Analysis II, Globalübung 5

Aufgabe 1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar.

$g(s,t) = f(st, s-2t)$. $\quad Df(1,-1) = (2,3)$, $D^2f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}(1,1) = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} g\right)(1,1) = ?$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overbrace{st}^{x}, \overbrace{s-2t}^{y})\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot s + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot(-2)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial s}{\partial s} + s\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(st, s-2t)\right) - 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot 1 + s\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\cdot 1\right) - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,-1) - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)\right)$$
$$= 2 + 2 - 1 - 2(-1 + 1)$$
$$= 3$$

b) Gibt es eine auf $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff'bare Funktion f mit

$Df(1,-1) = (2,3)$ $\quad D^2f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Wir konstruieren ein solches f als Polynom aus seiner Entwicklung um den Punkt $(1,-1)$:

$$f(1+h_1, -1+h_2) = f(1,-1) + Df(1,-1)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^2}$$
$$= f(1,-1) + (2,3)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2h_1 - h_2 \\ -h_1 + h_2 \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^2}$$
$$= f(1,-1) + 2h_1 + 3h_2 + \frac{1}{2}(2h_1^2 - h_1 h_2 - h_2 h_1 + h_2^2)$$
$$= f(1,-1) + 2h_1 + 3h_2 + h_1^2 - h_1 h_2 + \frac{1}{2}h_2^2,$$

bzw. mit $x = 1 + h_1$, $y = -1 + h_2$:

$$f(x,y) = f(1,-1) + 2(x-1) + 3(y+1) + (x-1)^2 - (x-1)(y+1) + \frac{1}{2}(y+1)^2$$
$$= f(1,-1) + 2x - 2 + 3y + 3 + x^2 - 2x + 1 - xy - x + y + 1 + \frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{2}$$
$$= f(1,-1) + \frac{7}{2} - x + 5y - xy + x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Aufgabe 2: $A = \{(x,y) : x>0 \text{ und } y>0\}$, $f: A \to \mathbb{R}$ diff'bar.

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in A.$$

z.z.: $f(x,y) = \varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$.

Damit es eine solche Funktion φ gibt, muss f bei gleichen $\frac{x}{y}^2$ auch jeweils denselben Wert annehmen (sonst wäre φ nicht wohldefiniert), d.h. f muss konstant sein entlang einer Kurve $\frac{x^2}{y} = c \iff y = \frac{1}{c}x^2$.

Wir wollen also zeigen, dass die Funktion $g_c(x) := f(x, \frac{1}{c} \cdot x^2)$ konstant, also ihre Ableitung gleich 0 ist.

$$g_c'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tfrac{1}{c}x^2) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tfrac{1}{c}x^2) \cdot \tfrac{1}{c} \cdot 2 \cdot x$$

$$\Rightarrow x g_c'(x) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{x^2}{c} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$= x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \overset{\text{Voraussetzung}}{=} 0$$

$\Rightarrow g_c'(x) = 0$

$\Rightarrow g_c(x) = \text{const} = \varphi$

$g_c(x) = f(x, \frac{1}{c}x^2) = \varphi(c) = \varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$.

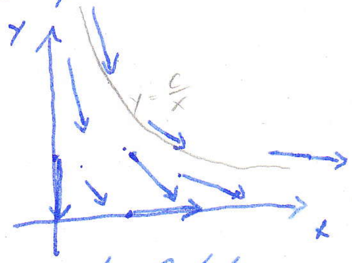
Aufgabe 3: a) Gesucht: Alle diff'baren Funktionen $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \text{für alle } x,y>0 \quad (*) \\ f(x,x) = \sin x \end{cases}$$

Formt man $(*)$ um, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = D_{(x,-y)} f(x,y). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist also konstant entlang solcher Kurven, die im Punkt (x,y) in Richtung $(x,-y)$ verlaufen:



Die Zeichnung legt nahe, dass es sich dabei um Kurven der Form $y=\frac{c}{x}$ handeln könnte.
Dann müsste sich f darstellen lassen durch eine Funktion φ von einem Argument (ähnlich wie in der letzten Aufgabe): $f(x,y) = \varphi(x\cdot y)$.

