14 Hausübungen

A. 1: (a)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \ \det Df(x,y) = 4(x^2+y^2) \neq 0$$

für $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f$ ist in jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ lokal invertierbar.
Für $(0,0)$ gilt: $f(x,0) = f(-x,0) \Rightarrow$ analog zu Gruppenaufgabe 2a): keine injektive Umgebung $\Rightarrow$ keine lokale Invertierbarkeit.

(b) Wir zeigen, dass $V = \{(x,y) | x > 0\}$, $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-x,0) | x \geq 0\}$ passend sind, d.h. $f : V \to W$ eine Bijektion ist.

Sei $(s,t) \in W$. Wir wollen zeigen: es gibt genau eine Lösung von $\begin{cases} x^2 - y^2 = s \\ 2xy = t \end{cases}$ mit $(x,y) \in V$.

$(s,t) = (R\cos\beta, R\sin\beta)$ für $R > 0$ und $\beta \in (-\pi,\pi)$.
Wir suchen $r > 0$ und $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = R\cos\beta \\ r^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = R\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2\cos 2\alpha = R\cos\beta \\ r^2\sin 2\alpha = R\sin\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^4\cos^2 2\alpha + r^4\sin^2 2\alpha = R^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$

$$\Rightarrow r^4 = R^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos\beta \\ \sin 2\alpha = \sin\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}, \text{ weil } \beta \in (-\pi,\pi) \text{ und } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

A. 2:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(xy)y & \cos(xy)x \\ 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\det Df(x,y) = -3y^3\cos(xy) - 3x^3\cos(xy) = -3\cos(xy)(x^3+y^3)$$

Da $\det Df(1,0) = -3 \neq 0$, ist f in (1,0) lokal invertierbar.

$f^{-1} : V \to U$ ist eine C^1-Funktion und

$$\begin{pmatrix} Dx(s,t) \\ Dy(s,t) \end{pmatrix} = Df^{-1}(s,t) = (Df(x,y))^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{3\cos(xy)(x^3+y^3)} \begin{pmatrix} -3y^2 & -\cos(xy)x \\ -3x^2 & \cos(xy)y \end{pmatrix}$$

mit $(x,y) = (x(s,t), y(s,t)) = f^{-1}(s,t)$.

Daraus folgt, dass $Df^{-1}(s,t)$ stetig differenzierbar ist und deshalb f^{-1} eine C^2-Funktion ist.

$$x_t(s,t) = \frac{x}{3(x^3+y^3)},$$

$$x_{ts}(s,t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+y^3)\cdot x_s - x(3x^2 \cdot x_s + 3y^2 \cdot y_s)}{(x^3+y^3)^2}$$

$(s,t) = (0,1) \Rightarrow (x,y) = (1,0), x_s(0,1) = 0, y_s(0,1) = 1$

$$x_{ts}(0,1) = \frac{1}{3} \frac{1 \cdot 0 - 1 \cdot (3 \cdot 1^2 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 \cdot 1)}{1^2} = 0.$$

A. 3:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2 & -2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}, \det Df(x,y) = (2x+2)^2 + 4y^2 \neq 0 \text{ für } (x,y) \neq (-1,0)$$

$\Rightarrow f$ ist in jedem Punkt $(x,y) \neq (-1,0)$ lokal invertierbar.
Für (-1,0) gilt: $f(-1,t) = f(-1,t)$. Somit ist f in KEINER Umgebung von (-1,0) injektiv und damit dort nicht lokal invertierbar.