Analysis II, Globalübung 3

Aufgabe 1: a) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \overset{\uparrow}{=} \int \frac{\cos y}{y}\cdot 2y\,dy = 2\int \cos y\,dy = 2\sin y + \text{Const} = 2\sin\sqrt{x} + \text{Cst.}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2\\ &\frac{dx}{dy} = 2y,\ dx = 2y\,dy\end{aligned}}$$

b) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \underbrace{\sin y}_{g'}\cdot\underbrace{2y}_{f}\,dy = \underbrace{-2y\cos y}_{fg} + \underbrace{\int 2\cos y\,dy}_{-\int f'\cdot g}$

$= -2y\cos y + 2\sin y + \text{const.}$

$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + \text{const.}$

c) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}\,dx \underset{\substack{y = 1-x^3\\ \frac{dy}{dx} = -3x^2}}{\underbrace{=}} \int \frac{(x(y))^5}{\sqrt{y}}\cdot\left(-\frac{1}{3(x(y))^2}\right)dy = -\frac{1}{3}\cdot\int\frac{x^3(y)}{\sqrt{y}}\,dy$

$\displaystyle = -\frac{1}{3}\int\frac{1-y}{\sqrt{y}}\,dy \overset{\substack{z^2 = y\\ \frac{dy}{dz} = 2z}}{\overbrace{=}} -\frac{1}{3}\int\frac{1-z^2}{z}\cdot 2z\,dz$

$\displaystyle = -\frac{2}{3}\int(1-z^2)\,dz = -\frac{2}{3}z + \frac{2}{9}z^3 + \text{const}$

$\displaystyle \overset{z = \sqrt{y} = \sqrt{1-x^3}}{=} -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + \frac{2}{9}\left(\sqrt{1-x^3}\right)^3 + \text{const.}$

Anmerkungen:
- Natürlich hätte man auch sofort $y := \sqrt{1-x^3}$ substituieren oder auf die zweite Substitution verzichten können.
  Zum Glück sind wir aber nicht darauf angewiesen, den „optimalen Weg" auf Anhieb zu erkennen.
- Schreibt man nach einer Substitution unter ein Integral nach y ein x, muss man sehr darauf achten, dass dann x eine Funktion von y ist und man nicht einfach nach dem Schema „$\int x\,dy = xy$" integrieren kann.

d) $\displaystyle\int \underbrace{e^x}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{g'}\,dx = \underbrace{-e^x\cos x}_{f\cdot g} + \underbrace{\int \underbrace{e^x}_{\tilde f}\,\underbrace{\cos x}_{\tilde g'}\,dx}_{-\int f'\cdot g}$ (*)

$\displaystyle = -e^x\cos x + \underbrace{e^x\sin x}_{\tilde f\cdot\tilde g} \underbrace{- \int e^x\sin x\,dx}_{-\int\tilde f'\,\tilde g}$

$\displaystyle\Rightarrow 2\int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) \quad\Rightarrow\quad \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

e) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx \overset{(*)}{=} \int e^x\sin x\,dx + e^x\cos x$

$\displaystyle \overset{d)}{=} \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

f) $$\int \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan'(x)\cdot \log(\cos x)\,dx$$

$$= \tan x \cdot \log(\cos x) - \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x)\,dx$$

$$= \tan x \cdot \log(\cos x) + \int \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= \tan x \cdot \log(\cos x) + \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \tan x \cdot \log(\cos x) + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int 1\,dx$$

$$= \tan x \cdot \log(\cos x) + \tan x - x + \text{const.}$$

g) $\int x \cos^2 x\,dx$

Hierzu berechne $$\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x\,dx$$
$$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$
$$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

und beachte, dass $(\sin^2(x))' = 2\sin x \cos x$.

$$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\cos^2 x}_{g'}\,dx = x\cdot\frac{\sin x\cos x + x}{2} - \int \frac{\sin x \cos x + x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\sin x\cos x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{x^2}{4} + \text{const}$$

$$= \frac{1}{2}x\sin x\cos x - \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{x^2}{4} + \text{const}$$

h) $$\int x \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int x \sin 2x\,dx = -\frac{x}{4}\cos 2x + \int \frac{\cos 2x}{4}\,dx$$

$$= -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + \text{const.}$$

Berechnet man dieses Integral, ohne den Zusammenhang $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ zu verwenden, kann es sein, dass man ein anders aussehendes Ergebnis erhält $\left(\frac{x}{2}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cdot\sin x \cos x - \frac{x}{4}\right)$. Dieses lässt sich aber in das angegebene Resultat umformen.

i) $$\int x \log(1+x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\log(1+x) - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(1+x) - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(1+x) + \text{const}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \text{const.}$$

Aufgabe 2: a) $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$

$$\int \sin^n x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx = \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x \, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^{2n} x \, dx$$

$$\Rightarrow n \cdot \int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

b) $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos x \cos^{n-1} x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x \, (n-1)\cos^{n-2} x \, (-\sin x) \, dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

$$\Rightarrow n \int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \qquad \boxtimes$$

Diese beiden Formeln gelten für jede natürliche Zahl $n \geq 2$.

