4 Hausübungen

A. 1: (a) Sei $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ mit $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$.
Dann ist $L(f, P) = 0 \Rightarrow \sup_P L(f, P) = 0$.

Sei $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. Dann ist
$U(f, P_n) = \dfrac{1}{n} \cdot 1 + \dfrac{1}{n} \cdot 1 = \dfrac{2}{n}$. Daraus folgt:

$$\inf_P U(f, P) \leq U(f, P_n) = \frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow \inf_P U(f, P) \leq 0.$$

Da $0 = \sup_P L(f, P) \leq \inf_P U(f, P) \leq 0$, bekommen wir

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P) = 0. \Rightarrow$$

f ist auf [0,1] integrierbar und $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

(b) Sei $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ mit $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$.
Dann ist $L(f, P) = 0 \Rightarrow \sup_P L(f, P) = 0$.

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) a_{k+1} > \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \left(\frac{a_{k+1} + a_k}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}^2 - a_k^2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \inf_P U(f, P) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wäre f auf [0,1] integrierbar, so hätten wir

$$0 = \sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P) \geq \frac{1}{2}$$

Widerspruch -also ist f auf [0,1] nicht integrierbar.

A. 2: Sei [a,b] ein Intervall. Sei $P = \{a, b\}$. Dann ist

$$U(f, P) = \left(\sup_{[a,b] f}\right) \cdot (b - a),\ L(f, P) = \left(\inf_{[a,b]} f\right) \cdot (b - a)$$
$$U(f, P) = L(f, P) \Rightarrow \sup_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f \Rightarrow$$

f ist eine konstante Funktion.

A. 3: Die Darstellung veranschaulicht und motiviert den Satz auf Seite 34 unten (dieser Satz wird manchmal auch als 1. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Intergralrechnung bezeichnet - in der Vorlesung jedoch nicht). Dabei korrespondiert die Integralfunktion $I(x)$ mit der Funktion $F(x)$ und die Bezeichnung Δx mit $x - x_0$.

Ungenau ist die Darstellung vor allem beim Zeichen $\approx$. Der Beweis in der Vorlesung verwendet - um dieses Zeichen vermeiden zu können - den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Dieser besagt im vorliegenden Fall ja, dass es eine Stelle y zwischen x_0 und x gibt, sodass die Integralfunktion $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ **exakt gleich** $f(y) \cdot \Delta x$ ist.

Es wird in den Überlegungen nicht vorausgesetzt, dass $\Delta x > 0$ gelten muss (in der Vorlesung entspricht das der Voraussetzung $x \neq x_0$).

Eine dritte Ungenauigkeit besteht darin, dass f nicht als stetig vorausgesetzt wird (das passiert im Schulbuch aber schon weiter vorne).