Analysis II, Globalübung 4

In dieser Globalübung geht es um die Differenzierbarkeit von Funktionen im Mehrdimensionalen.

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt a:

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + r(h), \quad A \text{ linear}, \quad \frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Wie bestimmt man nun, dass f diff'bar ist?

f ist bekannt, a ist bekannt, h ist ein Parameter, der gegen 0 läuft.

Wie kommt man auf A?

1) Wenn f in a diff'bar, folgt, dass die partiellen Ableitungen existieren und $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

Kennt man f, a, A, so ergibt sich sofort r(h) und man hat noch $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|}$ zu untersuchen.

Sehr oft nützlich ist folgender (hier verkürzt formulierter) Zusammenhang:

2) f, g diff'bar $\Rightarrow$ $f+g$, $g\cdot f$, $g\circ f$ auch diff'bar.

Außerdem gilt:

3) Für $n=1$ entspricht obige Definition genau der Definition für Differenzierbarkeit aus dem ersten Semester.
Damit sind dann also auch alle Funktionen, deren Differenzierbarkeit wir letztes Semester bewiesen haben, auch im jetzigen Sinne diff'bar.

Aufgabe 1: a) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2} - |y|$

Zu untersuchen ist diese Funktion nur für $y=0$; für alle anderen Werte ist sie aus differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt und damit selbst diff'bar (vgl. Bemerkung 2)).

Wenn eine Funktion differenzierbar ist, besitzt sie insbesondere alle Richtungsableitungen.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{x^4+t^2} - |t| - (\sqrt{x^4+0} - |0|)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{x^4+t^2} - \sqrt{x^4}}{t} - \frac{|t|}{t}$$

Nun ist aber $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{|t|}{t}$, es existiert also $\lim\limits_{t\to 0} -\frac{|t|}{t}$ nicht, während

für $x\neq 0$: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{x^4+t^2} - \sqrt{x^4}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} t\,\frac{\sqrt{x^4+t^2} - \sqrt{x^4}}{t^2} = 0$ existiert.

Damit besitzt f in $(x,0)$ keine partielle Ableitung nach y, ist dort also auch nicht diff'bar (für $x\neq 0$).

Noch zu untersuchen: $(x,y)=(0,0)$: Dort ist f diff'bar.

Denn: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2} - |t|}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^4}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = \lim\limits_{t\to 0} t = 0$, d.h.

$f(0+h_1, 0+h_2) = f(0,0) + (0\ 0)\cdot h + \sqrt{h_1^4+h_2^2} - |h_2|$

und
$$\frac{\sqrt{h_1^4+h_2^2} - |h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1^4}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\cdot\left(\sqrt{h_1^4+h_2^2}+|h_2|\right)} \leq \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \frac{|h_1|^2}{\sqrt{h_1^4+h_2^2}} \cdot |h_1| \leq |h_1| \xrightarrow{h\to(0,0)} 0.$$

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

Dann ist $Df(x,y) = \left(\frac{1}{3}(x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2,\; y^2(x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}} \right)$;
die partiellen Ableitungen existieren also und sind stetig, wenn $x^3+y^3 \neq 0$,
demnach ist in diesem Fall auch f diff'bar.
Betrachte also noch (x,y) mit $x^3 = -y^3 \Leftrightarrow y = -x$.
Wäre dort f diff'bar, müsste auch die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ existieren.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,-x) - f(x,-x)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2t+3xt^2+t^3-x^3} - \sqrt[3]{x^3-x^3}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2t+3xt^2+t^3}}{\sqrt[3]{t^3}} = \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{\frac{3x^2}{t^2} + \frac{3x}{t} + 1} = \begin{cases} +\infty, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

diese partielle Ableitung existiert also nicht und somit ist f in $(x,y) \neq (0,0)$
- differenzierbar, falls $x \neq -y$
- nicht differenzierbar, falls $x = -y$.

