Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

28.6.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Globalübung 5

Aufgabe 1.
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Sei $g(s,t)=f(st,s-2t)$. Angenommen

$$(1)\qquad Df(1,-1)=(2,3) \quad \text{und} \quad D^2f(1,-1)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial s\partial t}(1,1)$.

(b) Gibt es eine auf $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f, die Gleichheiten (1) erfüllt?

Aufgabe 2.
Seien $A=\{(x,y) : x>0 \text{ und } y>0\}$ und $f:A\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \quad \text{für alle } (x,y)\in A.$$

Beweisen Sie, dass $f(x,y)=\varphi(x^2/y)$, wobei φ eine Funktion einer Variable ist.

Aufgabe 3.
(a) Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit

$$(2)\qquad \begin{cases} x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \text{für alle } x,y>0 \\ f(x,x)=\sin x \end{cases}$$

(b) Gibt es eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die Gleichheiten (2) für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ erfüllt?

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass für alle Punkte $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ das folgende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $x:=x(u,v)$, $y:=y(u,v)$ besizt.

$$\begin{cases} x+y=u \\ x^5-y^3=v \end{cases}$$

Beweisen Sie auch, dass die Funktionen x und y auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ differenzierbar sind und bestimmen Sie $Dx(2,0)$, $Dy(2,0)$.