frac{1}{2^p} n^{2p-3} \longrightarrow \begin{cases} 0, \text{ falls } p<\frac{3}{2} \\ 1, \text{ falls } p=\frac{3}{2} \\ \infty, \text{ falls } p>\frac{3}{2} \end{cases}.$

$p=\frac{3}{2}$. Betrachte $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$:

$$\frac{\frac{1}{n^4}}{(\frac{1\cdot n^2}{n^2 n^2}+\frac{1}{n^4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^4}\,\frac{n^{4\cdot\frac{3}{2}}}{(n^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{n^2}{(n^2+1)^{3/2}} \le \frac{n^2+1}{(n^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \to 0.$$

$0<p<\frac{3}{2}$:

$$\left|\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^p}\right| = \left|\frac{r^2\cos^2\varphi\cdot r\cdot\sin\varphi}{r^{2p}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^p}\right| = |r^{3-2p}|\cdot\frac{|\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi|}{1^p} \le |r^{3-2p}| \longrightarrow 0.$$

Der Grenzwert existiert für $p<\frac{3}{2}$ und existiert nicht, falls $p \ge \frac{3}{2}$.

Aufgabe 3: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ existiert nicht.

$$(x_n, y_n) = (0, \tfrac{1}{n}): \quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{0-\frac{1}{n}}{0+\frac{1}{n}} = -\frac{n}{n} = -1$$

$$(x_n, y_n) = (\tfrac{1}{n}, 0): \quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}+0} = \frac{n}{n} = 1$$

$\#$ $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ existiert nicht.

Aber $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}\right)$ und $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}\right)$ existieren.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{-y}{y} = -1.$$

Aufgabe 4: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{y}$ existiert.

$$\left|(x+y)\sin\tfrac{1}{x}\cdot\sin\tfrac{1}{y}\right| = |x+y|\cdot\left|\sin\tfrac{1}{x}\right|\cdot\left|\sin\tfrac{1}{y}\right| \leq |x+y|\cdot 1\cdot 1 = |x+y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\right)$ existiert nicht.

$(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{2\pi n})$ Mit dieser Wahl ist $\lim\limits_{y\to 0} (x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$ scheinbar gleich $\lim\limits_{n\to\infty} (x+\frac{1}{2\pi n})\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} = 0$

und damit müsste auch $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) = 0$ sein.

Aber mit den Folgen $x_n \to 0$, $x_1 = 1$, $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)\sin\frac{1}{1}\cdot\underbrace{\sin(2\pi n + \tfrac{\pi}{2})}_{=1} = \sin 1 \neq 0,$$

also existiert $\lim\limits_{y\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ gar nicht

– und damit erst recht nicht $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right)$.

(Und auch nicht $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right)$ aus denselben Gründen.)

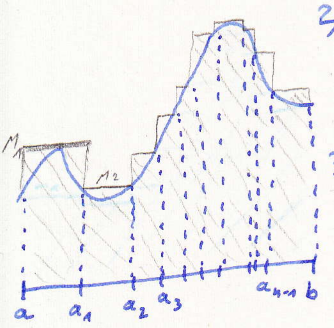
Diese Aufgaben zeigen, dass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}$$

<u>nicht</u> gleichbedeutend sind und nicht gegeneinander ausgetauscht werden dürfen.

Aufgabe 5: Welche Funktionen f sind auf $[0,2]$ Riemann-integrierbar?

Integrieren: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f beschränkt.



1) $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ — Partition wählen

$P = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$

2) $L(f,P) = m_0 \cdot (a_1 - a_0) + m_1(a_2 - a_1) + \dots + m_{n-1}(a_n - a_{n-1})$ — Unter- und Obersumme bilden

$U(f,P) = M_0 \cdot (a_1 - a_0) + M_1(a_2 - a_1) + \dots + M_{n-1}(a_n - a_{n-1})$

3) $\sup\limits_P L(f,P)$ und $\inf\limits_P U(f,P)$ berechnen.

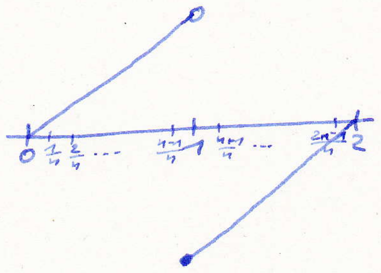
Ist dabei $\sup L(f,P) = \inf U(f,P)$, heißt f Riemann-integrierbar und dieser Wert gibt $\int_a^b f$ an.

($\sup L(f,P) \le \inf U(f,P)$ gilt dabei immer.)

