Analysis II, Globalübung 6

Aufgabe 1: Gesucht ist das Taylorpolynom vom Grad 3 der Funktion $f(x,y) = \sin(x+y)$ an der Stelle $(0,\pi)$.

Taylorpolynome vom Grad k haben die Form

$$T_k f(h) = f(x) + Df(x)\cdot h + \frac{1}{2!} D^2 f(x)\cdot h^2 + \frac{1}{3!} D^3 f(x)\cdot h^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot D^k f(x)\cdot h^k.$$

Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist dabei

$$\underbrace{\underbrace{Df(x)}_{\in\mathbb{R}^n}\cdot \underbrace{h}_{\in\mathbb{R}^n}}_{\in\mathbb{R}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot h_i$$

$$D^2 f(x)\cdot h^2 = h\cdot D^2 f(x)\cdot h = (h_1 \ldots h_n)\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & & & \vdots \\ \vdots & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot h_i h_j$$

$$D^3 f(x)\cdot h^3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x)\cdot h_i\cdot h_j\cdot h_k.$$

$\vdots$

Hier ist $f(x,y) = \sin(x+y)$, also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\sin(x+y)$$

Während hier „nur zufällig" $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ gilt, ist die Gleichheit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ für jede [oft genug diff'bare] Funktion erfüllt (Satz von Schwarz).

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -\cos(x+y).$$

Mit $(x,y) = (0,\pi)$ ist $\sin(x+y) = 0$ und $\cos(x+y) = -1$, als Taylorpolynom ergibt sich also

$$T_3 f(h) = 0 + (-1)\cdot h_1 + (-1)\cdot h_2 + \frac{1}{2}\left(0\cdot h_1^2 + 2\cdot 0\cdot h_1 h_2 + 0\cdot h_2^2\right) + \frac{1}{6}\left(1\cdot h_1^3 + 3\cdot 1\cdot h_1^2 h_2 + 3\cdot 1\cdot h_1 h_2^2 + 1\cdot h_2^3\right)$$

$$= -h_1 - h_2 + \frac{1}{6} h_1^3 + \frac{1}{2} h_1^2 h_2 + \frac{1}{2} h_1 h_2^2 + h_2^3$$

Aufgabe 2: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)+e^{x-y}}{x^2+y^2} = 2$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = ?$

Wir betrachten zunächst einen einfacheren Fall:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Falls $g(x,y) = g(0,0) + A\cdot\binom{x}{y} + \frac{1}{2}(x,y)\cdot B\cdot\binom{x}{y} + r(x,y)$ und $\frac{r(x,y)}{x^2+y^2} \to 0$ für $(x,y)\to(0,0)$, so folgt $A = Dg(0,0)$, $B = D^2 g(0,0)$ (Übung 12, Hausaufgabe 3(b))

$g(x,y) = \frac{g(x,y)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2) \longrightarrow 0\cdot 0 = 0$ für $(x,y)\to(0,0)$, also $g(0,0)=0$ (Stetigkeit)

$$g(x,y) = g(0,0) + 0\cdot\binom{x}{y} + \frac{1}{2}\cdot(x,y)\cdot 0\cdot\binom{x}{y} + \underbrace{g(x,y)}_{=:\, r(x,y)}$$

Da $\frac{r(x,y)}{x^2+y^2} = \frac{g(x,y)}{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$, folgt hier $Dg(0,0) = (0,0)$, $D^2 g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die partiellen ersten und zweiten Ableitungen lassen sich sofort ablesen.

Sei nun

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{x^2+y^2} = 2,$$

also

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0.$$

$$g(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2) = 2\cdot 0 = 0.$$

$$g(x,y) = 0 + 0 + 2x^2+2y^2 + g(x,y) - 2(x^2+y^2)$$

$$= g(0,0) + (0,0)\cdot\binom{x}{y} + \frac{1}{2}\cdot(x,y)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\binom{x}{y} + \underbrace{g(x,y) - 2(x^2+y^2)}_{=:\, r(x,y)}$$

$\frac{r(x,y)}{x^2+y^2} \longrightarrow 0$ für $(x,y)\to(0,0)$, also $Dg(0,0) = (0,0)$; $D^2 g(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Setzen wir nun in der eigentlichen Aufgabe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)+e^{x-y}}{x^2+y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = ?$$

