12 Hausübungen

A. 1:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sin(xy)\\
Df(x,y) &= (\cos(xy)\cdot y,\ \cos(xy)\cdot x)\\
D^2f(x,y) &= \begin{pmatrix} -\sin(xy)y^2 & \cos(xy)-xy\sin(xy)\\ \cos(xy)-xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy)\end{pmatrix}\\
T_2f(1,\pi)(h_1,h_2) &= f(1,\pi)+Df(1,\pi)h+\frac{1}{2}D^2f(1,\pi)h^2\\
&= 0+(-\pi,-1)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\
&= -\pi h_1-h_2+\frac{1}{2}(-2h_1h_2) = -\pi h_1-h_2-h_1h_2.
\end{aligned}
$$

A. 2: Aus AnalysisI wissen wir, dass $e^t = 1+t+R(t)$ wobei $\dfrac{R(t)}{t}\to 0$, wenn $t\to 0$. Also : $e^{x^2+xy+y^2} = 1+x^2+xy+y^2+R(x^2+xy+y^2)$.
Außerdem ist

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{R(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2}\right| &= \left|\frac{R(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}\right|\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\le\\
&\le \frac{3}{2}\left|\frac{R(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}\right|\to 0 \qquad (x,y)\to(0,0)
\end{aligned}
$$

Daraus bekommen wir $Df(0,0)=(0,0)$ und $D^2f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

A. 3: (a) Die Taylorformel aus dem Skript lautet:
$\exists\,\eta\in(0,1)$ mit $f(x+h)=f(x)+Df(x)h+\frac{1}{2}D^2f(x)h^2+\frac{1}{6}D^3f(x+\eta h)h^3$.
Da f dreimal stetig differenzierbar ist, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(x)$ stetig, also durch eine Zahl M auf einer Umgebung von x beschränkt.
Sei $a_{ijk}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(x)$. Wir wollen also zeigen, dass

$$
\begin{aligned}
r(h) &:= \frac{1}{\|h\|^2}\sum_{i,j,k} a_{ijk}h_ih_jh_k \to 0 \quad h\to 0\\
|r(h)| &\le \sum_{i,j,k}|a_{ijk}|\frac{|h_ih_jh_k|}{\|h\|^2}\le\sum_{i,jj,k}|a_{ijk}|\frac{|h_ih_jh_k|}{h_i^2+h_j^2}\\
&\le \sum_{i,j,k}|a_{ijk}|\frac{1}{2}|h_k|\to 0 \qquad h\to 0.
\end{aligned}
$$

(b) Sei $f(x+h)=f(x)+A(x)h+\dfrac{1}{2}B(x)h^2+r(h)$ mit $\dfrac{r(h)}{\|h\|^2}\to 0$. Aus der Taylorformel wissen wir

$$
f(x+h)=f(x)+Df(x)h+\frac{1}{2}D^2f(x)h^2+R(h) \text{ mit } \frac{R(h)}{\|h\|^2}\to 0.
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Da}\quad \frac{\left|\frac{1}{2}B(x)h^2+r(h)\right|}{\|h\|} &\le \left|\frac{1}{2}<\frac{h}{\|h\|},B(x)h>\right|+\frac{|r(h)|}{\|h\|^2}\cdot\|h\|\\
&\le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\|B(x)h\|+\frac{r(h)}{\|h\|^2}\cdot\|h\|\to 0 \qquad h\to 0.
\end{aligned}
$$

bekommen wir $A(x)=Df(x)$.

Daraus folgt: $\frac{1}{2}D^2f(x)h^2 - \frac{1}{2}B(x)h^2 + R(h) - r(h) = 0$ und auch $\frac{(D^2f(x)-B(x))h^2}{||h||^2} \to 0$ wenn $h \to 0$.
Sei $a_{ij} = (D^2f(x) - B(x))_{ij}$. Wir wollen also zeigen:
Wenn $\frac{\sum_{i,j} a_{ij} \cdot h_i \cdot h_j}{||h||^2} \to 0$ mit $h \to 0$, dann gilt $a_{ij} = 0$.
Sei $h_2 = h_3 = \cdots = h_n = 0$. Dann ist $\frac{a_{11}h_1^2}{h_1^2} \to 0 \Rightarrow a_{11} = 0$.
Analog erhalten wir $a_{22} = a_{33} = \cdots = a_{nn} = 0$.
Sei $h_3 = H_4 = \cdots = h_n = 0$. Dann ist $\frac{2a_{12}h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} \to 0$.
Wähle $h_1 = h_2 \to 0$. Dann gilt $a_{12} = 0$.
Analog beweisen wir , dass $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.
Daraus folgt, dass $D^2f(x) = B(x)$.