Zu untersuchen bleibt die Diffbarkeit in $(0,0)$:
Dort ist (s.o.) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3} - 0}{t} = 1$,

$$f(0+h_1, 0+h_2) = 0 + 1\cdot h_1 + 1\cdot h_2 + \underbrace{\left(\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3} - h_1 - h_2\right)}_{=: R(h)}.$$

Ist $0 = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{R(h)}{\|h\|}$?

$$\frac{R(h)}{\|h\|_3} = \frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3} - h_1 - h_2}{\sqrt[3]{|h_1^3| + |h_2^3|}}$$, für $(h_1,h_2) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ist das $\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt[3]{2}}$;

da dies für $n\to\infty$ immer noch ungleich 0 ist, ist also $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} \neq 0$,
also f auch in $(0,0)$ nicht diff'bar.

c) $f(x,y) = |e^x - y|\,(e^x - 1)$
Falls $e^x - y \neq 0$, handelt es sich um eine Zusammensetzung diff'barer Funktionen, also ist f diff'bar.
Für den Fall $e^x = y$ untersuche

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,e^x) = \lim_{t\to 0} \frac{|e^{x+t} - e^x|\,(e^{x+t}-1)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} e^x \cdot \frac{|e^t - 1|}{t} \cdot (e^{x+t} - 1)$$
$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{e^x(e^{x+t}-1)}_{\to (e^x-1)e^x} \cdot \underbrace{\left|\frac{e^t-1}{t}\right|}_{\to 1} \cdot \frac{|t|}{t}$$

Damit dieser Grenzwert existiert, muss

$$-1 = \lim_{t\to 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = 1$$

gelten oder $\lim_{t\to 0} (e^{x+t}-1)e^x = (e^x-1)e^x = 0$ sein, d.h. $x = 0$.
f ist also nicht diff'bar in (x,e^x) für $x \neq 0$.
Noch zu untersuchen: Diff'barkeit in $(0,1)$.

Also: $f(0+h_1, 1+h_2) = f(0,1) + (\underset{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{0} \;\; \underset{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)}{0}) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{|e^{h_1} - (h_2+1)|\,(e^{h_1} - 1)}_{R(h)}$

$\frac{R(h)}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\to} 0$?

Für $h_1 = 0$ ist $\frac{|e^{h_1} - h_2 - 1|\,(e^{h_1}-1)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{|e^{h_1} - h_2 - 1| \cdot 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$,

für $h_1 \neq 0$ gilt $\left| \frac{|e^{h_1} - h_2 - 1|\,(e^{h_1}-1)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| \leq \underbrace{|e^{h_1} - h_2 - 1|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left|\frac{e^{h_1}-1}{h_1}\right|}_{\to 1} \to 0$ für $(h_1,h_2) \to (0,0)$.

f ist also diff'bar, wenn $e^x \neq y$ oder $(x,y) = (0,1)$ und sonst nicht.

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

In $(0,0)$ ist f nicht stetig, also erst recht nicht diff'bar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{=} \lim_{r\to 0+} \frac{r^2|\cos\varphi \sin\varphi|}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0+} |\cos\varphi \sin\varphi| = \lim_{r\to 0+} \tfrac{1}{2}|\sin 2\varphi|$$

existiert nicht.

In $(0,y)$ existiert $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht:

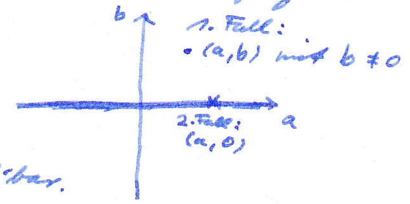
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t\cdot(t^2+y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \cdot \frac{|y|}{t^2+y^2}$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|t|}{t} \cdot \frac{|y|}{t^2+y^2} = \lim_{t\to 0+} \frac{|y|}{t^2+y^2} = \frac{1}{|y|} \neq -\frac{1}{|y|} = \lim_{t\to 0-} -\frac{|y|}{t^2+y^2} = \lim_{t\to 0-} \frac{|t|}{t} \cdot \frac{|y|}{t^2+y^2};$$

durch analoge Rechnung erkennt man, dass auch $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ nicht existiert.

f ist also entlang der Achsen nicht diff'bar,
sonst aber überall, denn f ist dort eine Zusammensetzung diff'barer Funktionen.

