10 Hausübungen

A. 1: (a) $\begin{cases} x^2y - y^3 = s \\ y^3 + 2x^2y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = s + t \\ 3y^3 = t - 2s \end{cases}$

Aus der zweiten Gleichung bekommen wir eine eindeutige Lösung: $y = \sqrt[3]{\frac{t-2s}{3}}$. Mit dieser Lösung bekommen wir höchstens eine positiveLösung x aus der ersten Gleichung. Daraus folgt, dass f injektiv ist.
Um x ausrechnen zu können, muss gelten: $(s + t)(t - 2s) > 0$, also

$$\begin{cases} s + t > 0 \\ t - 2s > 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} s + t < 0 \\ t - 2s < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Daraus folgt $B = \{(s, t) | (1) \text{ gilt } \}$.

(b)

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2xy & x^2 - 3y^2 \\ 4xy & 3y^2 + 2x^2 \end{pmatrix} =$$
$$= 2xy(3y^2 + 2x^2) - 4xy(x^2 - 3y^2) =$$
$$= 2xy(3y^2 + 2x^2 - 2x^2 + 6y^2) = 18xy^3 \neq 0.$$

Da $f : A \to B$ eine Bijektion ist, ist $f^{-1} : B \to A$ stetig differenzierbar und $Df^{-1}(s, t) = (Df(x, y))^{-1}$ für $x = x(s, t), y = y(s, t)$.
Für $(s, t) = (0, 3)$ bekommen wir $(x, y) = (1, 1)$.

$$Df^{-1}(0, 3) = (Df(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

A. 2: (a) $x = s - y^5 \Rightarrow (s - y^5)^3 - y^3 = t$. Sei $f(y) = (s - y^5)^3 - y^3$.
$f'(y) = 3(s - y^5)^2 \cdot (-5y^4) - 3y^2 \leq 0$ und $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
Daraus folgt, dass f monoton-fallend ist und - analog wie oben- $f(y) = t$ hat genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}$.
Damit rechnen wir $x = s - y^5$ in eindeutiger Weise aus.

(b) Sei $f(x, y) = (x + y^5, x^3 - y^3)$. Dann ist

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5y^4 \\ 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix} = -3y^2 - 15x^2y^4.$$

$\det Df(x, y) = 0 \Leftrightarrow 3y^2(1 + 5x^2y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
Außerdem wird die Gerade $y = 0$ auf die Kurve $t = s^3$ abgebildet. Also ist $f : \mathbb{R}^2 \backslash A \to \mathbb{R}^2 \backslash B$ mit $A = \{(x, y) | y = 0\}, B = \{(s, t) | t = s^3\}$ eine Bijektion und $\det Df(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \notin A$.
Daraus folgt, dass $f^{-1}(s, t) = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2 \backslash B$ stetig differenzierbar ist und $Df^{-1}(s, t) = (Df(x, y))^{-1}$ für $x = x(s, t), y = y(s, t)$.
Für $(s, t) = (1, 9)$ bekommen wir $(x, y) = (2, -1)$. Also ist

$$\begin{pmatrix} x'(1, 9) \\ y'(1, 9) \end{pmatrix} = Df^{-1}(1, 9) = (Df(2, -1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{63} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$$

A. 3: Nein! Man nehme eine in nicht-injektive Funktion die jeden Wert aus dem Bild mit Ausnahme der 0 min. zweimal annimmt:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & 1 > x \geq 0 \\ -g(-x) & 0 > x > -1 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{2^8}{9}x^4 + \frac{2^9}{9}x^3 + \frac{352}{9}x^2 + \frac{32}{3}x$$

Dann hat die Gleichung $f(x) = y$ $(-1 < x < 1)$ nur für $y = 0$ eine eindeutige Lösung!