Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

7.6.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Globalübung 3

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}\,dx\,,$ (d) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx\,,$

(e) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx\,,$ (f) $\displaystyle\int \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx\,,$ (g) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx\,,$ (h) $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,dx\,,$

(i) $\displaystyle\int x\log(1+x)\,dx\,.$

Aufgabe 2.
Beweisen Sie die folgenden Formeln:

(a) $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx\,,$

(b) $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx\,.$

Aufgabe 3.
(a) Beweisen Sie, dass

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}x\,dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}x\,dx \le \left(1+\frac{1}{2n}\right)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}x\,dx\,.$$

(b) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}\,.$$

(c) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!\cdot\sqrt{n}}\,.$$

Aufgabe 4.
Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx\,.$

Aufgabe 5.
Beweisen Sie, dass $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot(2n+1)}=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\,.$