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|x^2y|)}{|y|} & , y \neq 0 \\ x^2 & , y = 0. \end{cases}$



1. Fall: $f(t) = |t|$ ist in jedem Punkt $t \neq 0$ diff'bar.
$\log(t)$ ist diff'bar für $t > 0$.

$$\Rightarrow f \text{ ist in } (a,b),\ b\neq 0, \text{ diff'bar.}$$

2. Fall:
Untersuchung der partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,0)-f(a,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(a+t)^2-a^2}{t} = 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,t)-f(a,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\log(1+a^2|t|)}{|t|} - a^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+a^2|t|) - a^2|t|}{|t|\cdot t} \qquad (*).$$

Wir untersuchen rechts- und linksseitigen Grenzwert, um den Betrag loszuwerden:

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\log(1+a^2t)-a^2t}{t^2} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{" de l'Hospital}}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{1+a^2t}\cdot a^2 - a^2}{2t}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{a^2\left(\frac{1}{1+a^2t} - \frac{1+a^2t}{1+a^2t}\right)}{2t} = \lim_{t\to 0+} \frac{-a^4t}{2t(1+a^2t)} = -\frac{a^4}{2}$$

$$\lim_{t\to 0-} \frac{\log(1-a^2t)+a^2t}{-t^2} \underset{\substack{\tau=-t \\ t\to 0- \\ \Rightarrow \tau\to 0+}}{=} \lim_{\tau\to 0+} -\frac{\log(1+a^2\tau)-a^2\tau}{\tau^2} = +\frac{a^4}{2}$$

$\Rightarrow$ Der Grenzwert $(*)$ existiert genau dann, wenn $a=0$.

$(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\quad r(h) = f(h) - f(0) - (0,0)\cdot\binom{h_1}{h_2} = \begin{cases} h_1^2 & , h_2 = 0 \\ \frac{\log(1+h_1^2|h_2|)}{|h_2|} & , h_2 \neq 0. \end{cases}$

$$\frac{r(h)}{\|h\|_2} = \begin{cases} \frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = |h_1| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 & , h_2 = 0 \\ \frac{\log(1+h_1^2|h_2|)}{|h_2|\cdot\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & , h_2 \neq 0 \end{cases}$$

$(*)$: $\log(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$.

$h_2 \neq 0$: $0 \leq \left|\frac{\log(1+h_1^2|h_2|)}{h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \overset{(*)}{\leq} \frac{h_1^2|h_2|}{|h_2|\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = |h_1| \cdot \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq |h_1|\cdot 1 \to 0$

alternativ: $$\frac{\log(1+h_1^2|h_2|)}{h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \underbrace{\underbrace{\frac{\log(1+h_1^2|h_2|)}{h_1^2\cdot|h_2|}}_{\to 1} \cdot \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{|h_1|}_{\to 0} \to 0.$$

Also ist f diff'bar in $(0,0)$.

Aufgabe 2: Kann $f(0,0)$ so gewählt werden, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ diff'bar wird?
Insbesondere muss dazu f in $(0,0)$ stetig sein, d.h. $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$

$f(0,0)=0$, da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right| = \lim\limits_{(x,y)\to 0} |y^3| \cdot \left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le \lim\limits_{(x,y)\to 0} |y^3| \cdot 1 = 0.$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0.$

$f(0+h_1, 0+h_2) = 0 + (0,0)\cdot h + \dfrac{h_1^2 h_2^3}{h_1^2+h_2^2}.$

$0 \le \lim\limits_{h\to 0} \left|\dfrac{h_1^2h_2^3}{h_1^2+h_2^2} \cdot \dfrac{1}{\|h\|}\right| \le \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h_2|}{\|h\|} \cdot h_2^2 \cdot \dfrac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2} \le \lim\limits_{h\to 0} 1 \cdot h_2^2 \cdot 1 = 0.$

Mit $f(0,0):=0$ wird f diff'bar in $(0,0)$ und damit auf ganz $\mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

$f(0,0) := \lim\limits_{(x,y)\to 0} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$, denn $\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le |x| \cdot \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \le |x|\cdot 1 \to 0$ für $(x,y)\to(0,0)$.

