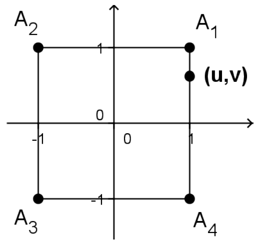
2 Hausübungen

A. 1: Selbständiges Forschen

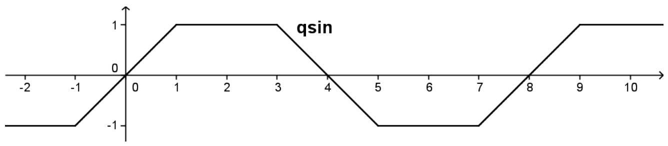
a) In der Vorlesung wurden die Sinus- und die Cosinusfunktion über Potenzreihen definiert. Aus der Schule kennen Sie vermutlich den Zugang über den Einheitskreis. Schlagen Sie diesen Zugang in einem Schulbuch nach, Sie werden ihn für die Aufgabe b) benötigen (Sie brauchen in dieser Teilaufgabe also nichts aufschreiben)!
b) Wie würden die „Winkelfunktionen“ aussehen, wenn man statt des Einheitskreises ein Quadrat (Eckpunkte $A_1 = (1, 1)$, $A_2 = (-1, 1)$, $A_3 = (-1, -1)$ und $A_4 = (1, -1)$) nehmen würde? Dabei sei x die Weglänge zum Quadratpunkt (u, v), wobei das Quadrat ausgehend vom Punkt $(1, 0)$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen qsin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und qcos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $\text{qsin}(x) = v$ und $\text{qcos}(x) = u$ gilt!
c) Welche besonderen Eigenschaften der Sinus- bzw. Cosinusfunktion findet man in analoger Weise auch bei den in b) definierten Funktionen? Geben Sie mindestens drei dieser Eigenschaften an!

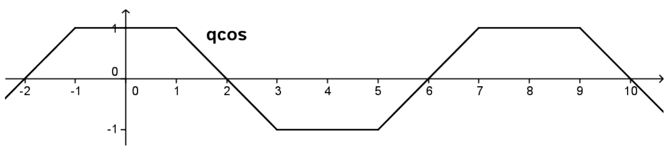
Musterlösung

b) Ausgehend vom Quadrat



kann man sich überlegen, wie die beiden Funktionen aussehen müssen:





c) Die beiden Funktionen sind periodisch mit der Periode 8, also $\text{qsin}(x + 8) = \text{qsin}(x)$ und $\text{qcos}(x + 8) = \text{qcos}(x)$.
Es gilt analog zu den Winkelfunktionen $\text{qsin}(x + 2) = \text{qcos}(x)$.
qcos ist wie cos eine gerade Funktion, also $\text{qcos}(-x) = \text{qcos}(x)$. qsin ist wie sin eine ungerade Funktion, also $\text{qsin}(-x) = -\text{qsin}(x)$.
$\text{qsin}(0) = 0$, $\text{qcos}(0) = 1$
Die beiden Funktionen nehmen ausschließlich Werte im Intervall $[-1, 1]$ an und sind insbesondere beschränkt.
Eventuell finden Sie auch noch andere Eigenschaften.

A. 2: Seien $x_1 = (0,1), x_2 = (1,0)$.
Wäre ρ eine Norm, so hätten wir

$$\begin{aligned} \rho(x_1 + x_2) &\leq \rho(x_1) + \rho(x_2) \\ \rho(1,1) &\leq \rho(0,1) + \rho(1,0) \\ 2^{\frac{1}{p}} &\leq 1 + 1 = 2^1 \\ p &\geq 1. \end{aligned}$$

Also ist ρ für $0 < p < 1$ keine Norm.

A. 3:

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x^2 + 2y^2)^x &= \mathrm{e}^{x\log(x^2+2y^2)} \\ g(x,y) &= x\log(x^2 + 2y^2) \end{aligned}$$

Seien : $x = \sqrt{2}r\cos t,\ y = r\sin t$.
Dann ist
$(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow r \to 0+$
$|g(x,y)| = |\sqrt{2}r\cos t \cdot \log(2r^2)| \ \leq\ 2\sqrt{2}r|\log(\sqrt{2}r)| \underset{r\to 0+}{\longrightarrow} 0$
Das bedeutet, wenn $g(0,0) = 0$ ist, ist g auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.
Also wenn $f(0,0) = 1$ ist, ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

A. 4: Seien $\varepsilon > 0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Wähle $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{4|x_0| + 2}, \dfrac{\varepsilon}{4|y_0| + 2}\right)$.
Dann gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta$:

$$\begin{aligned} &|x - x_0| < \delta \leq 1 \ \Rightarrow |x| \leq 1 + |x_0| \\ &|y - y_0| < \delta \leq 1 \ \Rightarrow |y| \leq 1 + |y_0| \\ &|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \ = \ |x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2| \ = \ |(x + x_0)(x - x_0) + (y + y_0)(y - y_0)| \\ &\qquad \leq \ \big(|x| + |x_0|\big)|x - x_0| \ + \ \big(|y| + |y_0|\big)|y - y_0| \ \leq \\ &\qquad \leq \ \big(1 + 2|x_0|\big)\cdot\delta \ + \ \big(1 + 2|y_0|\big)\cdot\delta \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$