1 Hausübungen

A. 1:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx} + 1}$$

Da $\frac{1}{e^{nx}+1} < \frac{1}{e^{nx}}$ für $x > 0$ gilt und da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}} < +\infty$ (Wurzelkriterium) für $x > 0$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}+1}$ für alle $x > 0$.

Sei $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}+1}$, $\quad f_n'(x) = \frac{-ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2} \quad$ (für $x > 0$).

Dann ist $|f_n'(x)| = \frac{ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2} \leq \frac{ne^{nx}}{e^{2nx}} = \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{e^{na}}$ für alle $x \in [a, \infty)$ mit $a > 0$.

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{na}}$, also folgt aus dem Weierstraß-Kriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig auf $[a, \infty)$ – für alle $a > 0$ – konvergiert. Daraus folgt, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist.

A. 2: (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)e^{-x} = (1+x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right) x^n. \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n \end{aligned}$$

<u>Alternative Methode:</u>
Letzteres entspricht auch der Lösung derer die die Taylorreihenentwicklung benutzen: Ein Leichtes ist es per Induktion zu zeigen, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x - (n-1)) e^{-x}$$

Für ξ zwischen 0 und x gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} \left. \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right|_{x=0} \cdot x^n + R_N(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left. \frac{(-1)^n (x-(n-1)) e^{-x}}{n!} \right|_{x=0} \cdot x^n + R_N(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (-(n-1))}{n!} \cdot x^n + R_N(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n + R_N(x) \end{aligned}$$

mit $R_N(x) = \dfrac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \cdot x^{N+1} = \dfrac{(-1)^{N+1}(\xi - N)\mathrm{e}^{-\xi}}{(N+1)!} \cdot x^{N+1}$
Da $|R_N(x)| = \mathrm{e}^{-\xi} x \cdot \frac{|\xi - N|}{N+1} \cdot \frac{|x|^N}{N!} \to \mathrm{e}^{-\xi} \cdot x \cdot 0 \cdot 1 \to 0$ für $N \to \infty$, folgt :

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n$$

(b)

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}. \quad \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n \text{ (Aufg.2(a))}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x-2}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n$$

Also: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)(x-2)^n.$

<u>Alternative Methode:</u> Analog mit der Taylorentwicklung für ξ zwischen x und 2 :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+1}}\right)$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+1}}\right)}{n!}\Bigg|_{x=2} (x-2)^n + R_N(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-2)^n + R_N(x)$$
$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-2)^{N+1} = \frac{(-1)^{N+1}(N+1)! \left(\frac{1}{(\xi-1)^{N+2}} - \frac{1}{\xi^{N+2}}\right)}{(N+1)!}(x-2)^{N+1}$$
$$|R_N(x)| = \left| \frac{1}{(\xi-1)} \left(\frac{x-2}{\xi-1}\right)^{N+1} - \frac{1}{\xi}\left(\frac{x-2}{\xi}\right)^{N+1} \right|$$

Hier ergibt sich eine Schwierigkeit:
Aufgrund der Definitionslücken gilt: $|x-2| < 1 \Rightarrow \xi \in (1,3)$. Für $x > 2$ -also $\xi \in (2,x)$- konvergiert $|R_N(x)|$ gegen 0, da $|x-2| < 1$ und $(\xi - 1) > 1$. Dies gilt aber nicht für $x < 2$ (!).
Für x> 2 ergibt sich also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-2)^n.$$

A. 3: Differenzieren von Potenzreihen

Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden. Am Rand des Konvergenzkreises kann sich dabei allerdings das Konvergenzverhalten ändern. Das werden Sie in dieser Aufgabe sehen.

a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe konvergiert!
b) Differenzieren Sie die Potenzreihe aus a)! Ermitteln Sie für die neue Potenzreihe wieder den Konvergenzradius und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie konvergiert!
c) Differenzieren Sie nun die in b) erhaltene Potenzreihe noch einmal! Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die entstehende Potenzreihe konvergent? Mit welcher reellen Funktion stimmt sie innerhalb des Konvergenzkreises überein?

Musterlösung

a) Den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ kann man berechnen, indem man zunächst $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}} = 1$ berechnet. Daraus folgt insbesondere, dass

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}} = 1.$$

Der Konvergenzradius ist also $R = \frac{1}{1} = 1$. Für $|x| < 1$ konvergiert die Potenzreihe demnach jedenfalls, für den Rand des Konvergenzkreises müssen wir das noch nachprüfen: Für $x = 1$ haben wir die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ vor uns, die sich folgendermaßen abschätzen lässt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Für $x = 1$ ergibt sich also Konvergenz. Ebenso für $x = -1$, was die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$ liefert. Das lässt sich leicht mittels Leibniz-Kriterium nachweisen.

b) Gliedweises Differenzieren der Potenzreihe aus a) liefert: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Durch das Differenzieren ändert sich der Konvergenzradius nicht (Satz auf Seite 147 der Vorlesung), sehr wohl kann sich aber das Konvergenzverhalten am Rand des Konvergenzkreises ändern. Für $x = -1$ bleibt die Konvergenz erhalten (hier hilft wieder das Leibnizkriterium für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$). Für $x = 1$ erhalten wir aber die harmonische Reihe, die bekannterweise divergiert.

c) Nochmaliges gliedweises Differenzieren liefert $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Wieder bleibt der Konvergenzradius unverändert, allerdings divergiert die Reihe diesmal sowohl für $x = 1$ als auch für $x = -1$, wie man sich leicht überlegt (schreiben Sie einfach die ersten paar Partialsummen der entsprechenden Reihen auf)!
Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ stimmt für $|x| < 1$ mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ überein, was aus der Summenformel für die geometrische Reihe folgt.