13 Hausübungen

A. 1: (a)

$$Df(x,y) = (24x^7 + 24x^2y^3,\ 24y^7 + 24x^3y^2) = (0,0) \Leftrightarrow x = -y \in \{-1;0;1\}$$

$$D^2f(x,y) = 24\begin{pmatrix} 7x^6 + 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 3x^2y^2 & 7y^6 + 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D^2f(1,-1) = D^2f(-1,1) = 24\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =: A$$

$\det A > 0, tr\, A > 0 \Rightarrow A$ ist positiv definit

$\Rightarrow f$ nimmt an den Stellen $(-1,1),(1,-1)$ ein lok. Minimum an.
An der Stelle $(x,y) = (0,0)$ gilt: $f(x,0) = 3x^8 \geq 0$
Aber $f(x,-x) = 6x^8 - 8x^6 = 2x^6(3x^2-4) \leq 0$ für $|x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.
$\Rightarrow$ kein lok. Extremum in (0,0).

(b)

$$Df(x,y,z) = (yz-1, xz-1, yx-1) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = z \in \{-1,1\}$$

$$D^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$A := D^2f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -D^2f(-1,-1,-1) =: B$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow 2 + 3\lambda - \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

$\Rightarrow$ kein lokales Extremum an der Stelle $(1,1,1)$

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow 2 - 3\lambda + \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

$\Rightarrow$ kein lokales Extremum an der Stelle $(-1,-1,-1)$

A. 2: a) **Berechnung der kritischen Punkte:** $f'(x,y) = 3D\begin{pmatrix} 8x^7 + 4y & 4x + 4 \end{pmatrix}$. Wir erhalten die kritischen Punkte durch Nullsetzen der Ableitung: $\begin{pmatrix} 8x^7 + 4y & 4x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich als einzige Lösung $a = (-1,2)$.

Aufstellen des Taylorpolynoms in a: Dazu berechnen wir zunächst die Hesse-Matrix:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 56x^6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$f''(-1,2) = \begin{pmatrix} 56 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Taylorpolynom zweiten Grades ist dann

$$T_2f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 56 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Der Term $f'(a)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ fällt weg, da a kritischer Punkt ist. Das Verhalten der Funktion in der Nähe von a wird also wirklich nur durch die Hesse-Matrix (bzw. die zugehörige quadratische Form) bestimmt[1]. Wir setzen $f(a) = 1 - 8 + 8 = 1$ ein und vereinfachen noch weiter:

$$T_2f(a+h) = 1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 56h_1 + 4h_2 \\ 4h_1 \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{2}(56h_1^2 + 4h_1h_2 + 4h_1h_2) = 1 + 4h_1(7h_1 + h_2)$$

[1] Solange $f''(a,h,h)$ nicht positiv semidefinit oder negativ semidefinit ist.

Interpretation: Man kann jetzt leicht ablesen, ob a das (globale) Minimum, das (globale) Maximum oder ein Sattelpunkt des Polynoms ist. Ist a das Minimum des Polynoms, so ist a lokales Minimum von f, ist a das Maximum des Polynoms, so ist a lokales Maximum von f und ist a ein Sattelpunkt des Polynoms, dann auch von f (das gerade ist die Aussage des Satzes auf S. 107 - dass es nämlich nur auf die quadratische Form und nicht auf die Terme höherer Ordnung ankommt, solange $f''(a, h, h)$ positiv definit, negativ definit oder indefinit ist).

In unserem konkreten Fall findet man ausgehend von a sowohl Richtungen, entlang derer das Polynom fällt (z. B. $h_2 = -8h_1$), als auch Richtungen, entlang derer es wächst (z. B. $h_1 = h_2$). a ist also Sattelpunkt des Polynoms (indefinit) und damit auch der Funktion f.

b) Die **Berechnung der kritischen Punkte** erfolgt durch Nullsetzen der ersten Ableitung: $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$, also $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -2$.

Für das Taylorpolynom brauchen wir auch die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \cdots = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

Wollten wir jetzt das hinreichende Kriterium (das Sie auch aus der Schule kennen, s. Ana I, S. 125) verwenden, so würden wir die kritischen Punkte 0 und -2 in die zweite Ableitung einsetzen: $f''(0) = 3D2$ und $f''(-2) = -\frac{2}{e^2}$ und entsprechend der Vorzeichen entscheiden, welche Art von kritischer Punkt vorliegt.

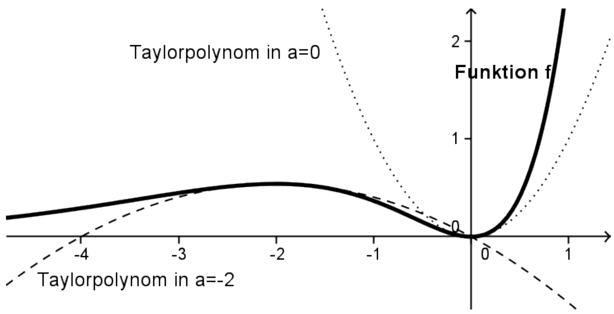
Was aber bedeutet das für die Taylorpolynome in den beiden kritischen Punkten?

Taylorpolynom in $a = 0$:

$T_2f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2 = 0+0+\frac{1}{2}\cdot 2h^2 = h^2$. Die Stelle a ist also Minimum des Taylorpolynoms und daher lokales Minimum von f. Das Vorzeichen des Koeffizienten von h^2 wird dabei durch jenes der zweiten Ableitung an der Stelle a festgelegt. Das ist eine inhaltliche Begründung dafür, dass das Vorzeichen der zweiten Ableitung darüber bestimmt, welche Art von Extremalstelle vorliegt.

Taylorpolynom in $a = -2$:

$T_2f(a + h) = \frac{4}{e^2} + 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e^2} \cdot h^2$. Dieses Polynom hat an der Stelle -2 das Maximum (wieder wegen des Vorzeichens von h^2), daher ist $a = -2$ ein lokales Maximum der ursprünglichen Funktion f.



A. 3:

$$Df(x, y) = (2x - 3y^2, -6xy + 8y^3) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$f(ay^2, y) = a^2y^4 - 3ay^4 + 2y^4 = y^4(a^2 - 3a + 2) \begin{cases} \leq 0, & a \in (1, 2) \\ \geq 0, & a \notin (1, 2). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{kein lok. Extremum an der Stelle } (0, 0)$$