5 Hausübungen

A. 1: (a) Es ist

$$\frac{4\sqrt[3]{x^5}-7\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x^{\frac{5}{3}}-7x^{\frac{1}{2}}+3}{x^{\frac{2}{3}}} = 4x^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}} = 4x-7x^{-\frac{1}{6}}+3x^{-\frac{2}{3}}$$

und daher

$$\int \frac{4\sqrt[3]{x^5}-7\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}} = \int 4x-7x^{-\frac{1}{6}}+3x^{-\frac{2}{3}} = 2x^2-\frac{42}{5}x^{\frac{5}{6}}+9x^{\frac{1}{3}}+C.$$

(b) Mittels zweimaliger partieller Integration, zunächst mit $u'(x)=\sin(x), v(x)=\sin(3x)$, anschließend mit $p'(x)=\cos(x), q(x)=\cos(3x)$, berechnen wir

$$\begin{aligned} I := \int \sin(x)\sin(3x)\,dx &= -\cos(x)\sin(3x)+3\int\cos(x)\cos(3x)\,dx \\ &= -\cos(x)\sin(3x)+3\sin(x)\cos(3x)+9\underbrace{\int\sin(x)\sin(3x)\,dx}_{=I}. \end{aligned}$$

Auflösen nach I liefert $I=\frac{1}{8}(\cos(x)\sin(3x)-3\sin(x)\cos(3x))+C$.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{2e^x-(e^x+1)}{e^x+1}\,dx \\ &= 2\int\frac{e^x}{e^x+1}\,dx-\int dx = 2\ln(e^x+1)-x+C. \end{aligned}$$

Also :

$$\int_0^3 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = 2\ln(e^3+1)-3-2\ln(2).$$

A. 2:

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u=a+b-x \\ du=-dx\end{matrix}\right\} = -\int_b^a f(u)\,du = \int_a^b f(u)\,du.$$

A. 3: Pyramidenvolumen

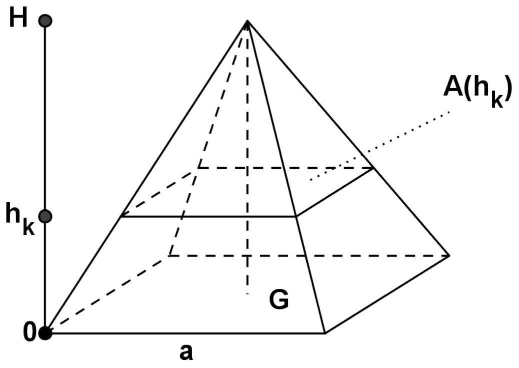
In der Sekundarstufe I wird die Formel für das Volumen einer (geraden quadratischen) Pyramide $V=\frac{G\cdot H}{3}$ nur präformal begründet (z.B. durch Füllexperimente mit einer hohlen Pyramide und einem hohlen Quader mit derselben Grundfläche und Höhe). Mit Hilfe der Intergralrechnung kann man diese Formel aber jetzt exakt beweisen.

a) Wir werden das zunächst über Ober- und Untersummen machen. Zerschneiden Sie dazu die Pyramide durch horizontale Schnitte in n gleich hohe Teile. Ersetzen Sie nun jeden der Teile durch einen umschließenden Quader und summieren Sie alle n Quadervolumina auf (Obersumme)! Analog gehen Sie zur Berechnung einer Untersumme vor!

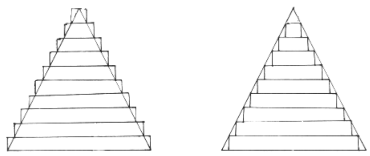
Hinweis: Wählen Sie eine Partition $P_n=\{h_0,h_1,\cdots,h_n\}$ der Höhe, wobei $h_k=k\cdot\frac{H}{n}$ gelten soll! Drücken Sie dann den Flächeninhalt der (quadratischen) Schnittfläche $A(h_k)$ durch G und H aus (*Hinweis: Strahlensatz*)! Danach können Sie die Quadervolumina berechnen und aufsummieren.

b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a), ob die Funktion $A(h)$ auf dem Intervall $[0,H]$ Riemann-integrierbar ist!

c) Berechnen Sie nun das Pyramidenvolumen noch einmal - und zwar durch Integration der Funktion $A(h)$ nach h.



Quadratische Pyramide



Ober- und Untersummen

Musterlösung:

a) Aus geometrischen Überlegungen (Strahlensatz) erhält man als Verhältnis der Seitenlängen $a : a(h_k) = H : (H - h_k)$. Daraus gewinnt man $a(h_k) = \frac{a(H-h_k)}{H}$ und damit $A(h_k) = \frac{a^2(H-h_k)^2}{H^2} = \frac{G(H-h_k)^2}{H^2} = \frac{G(H-k\cdot\frac{H}{n})^2}{H^2}$. Damit haben wir die Grundfläche des Quaders in der Höhe h_k berechnet. Die Höhe der einzelnen Quader ist wegen der Wahl der Partition gerade $\frac{H}{n}$.

Wir bilden jetzt die Obersumme:

$$U(P_n, A) = \sum_{k=0}^{n-1} A(h_k) \cdot \frac{H}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{G(H - k \cdot \frac{H}{n})^2}{H^2} \cdot \frac{H}{n} = \frac{G}{nH} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{H}{n}(n-k)\right)^2 =$$

$$= \frac{GH}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 = \frac{GH}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{GH}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Die Untersumme errechnet sich analog durch Verschiebung des Summationsindex:

$$L(P_n, A) = \sum_{k=1}^{n} A(h_k) \cdot \frac{H}{n} = \cdots = \frac{GH}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{GH}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Ober- und Untersumme konvergieren für $n \to \infty$ gegen den Wert $\frac{GH}{3}$.

b) Diese Argumentation kennen Sie schon aus Präsenzaufgabe 2) von Blatt 4:

$\inf U(P, A) \leq U(P_n, A)$ für alle $n \geq 1$. Damit gilt: $\inf U(P, A) \leq \frac{GH}{3}$.

$\sup L(P, A) \geq L(P_n, A)$ für alle $n \geq 1$. Damit gilt: $\sup L(P, A) \geq \frac{GH}{3}$.

Insgesamt gilt also: $\frac{GH}{3} \leq \sup L(P, A) \leq \inf U(P, A) \leq \frac{GH}{3}$ und damit ist $A(h)$ Riemann-integrierbar.

c)

$$\int_0^H A(h)dh = \int_0^H \frac{G(H-h)^2}{H^2} = \cdots = \frac{GH}{3}$$

Anmerkungen: - Man könnte analog auch das Volumen für eine allgemeine Pyramide berechnen.
- Diese Aufgabe soll zeigen, dass durch Integration nicht nur Flächen unter Funktionen oder Volumina von Rotationskörpern berechnet werden können, sondern auch andere schulrelevante geometrische Probleme gelöst werden können (z.B. auch Kegel- und Kugelvolumen).