11 Hausübungen

A. 1: Sei $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{3} x_i^2}$

Nun werden wir folgende 2 Ableitungen brauchen:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{x_i} = \frac{2x_i}{\sqrt{\sum_{i=0}^{3} x_i^2}} = \frac{x_i}{r}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r} + x_i \frac{(-1)\cdot \frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}$$

Nun können wir die gesuchten Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f(r)}{\partial x_i} = f_{x_i}(r) = f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\cdot\frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f'(r)\cdot\frac{x_i}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(f'(r)\big)\cdot\frac{x_i}{r} + f'(r)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} = f''(r)\cdot\frac{x_i}{r}\cdot\frac{x_i}{r} + f'(r)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

$$= f''(r)\cdot\frac{x_i^2}{r^2} + f'(r)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3} f''(r)\cdot\frac{x_i^2}{r^2} + f'(r)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right) = f''(r)\cdot\frac{r^2}{r^2} + f'(r)\cdot\left(\frac{3}{r}-\frac{r^2}{r^3}\right)$$

$$= f''(r) + f'(r)\cdot\frac{2}{r}$$

A. 2: (a) $f_x(x,y) = y\sin\sqrt{x^2+y^2} + xy\cdot\cos\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für $(x,y)\neq(0,0)$

$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$

Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$: In $(x,y)\neq(0,0)$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig. In $(x,y)=(0,0)$ gilt:

$$\left|f_x(x,y)-f_x(0,0)\right|$$

$$\leq |y|\cdot|\sin\sqrt{x^2+y^2}| + |\cos\sqrt{x^2+y^2}|\cdot\frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y| + \frac{|y|(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= |y| + |y|\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad (x,y)\to(0,0)$$

(b)

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin|t|}{t} = 0$$

Analog betrachtet man auch f_y und f_{yx}

A. 3: Aufgabe

Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = xyz$. Seien $a=(1,1,1)$ und $b=(2,1,3)$.

a) Wie kann man mit Hilfe eines Satzes aus der VO sofort begründen, dass es einen Punkt c auf der Verbindungsstrecke von a nach b geben muss mit $f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$?

b) Finden Sie einen solchen Punkt c!

c) Gibt es so einen Punkt c auch für die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ mit $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ x^2z \end{pmatrix}$ (Punkte a, b wie oben)? Welche Konsequenz hat das für den in a) verwendeten Satz?

Musterlösung:

a) Nachdem f reellwertig und differenzierbar ist und die Verbindungsstrecke von a nach b ganz im Definitionsbereich von f enthalten ist, können wir den Mittelwertsatz auf Seite 92 anwenden. Demnach muss es einen solchen Punkt c geben.

b) Wir berechnen: $b - a = (1, 0, 2)$ und $f(b) - f(a) = 6 - 1 = 5$. Wir suchen nun einen Punkt c mit $c = a + t \cdot (b - a) = (1 + t, 1, 1 + 2t)$ (wobei $t \in (0, 1)$), für den gilt:

$$5 = f'(c) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dazu berechnen wir zunächst $f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}$ und setzen $c = (1 + t, 1, 1 + 2t)$ ein:

$$f'(c) = \begin{pmatrix} 1 \cdot (1 + 2t) & (1 + t)(1 + 2t) & (1 + t) \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Oben Einsetzen ergibt:

$$5 = \begin{pmatrix} (1 + 2t) & (1 + t)(1 + 2t) & (1 + t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 4t$$

und damit $t = \frac{1}{2}$. Unser gesuchter Punkt ist also $c = (\frac{3}{2}, 1, 2)$.

c) Wir berechnen zuerst wieder $f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$. Wir suchen nun einen Punkt c mit $c = a + t \cdot (b - a) = (1 + t, 1, 1 + 2t)$ (wobei $t \in (0, 1)$), für den gilt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = f'(c) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$. Wir setzen $c = (1 + t, 1, 1 + 2t)$ ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t + 2 + 2t \\ 2(1 + t)(1 + 2t) + 2(1 + t)^2 \end{pmatrix}$$

Aus der oberen Zeile erhalten wir wie in b) das Ergebnis $t = \frac{1}{2}$. Allerdings erfüllt $t = \frac{1}{2}$ **nicht** die Gleichung in der unteren Zeile (Einsetzen)!!!

Fazit: Es gäbe zwar sowohl für die erste Komponentenfunktion $f_1(x, y)$ einen passenden Punkt c_1 als auch für die zweite Komponentenfunktion $f_2(x, y)$ einen passenden Punkt c_2 (beide erfüllen für sich genommen ja die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes), allerdings müssen diese beide Punkte nicht übereinstimmen! Der Mittelwertsatz lässt sich also nicht (so einfach) für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > 1$ verallgemeinern!