Zeige dazu: $g_c(x) := f(x, \frac{c}{x})$ ist konstant.

$$\begin{aligned} g_c'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\tfrac{c}{x})\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\tfrac{c}{x})\left(-\frac{c}{x^2}\right) \\ \Rightarrow x\,g_c'(x) &= x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{c}{x}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &= x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \Rightarrow g_c'(x) = 0 &\Rightarrow g_c(x) = \text{const} =: \varphi(c) = \varphi(xy) \end{aligned}$$

Es soll gelten: $\sin(x) = f(x,x) = \varphi(x^2)$ $\quad (u := x^2)$

$$\Rightarrow \varphi(u) = \sin\sqrt{u}$$
$$\Rightarrow f(x,y) = \varphi(x\cdot y) = \sin\sqrt{xy}.$$

b) Gibt es eine stetig diff'bare Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die diese Eigenschaften besitzt?
Damit f diff'bar wird, muss f insbesondere stetig sein, also

$$f(0,b) = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \sin\sqrt{xy} = 0, \quad f(a,0) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \sin\sqrt{xy} = 0.$$

Um zu zeigen, dass f nicht diff'bar ist, betrachten wir verschiedene Richtungsableitungen in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$D_{(1,1)} f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

Wäre f in $(0,0)$ diff'bar, müsste $D_{(1,1)} f(0,0) = 1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + 1\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, also $1 = 0+0$ gelten.

Anmerkung zu Aufgabe 3a):

Selbstverständlich kann man die Form der Kurven, die konstante Werte von f beschreiben, auch durch Rechnung gewinnen, statt sie aus der Skizze zu erraten:

In (x,y) sollen sie in Richtung $(x,-y)$ verlaufen, also die Tangentensteigung $\frac{-y}{x}$ besitzen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \cdot dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \log y = -\log x + \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{\text{const}} \cdot x^{-1} =: \frac{c}{x} .$$

Aufgabe 4: Das Gleichungssystem $\begin{cases} x+y=u & (1) \\ x^5-y^3=v & (2) \end{cases}$

besitzt für alle $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$.

$(1) \Rightarrow \quad y=u-x$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} x^5-(u-x)^3=v \Rightarrow 0=x^5-(u-x)^3-v=:g(x).$

Zu zeigen ist: g besitzt (für festes u,v) genau eine Nullstelle.
Diese ist dann gleich $x(u,v)$ und legt mittels (1) auch $y(u,v)$ eindeutig fest.

i) g hat eine Nullstelle

Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Da g stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass g eine Nullstelle hat.

ii) g hat keine weitere Nullstelle

Dazu: g wächst ~~streng~~ monoton:

$$g'(x)=5x^4-3(u-x)^2\cdot(-1)>0.$$

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

x und y sind auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ diff'bar.
Zum Beweis verwenden wir folgenden Satz:
Seien $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f: A\to B$ bijektiv und stetig diff'bar.
f^{-1} ist dann stetig diff'bar, wenn $\det Df(x)\neq 0 \;\; \forall x\in A$.

$f(x,y)=\begin{pmatrix} x+y \\ x^5-y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix} \qquad f^{-1}(u,v)=(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ bijektiv (1. Teil der Aufgabe),

$\det Df(x,y)=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5x^4 & -3y^2\end{pmatrix}=-3y^2-5x^4 \neq 0$ für $(x,y)\neq(0,0)$,
d.h. $(u,v)\neq(0,0)$.

$$Df^{-1}(x,y)=\left[Df(x,y)\right]^{-1}=\frac{1}{-3y^2-5x^4}\begin{pmatrix} -3y^2 & -1 \\ -5x^4 & 1\end{pmatrix}$$

$Dx(2,0)=?\quad Dy(2,0)=?$

$\begin{pmatrix} 2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1\\ 1^5-1^3\end{pmatrix}=f(1,1)$

$$Df^{-1}(1,1)=\frac{1}{-8}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

$Dx(2,0)=\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$

$Dy(2,0)=\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right)$