Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

26.4.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Globalübung 2

Aufgabe 1.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Falls ja, bestimmen Sie sie.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+xy+y^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-xy+y^2}$.

Aufgabe 2.
Für welche reellen Zahlen p existieren die folgenden Grenzwerte?

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^4+y^4)^p}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^p}$.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass der Grenzwert $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ nicht existiert, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right).$$

existieren.

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass der Grenzwert $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ existiert, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right).$$

nicht existieren.

Aufgabe 5.
Welche Funktionen f sind auf dem Intervall $[0,2]$ Riemann-integrierbar?

(a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{für } 0\le x<1, \\ x-2 & \text{für } 1\le x\le 2, \end{cases}$ (b) $f(x)=x+[x]$,

(c) $f(x)=\begin{cases} x+[x] & \text{für } x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x\notin\mathbb{Q}, \end{cases}$ (d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{[1/x]} & \text{für } 0<x\le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$