$g(x,y) := f(x,y) + e^{x-y}$, so wissen wir aus obiger Rechnung $D^2 g(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, also $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$.

$$f(x,y) = g(x,y) - e^{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + e^{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) + e^{x-y}$$ und damit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0 + e^{0-0} = \underline{\underline{1}}.$$

Aufgabe 3: Gesucht sind alle lokalen Extrema der Funktion f.
Dazu bestimmen wir zunächst alle kritischen Punkte
$[(x,y) \text{ kritischer Punkt} \Leftrightarrow Df(x,y) = (0,0)]$
und untersuchen dann, ob es sich um Minimum, Maximum oder Sattelpunkt (also kein Extremum) handelt.

a) $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}(x^2+2y^2-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \frac{2x(1+x^2)-(x^2+2y^2-1)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 4xy\frac{1-y^2}{(1+x^2)^2} \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee y \in \{-1,0,1\}$$

Aus
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}(x^2+6y^2-1) \overset{!}{=} 0$$
erhalten wir nun für
$x=0$: $6y^2-1=0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt6}$
$y=\pm1$: $x^2=-5 \Rightarrow$ keine weiteren Punkte
$y=0$: $x=\pm1$,

kritische Punkte sind also $(0,\frac{1}{\sqrt6}), (0,-\frac{1}{\sqrt6}), (1,0), (-1,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y(1-y^2)\frac{1\cdot(1+x^2)^2 - x\cdot 2x\cdot 2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = 4y(1-y^2)\cdot\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3}$$
$$= \frac{4y(1-y^2)(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\cdot(1-3y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{12y}{1+x^2}$$

$D^2f(0,\frac{1}{\sqrt6}) = \begin{pmatrix} \frac{20}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt6} & 0 \\ 0 & 2\sqrt6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ lokales Minimum in $(0,\frac{1}{\sqrt6})$,
denn $\det(\frac{20}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt6}) > 0$, $\det\begin{pmatrix} \frac{20}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt6} & 0 \\ 0 & 2\sqrt6 \end{pmatrix} > 0$.

$D^2f(0,\frac{1}{\sqrt6}) = \begin{pmatrix} -\frac{20}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt6} & 0 \\ 0 & -2\sqrt6 \end{pmatrix} = -D^2f(0,\frac{1}{\sqrt6}) \Rightarrow$ lokales Maximum in $(0,-\frac{1}{\sqrt6})$.

$D^2f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Hier ist die zugehörige quadratische Form xy, die sowohl positives als auch negatives Vorzeichen annehmen kann.
$\Rightarrow$ Sattelpunkt in $(1,0)$.

$D^2f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ Sattelpunkt in $(-1,0)$.

b)

$$f(x,y) = 3\log(1+x^2+y^2) - 2xy$$

$$Df(x,y) = \left(\frac{3\cdot 2x}{1+x^2+y^2} - 2y,\ \frac{3\cdot 2y}{1+x^2+y^2} - 2x\right) \stackrel{!}{=} (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x}{1+x^2+y^2} = 2y \quad (1) \quad \wedge \quad \frac{6y}{1+x^2+y^2} = 2x \quad (2).$$

Da $1+x^2+y^2 \geq 1$, muss also nach (1) $|2y| = \frac{|6x|}{1+x^2+y^2} \geq |6x|$

und wegen (2) $|2x| \geq |6y|$ gelten, also

$6|x| \leq 2|y| \leq 6|y| \leq 2|x|$,

das heißt $6 \leq 2$ oder $|x| \leq 0$ und damit $x = 0$.

Demzufolge ist $x=0$ und $y \stackrel{(1)}{=} \frac{3x}{1+x^2+y^2} = \frac{3\cdot 0}{1+y^2} = 0$;

der einzige kritische Punkt der Funktion ist $(x,y) = (0,0)$

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{6(1+x^2+y^2) - 6x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{6x\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} - 2 \\ \frac{6y\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} - 2 & \frac{6(1+x^2+y^2) - 6y\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(6) = 6 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 6\cdot 6 - (-2)\cdot(-2) = 32 > 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist Minimalstelle.