Aufgabe 3: a) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx$

Für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist $0 \leq \sin x \leq 1$, also $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x$ und damit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx.$$

Um die zweite Ungleichung zu beweisen, verwenden wir Aufgabe 2a):

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = -\frac{1}{2n+1} \sin^{2n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx.$$

Zu zeigen ist also

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx$$

$$= \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx,$$

was mit demselben Argument gilt wie die erste Ungleichung.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Nach Aufgabe 2a) ist $\int\sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$,

also $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx \qquad (n\geq 2)$

bzw. $\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx = \frac{n}{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx \qquad (n\geq 2)$

oder $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \frac{n+2}{n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{n+2}x\,dx. \qquad (n\geq 0)$

Damit ist

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\pi/2}1\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx=\frac{2}{1}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$$

$$=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx=\ldots=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx.$$

Außerdem ist

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-3}x\,dx$$

$$=\ldots=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx}_{=1}.$$

Nun folgt, da mit 3a) $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx\geq\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx$, dass

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx\geq\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx$$

$$\geq\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

Zudem gilt $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx\leq\left(1+\frac{1}{2n}\right)\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx$, also

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx\leq\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx$$

$$\leq\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

also, wenn man diese Ungleichungen zusammennimmt und die Faktoren ein wenig umsortiert:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\leq\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\leq\frac{\pi}{2}$$

und mit dem Einschließungskriterium folgt jetzt, da $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\to\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$ für $n\to\infty$, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

Dieses Produkt lässt sich umschreiben.
Im Zähler steht zweimal „$n!$ mit jeweils verdoppelten Faktoren“, also $(n!\cdot 2^n)^2$;
im Nenner die Produkte aller Zahlen von 1 bis $2n$ und von 1 bis $2n+1$, aus denen die geraden Zahlen wieder herausgekürzt wurden: $\frac{1}{\text{Nenner}}=\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{(2n+1)!}$.
Damit ist das Produkt gleich $\frac{1}{\text{Nenner}}\cdot\text{Zähler}=\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n)!(2n)!(2n+1)}\cdot 4^n\cdot(n!)^2=\left(\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!\,\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es darum, zu entscheiden, ob gewisse uneigentliche Integrale existieren. Es ist nicht erforderlich, sie zu berechnen, stattdessen sehr hilfreich ist folgendes

Vergleichskriterium: Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $0 \leq f \leq g$.

Dann gilt: $\int_a^b g < +\infty \Rightarrow \int_a^b f < +\infty$

und damit auch umgekehrt $\int_a^b f = +\infty \Rightarrow \int_a^b g = +\infty$.

a) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Für $x > 1$ ist $\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^3+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$.

Da $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ nicht existiert,

existiert auch $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ nicht, also auch nicht $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$.

b) $\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

$x \in (0,1)$: $\left|\frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\right| \leq \left|\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right|$

$\int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = -\int_0^1 \frac{|\log x|}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$, $\int_0^1 \frac{|\log x|}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ existiert, wenn $\int_0^1 \frac{|\log x|}{\sqrt{x}}\,dx$ existiert.

$\int \frac{|\log x|}{\sqrt{x}}\,dx = -\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = -\int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{f'} \cdot \underbrace{\log x}_{g}\,dx = -2\sqrt{x}\log x + \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= -2\sqrt{x}\log x + 4\sqrt{x}$

$\int_\varepsilon^1 \frac{|\log x|}{\sqrt{x}}\,dx = \left(-2\sqrt{x}\log x + 4\sqrt{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 = 4 + 2\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon - 4\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 4$,

also existiert $\int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$.

Es ist $\frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}} \leq \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}}$ und, sofern nur x groß genug, also

für alle $x \geq R$, $\log x < x^{\frac{1}{3}}$, also

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx \leq \int_1^R \frac{\log x}{x^{3/2}}\,dx + \int_R^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$= \underbrace{\int_1^R \frac{\log x}{x^{3/2}}\,dx}_{\substack{\text{eigentliches}\\ \text{Integral} \Rightarrow \text{existiert}}} + \underbrace{\int_R^\infty x^{-\frac{7}{6}}\,dx}_{<\infty} < \infty.$$

Damit existiert also $\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$.

Aufgabe 5: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \Big|_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} . \qquad \boxtimes$$

Näherer Begründung bedarf noch das Vertauschen von Integral- und Summenzeichen bei (*).
Das ist nicht immer möglich, aber dann, wenn die Konvergenz der Reihe auf (0,1) (denn über dieses Intervall wird integriert) gleichmäßig ist (vgl. Übung 6, Aufgabe 4).
Das ist für $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ der Fall, denn bei dieser Reihe handelt es sich um eine Potenzreihe und (0,1) liegt ganz in ihrem Konvergenzintervall.