Hilfreich bei der Frage nach der Integrierbarkeit ist folgender

Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und sei P_n eine Folge von Partitionen mit $\lim\limits_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U(f, P_n)$.
Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ x-2 & \text{für } 1 \le x \le 2. \end{cases}$



$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}, 1, \frac{n+1}{n}, \dots 2\}$

$$L(f,P_n) = 0 \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{2}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \dots + \tfrac{n-2}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + (-1) \cdot \tfrac{1}{n} + (-1) \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{-n+1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{-n+2}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \dots + \tfrac{-n+(n-1)}{n} \cdot \tfrac{1}{n}$$

$$= \tfrac{1}{n^2} \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n-2 - n - n + (1-n) + (2-n) + (3-n) + \dots + (n-2-n) + (n-1-n))$$

$$= \tfrac{1}{n^2} \cdot (-n - n + 1 - n)$$

$$= \frac{-3n+1}{n^2} \longrightarrow 0$$

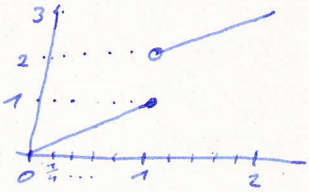
$$U(f,P_n) = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{2}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \dots + \tfrac{n-1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + 1 \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{-n+1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{-n+2}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \dots + \tfrac{-n+(n-1)}{n} \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{-n+n}{n} \cdot \tfrac{1}{n})$$

$$= \tfrac{1}{n^2}(1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (-n+1) + (-n+2) + \dots + (-n+n-1))$$

$$= \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0.$$

f ist also auf $[0,2]$ Riemann-integrierbar.

b) $f(x) = x + [x]$.

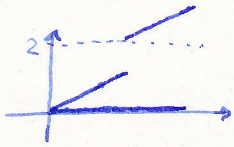


$P_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \frac{2n}{n}\}$

$$L(f,P_n) = \frac{1}{n}\cdot\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} + \left(1+\frac{n+1}{n}\right) + \left(1+\frac{n+2}{n}\right) + \dots + \left(1+\frac{2n-1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\cdot\left(1+2+\dots+n+(2n+1)+(2n+2)+\dots+(3n-1)\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\cdot\left(1+2+\dots+n+n+1 + n+2+\dots+2n-1 + (n-1)\cdot n\right)$$
$$= \frac{n^2-n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\cdot\left(1+2+\dots+2n-1\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(2n-1)(2n)}{\cancel{2}} = 3 - \frac{2}{n} \longrightarrow 3$$

$$U(f,P_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} + \frac{2n+1}{n} + \frac{2n+2}{n} + \dots + \frac{3n}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(1+2+3+\dots+n+(n+1)+(n+2)+\dots+2n + n\cdot n\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{n^2}\left(1+2+\dots+2n\right)$$
$$= 1 + \frac{2n(2n+1)}{n^2\cdot 2} = 3 + \frac{1}{n} \longrightarrow 3$$

f ist integrierbar auf $[0,2]$.



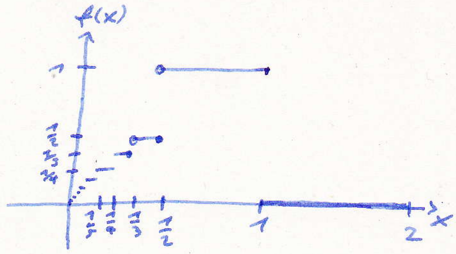
c) $$f(x) = \begin{cases} x + [x] & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht integrierbar auf $[0,2]$.
Denn sei $P = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ eine Partition von $[0,2]$.
Dann ist $L(f,P) = 0$, denn in jedem Intervall $[a_i, a_{i+1}]$ gibt es eine irrationale Zahl ξ, mit also $f(\xi) = 0$. Da f auf $[0,2]$ nichtnegativ, ist damit $m_i = 0$ und auch $L(f,P) = 0\cdot(a_1-a_0) + 0\cdot(a_2-a_1) + \dots + 0\cdot(a_n - a_{n-1}) = 0$.
Wähle $j \in \mathbb{N}$ so, dass $1 \in [a_j, a_{j+1}]$. Dann ist

$$U(P,f) = M_0(a_1-a_0) + M_1(a_2-a_1) + \dots + M_{j-1}(a_j - a_{j-1}) + M_j(a_{j+1}-a_j) + M_{j+1}(a_{j+2}-a_{j+1}) + \dots + M_{n-1}(a_n - a_{n-1})$$
$$\geq M_j(a_{j+1}-a_j) + M_{j+1}(a_{j+2}-a_{j+1}) + \dots + M_{n-1}(a_n - a_{n-1})$$
$$\geq 2\cdot(a_{j+1}-a_j) + 2\cdot(a_{j+2}-a_{j+1}) + \dots + 2\cdot(a_n - a_{n-1})$$
$$= 2\cdot(a_n - a_j)$$
$$\geq 2\cdot(2-1) \quad = 2$$

Insbesondere ist damit $\sup_P L(f,P) = 0 < 2 \leq \inf_P U(f,P)$, also ist f nicht Riemann-integrierbar auf $[0,2]$.

d) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Monotone Funktionen sind auf $[a,b]$ R-integrierbar.
Summe und Differenz integrierbarer Funktionen sind integrierbar.

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases} \quad \text{und} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

sind monoton, also auf $[0,2]$ integrierbar.

Da $f = g_1 - g_2$, ist also auch f als Differenz integrierbarer Funktionen auf $[0,2]$ integrierbar.

Mit demselben Argument lassen sich auch Teil (a) und (b) lösen: (b) f ist selbst monoton, also integrierbar.

(a) $$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x-2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Mit $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$,
die beide monoton und damit integrierbar sind, lässt sich f darstellen als

$$f = f_1 - f_2,$$

also als Differenz integrierbarer Funktionen, ist also integrierbar.

(Und natürlich lässt sich Aufgabe 5.(d) auch lösen wie (a) und (b), die Terme werden nur deutlich unhandlicher.)