Aufgabe 4: Für welche $a \in \mathbb{R}$ nimmt $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+a(xy+yz+zx)$ in $(0,0,0)$ ein Extremum an?

$Df(x,y,z) = (2x+ay+az\,,\ ax+2y+az,\ ax+ay+2z)$

$Df(0,0,0) = (0,0,0)$.

Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $(0,0,0)$ kritischer Punkt. Aber Extrempunkt?

$$D^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix} = D^2f(0,0,0).$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $2-a$ und $2+2a$, denn

$$\dim \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix} - (2-a)\cdot \mathbb{1}\right) = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

und

$$\dim \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix} - (2+2a)\cdot \mathbb{1}\right) = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

[für $a \neq 0$. Für $a=0$ besitzt sie nur den Eigenwert 2.]

Falls also $a \in (-1,2)$, besitzt die Matrix nur positive Eigenwerte, ist die zugehörige quadratische Form positiv definit und somit $(0,0,0)$ Minimalstelle.

Falls $a < -1$ oder $a > 2$, ist einer der Eigenwerte negativ, einer positiv und die quadratische Form damit indefinit.

Für $a=2$ ist

$$f(x,y,z) = x^2+2xy+y^2+2z(x+y)+z^2 = (x+y+z)^2 > 0 \quad (\text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0)),$$

also auch in diesem Fall $(0,0,0)$ Extrempunkt (Minimum);

für $a=-1$

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 2xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}(y^2-2yz+z^2) + \tfrac{1}{2}(z^2-2xz+x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right) \geq 0$$

f nimmt in $(0,0,0)$ genau dann ein Extremum an, wenn $a \in [-1,2]$.

Aufgabe 5: Nimmt $f(x,y,z) = 2x(x+y-z) + \sin(y^2+z^2)$ in $(0,0,0)$ ein lokales Extremum an?

$$Df(x,y,z) = \left(2(x+y-z)+2x,\ 2x+2y\cos(y^2+z^2),\ -2x+2z\cos(y^2+z^2)\right)$$

$$Df(0,0,0) = (0,0,0)$$

$$D^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -4y^2\sin(y^2+z^2)+2\cos(y^2+z^2) & -4yz\sin(y^2+z^2) \\ -2 & -4yz\sin(y^2+z^2) & -4z^2\sin(y^2+z^2)+2\cos(y^2+z^2) \end{pmatrix}$$

$$D^2f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat das charakteristische Polynom

$$\begin{vmatrix} x-4 & -2 & 2 \\ -2 & x-2 & 0 \\ 2 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & x-2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (x-2)\begin{vmatrix} x-4 & -2 \\ -2 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(x-2) + (x-2)\left((x-4)(x-2)-4\right)$$
$$= (x-2)\cdot(-4 + x^2 - 6x + 8 - 4)$$
$$= (x-2)\cdot(x^2-6x) \qquad = x(x-2)(x-6),$$

also die Eigenwerte 6, 2 und 0, die zugehörige quadratische Form ist demnach positiv semidefinit

$\Rightarrow$ f kann in $(0,0,0)$ Minimum oder Sattelpunkt haben.

Tatsächlich liegt hier ein Sattelpunkt vor:
Für kleine x ist $f(x,-x,x) < 0$.

$$f(x,-x,x) = 2x(x-x-x) + \sin(x^2+x^2)$$
$$= -2x^2 + 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + \frac{(2x^2)^5}{5!} + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= -\frac{8}{6}x^6 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nun ist aber $\left|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \le \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(2x^2)^k}{k!}$

$$\le (2x^2)^5 \cdot \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(2x^2)^{n-5}}{n!}$$
$$\le 2^5 x^{10} \cdot \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(2x^2)^{n-5}}{(n-5)!}$$
$$\le 32x^{10} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2x^2)^m}{m!} = 32x^{10} \cdot e^{2x^2},$$

was für betraglich kleine x so klein ist, dass es verglichen mit x^6 nicht ins Gewicht fällt.
Damit ist $f(x,-x,x) < 0$ für kleine x, insbesondere gibt es in jeder Umgebung von $(0,0,0)$ einen Punkt mit kleinerem Funktionswert als $0 = f(0,0,0)$ und damit hat f in $(0,0,0)$ kein Minimum und demzufolge einen Sattelpunkt.