Falls f diff'bar, muss $f'(0,0) = (0,0)$ sein, denn

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{t\cdot 0}{t^2} - 0}{t} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{0\cdot t^2}{t^2} - 0}{t} = 0.$

$f(0+h_1, 0+h_2) = 0 + (0,0)\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \dfrac{h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2}$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h_1|h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \dfrac{1}{\|h\|} \stackrel{?}{=} 0$

$(h_1,h_2) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$: $\dfrac{|h_1|\,h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \dfrac{1}{\|h\|_\infty} = \dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{2} \neq 0.$

f kann in $(0,0)$ nicht diff'bar gemacht werden.

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy} = e^{xy\log(x^2+y^2)}$

Da die e-Funktion „keine Probleme bereitet", genügt es,

$\tilde f(x,y) := xy\log(x^2+y^2)$ zu untersuchen.

$\lim\limits_{(x,y)\to 0} \tilde f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2) \stackrel{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=} \lim\limits_{r\to 0^+} \cos\varphi\sin\varphi\, r^2\log(r^2) = 0.$

$\tilde f'(0,0) = (0,0)$, denn $\dfrac{\partial \tilde f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t\cdot 0\cdot\log(t^2+0)-0}{t} = 0$ und

$\dfrac{\partial \tilde f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0\cdot t\cdot \log(t^2)}{t} = 0.$

$\tilde f(h_1,h_2) = f(0,0) + (0,0)\cdot h + h_1h_2\log(h_1^2+h_2^2).$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h_1h_2\log(h_1^2+h_2^2)}{\|h\|_2} \underset{\substack{h_1=r\cos\varphi\\ h_2=r\sin\varphi}}{=} \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\,\log(r^2)}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}$

$= \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot 2r\cdot\log r}{r} = 2\cdot \lim\limits_{r\to 0^+} \underbrace{r\cdot\log r}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\le 1} = 0.$

Also ist $\tilde f$ mit $\tilde f(0,0):=0$ und damit f mit $f(0,0) = e^0 = 1$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ diff'bar.

Aufgabe 3: $f(x,y) = x \sin\sqrt{x^2+y^2}$ stetig diff'bar auf $\mathbb{R}^2$?

Um das festzustellen untersuchen wir, ob die partiellen Ableitungen dieser Funktion existieren und stetig sind.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot \sin\sqrt{x^2+y^2} + x \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x$$

$$= \sin\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0), \text{ stetig auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t \sin\sqrt{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \sin|t| = 0$$

Ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ auch in $(0,0)$ stetig?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$0 \le \left| \sin\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2} \right| \le \left|\sin\sqrt{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \cdot \left|\cos\sqrt{x^2+y^2}\right|$$

$$\le \left|\sin\sqrt{x^2+y^2}\right| + |x| \cdot \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \cdot 1 \le \left|\sin\sqrt{x^2+y^2}\right| + |x| \cdot 1 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 + 0 = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot y \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0), \text{ stetig auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0 \cdot \sin\sqrt{t^2} - 0}{t} = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \,?$$

$$0 \le \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2} \right| = |x| \cdot \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \cdot \left|\cos\sqrt{x^2+y^2}\right| \le |x| \cdot 1 \cdot 1 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

Die partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig.
Also ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig diff'bar.

Aufgabe 4: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diff'bar. $f(t,2t) = e^{5t} + 4$, $f(-2t,3t) = 5\cos(t^3)$.

a) $$D_{(1,2)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+1t, 0+2t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{5t} + 4 - (e^{5\cdot 0} + 4)}{t}$$

$$= (e^{5t} + 4)'\Big|_{t=0} = 5 \cdot e^{5\cdot 0} = 5$$

$$D_{(-2,3)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0-2t, 0+3t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{5\cos t^3 - 5\cos 0^3}{t}$$

$$= 5 \cdot (-\sin t^3) \cdot 3 \cdot t^2 \Big|_{t=0} = 0.$$

b) $f'(0,0) = ?$

Da sich Richtungsableitungen differenzierbarer Funktionen auch berechnen lassen als $D_v f(x,y) = \left\langle v, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}$, ergibt sich aus a) folgendes Gleichungssystem:

$$1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 5$$

$$-2 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

also $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{15}{7}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{10}{7}$,

d.h. $f'(0,0) = \left(\frac{15}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

Aufgabe 5: $f(x,y) = |y^2 - x^2|$

a) Für welche (x,y), $v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ existiert $D_v f(x,y)$?

