3 Hausübungen

A. 1: (i) $a+b-1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{y(\sin\pi x)}{x+y-1} = \dfrac{b\sin\pi a}{a+b-1}$.

(ii) $a+b=1, a \notin \mathbb{Z}$.
Dann ist $y\sin\pi x \to b\sin\pi a \neq 0$, aber $x+y-1 \to 0 \Rightarrow$ der Grenzwert existiert nicht.

(iii) $a+b=1, a \in \mathbb{Z}$. Seien $s = x-a, t = y-b$.
Dann ist $(s,t) \to (0,0)$, wenn $(x,y) \to (a,b)$.

$$\frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1} = \frac{y\sin(\pi x)}{(x-a)+(y-b)} = \frac{(t+b)\sin(\pi a+\pi s)}{s+t} = \\ = \frac{(t+b)(-1)^a\sin(\pi s)}{s+t} = \frac{\pi s(t+b)}{s+t}\cdot(-1)^a\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$$

Da $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\sin(\pi s)}{\pi s} = 1$, genügt es den Grenzwert

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s(t+b)}{s+t}$$

zu untersuchen.

$(t,s) = (t,0) \to (0,0) \Rightarrow \dfrac{s(t+b)}{s+t} = 0 \to 0$.

$(t,s) = (0,s) \to (0,0) \Rightarrow \dfrac{sb}{s} = b \to b$.

Also wenn $b \neq 0$, dann existiert der Grenzwert nicht.
Für $b = 0$ bekommen wir aber den Grenzwert aus
-Gruppenübung 3 , Aufgabe 2(b) , Fall (iii)-.
Dieser existiert nicht!

A. 2: Seien $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$.
Da $f(x_0, t)$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist, $\exists\,\delta_0 > 0$ mit :

$$\forall y \in \mathbb{R}\ |y-y_0| < \delta_0 \text{ gilt } |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle $\delta = \min\left(\delta_0, \frac{\varepsilon}{2L}\right)$.
Dann ist für $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$: $|y-y_0| < \delta$ und $|x-x_0| < \delta$.

$$|f(x,y-f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y)-f(x_0,y)| + |f(x_o,y)-f(x_0,y_0)| \\ \leq L|x-x_0| + \frac{\varepsilon}{2} \leq L\cdot\delta + \frac{\varepsilon}{2} \leq L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A. 3: In G3-Aufgabe 4 haben wir gezeigt:
$\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt :

$\|x\| \leq C\cdot\|x\|_2$, wobei

$\|x\|_2 = \left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und $C = \left(\sum\limits_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Dann ist für $\|x-y\|_2 < \delta$:

$$\Big|f(x)-f(y)\Big| = \underbrace{\Big|\|x\|-\|y\|\Big| \leq \|x-y\|}_{\text{umgekehrte Dreiecksugl.}} \leq C\cdot\|x-y\|_2 < C\cdot\delta = \varepsilon.$$