1. Für $y^2 \neq x^2$ ist f diff'bar, d.h. dort existiert $D_v f(x,y)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$.
2. $y^2 = x^2$, also $y = x$ oder $y = -x$

i) $y=x$

$$D_v(x,x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, x+tv_2) - f(x,x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left| x^2 + 2xtv_1 + t^2v_1^2 - \cancel{x^2} - 2\cancel{x}tv_2 - t^2v_2^2 \right|$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|2xt(v_1-v_2) + t^2(v_1^2-v_2^2)|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \cdot |2x(v_1-v_2) + t(v_1^2-v_2^2)|$$

Damit dieser Grenzwert existiert, muss $|2x(v_1-v_2) + t(v_1^2-v_2^2)| \to 0$ für $t\to 0$ gelten, also $2x(v_1-v_2) = 0$, d.h. $x=0$ oder $v_1 = v_2$.

In $(0,0)$ existieren alle Richtungsableitungen, in (x,x) die in die Richtungen (v_1,v_1).

ii) $y = -x$

$$D_v(x,-x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, x-tv_2) - f(x,-x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left| x^2 + 2xtv_1 + t^2v_1^2 - x^2 + 2xtv_2 - t^2v_2^2 \right|$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \left| 2x(v_1+v_2) + t(v_1^2 - v_2^2) \right|,$$

existiert $\iff 2x(v_1+v_2) = 0 \iff x = 0 \lor v_1 = -v_2$.

In den Punkten $(x,-x)$ existieren die Richtungsableitungen in Richtung $(v_1, -v_1)$.

b) f ist diff'bar, wenn $y^2 \neq x^2$.

f ist nicht diffbar, wenn $y^2 = x^2$ und $x \neq 0$, denn sonst müssten dort alle Richtungsableitungen existieren.

In $(0,0)$?

$$f(0+h_1, 0+h_2) = |h_2^2 - h_1^2| = 0 + 0\cdot h + |h_1^2 + h_2^2|$$

$$0 \le \lim_{h\to 0} \frac{|h_1^2 - h_2^2|}{\|h\|_2} = \lim_{h\to 0} \frac{|h_1 + h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_1 - h_2| \le \lim_{h\to 0} \left(\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right) |h_1 - h_2|$$

$$\le \lim_{h\to 0} (1+1)\cdot |h_1 - h_2| = 2 \lim_{h\to 0} |h_1 - h_2| = 2|0-0| = 0.$$

$\Rightarrow$ f diff'bar in $(0,0)$.

Aufgabe 6: Tangentialebene an $f(x,y) = x^2 \sin(x-y) + e^{xy}$ in $a = (1,1)$.

$$f(1+h_1, 1+h_2) = f(1,1) + Df(1,1)\cdot h + R(h)$$

$$= e + (2x\sin(x-y) + x^2\cos(x-y) + ye^{xy}, -x^2\cos y + xe^{xy})\Big|_{(1,1)} \cdot h + R(h)$$

$$= e + (2\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1, -1\cdot 1 + 1\cdot 1)\cdot \binom{h_1}{h_2} + R(h)$$

$$= \underbrace{e + (2,0)\cdot \binom{h_1}{h_2}}_{\text{Tangentialebene}} + \underbrace{R(h)}_{\text{Rest, „Fehler"}}$$

Ebene also: $T(1+h_1, 1+h_2) = e + 2h_1$

oder

$$T(x,y) = e + 2(x-1) = 2x + e - 2.$$