6 Hausübungen

A. 1: (a)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{c} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{array} \right\} = \int \frac{2u\,du}{u^2+u} = 2\int \frac{du}{u+1} =$$
$$= 2\log|u+1| = 2\log(\sqrt{x}+1) + C.$$

(b)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] =: I \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{\cos(t)^2}\cos(t)\,dt =$$
$$= \int |\cos t|\cos t\,dt \overset{t\in I}{=} \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) =$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

A. 2: (a)

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\sqrt{x}\cdot\log x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\log x - 2\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \\ &= 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} \\ \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0+} -4 - (2\sqrt{a}\log a - 4\sqrt{a}) = -4. \end{aligned}$$

(b)

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}}\,dx$$
$$\left|\frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}}\right| \le \frac{|\log x|}{\sqrt{x}} = -\frac{\log x}{\sqrt{x}} \text{ für } x \in (0,1).$$

Da $\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ auf (0,1) integrierbar ist, ist auch $\frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}} = -\left|\frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}}\right|$ auf (0,1) integrierbar.

$$0 \le \frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}} \le \frac{x}{x^4\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} \text{ für } x \in (1,\infty).$$

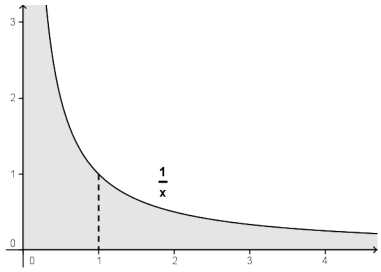
Da $\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}$ auf $(1,\infty)$ integrierbar ist, ist $\frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}}$ auf $(1,\infty)$ integrierbar.

A. 3: Uneigentliche Integrale über Funktionen der Form $f(x) = x^c$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für jede Funktion der Form $f(x) = x^c$ mit $c < -1$ das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^c dx$ existiert (s. S. 35, Beispiel 1). Überlegen Sie sich – bevor Sie die nachfolgenden Aufgaben bearbeiten – dass das genau jene Funktionen der Form $f(x) = x^c$ sind, deren Graph im Intervall $(1,\infty)$ ganz im grauen Bereich der untenstehenden Zeichnung verläuft (für die also $0 \le f(x) < \frac{1}{x}$ für $x \in (1,\infty)$ gilt).

a) Wie muss $c \in (-\infty, 0)$ gewählt werden, damit für Funktionen der Form $f(x) = x^c$ das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^c dx$ existiert? Beweisen Sie das!

b) Folgern Sie: Es gibt kein $c \in (-\infty, 0)$, für das das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x^c dx$ existiert. Zeichnen Sie danach die untenstehende Skizze ab und zeichnen Sie einige der Funktionen $f(x) = x^c$ für unterschiedliche Werte von c zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes ein!



Musterlösung:

a) Sei zunächst $c \neq -1$. Wir möchten $\int_0^1 x^c dx$ berechnen. Dazu schreiben wir

$$\int_0^1 x^c dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 x^c dx$$

Es ergibt sich

$$\lim_{a \to 0+} \int_a^1 x^c dx = \lim_{a \to 0+} \left(\frac{1}{c+1} 1^{c+1} - \frac{1}{c+1} a^{c+1}\right).$$

Dieser Grenzwert existiert **genau dann**, wenn $-1 < c < 0$ ist (da dann der Exponent von a größer als Null ist).

Wir müssen jetzt also nur noch den Fall $c = -1$ betrachten:

$$\lim_{a \to 0+} \int_a^1 x^c dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to 0+} (\log 1 - \log a)$$

Dieser Grenzwert existiert nicht.

Das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^c dx$ existiert also genau dann, wenn $-1 < c < 0$ gilt. Das bedeutet in der Skizze, dass es gerade für solche Funktionen $f(x) = x^c$ existiert, die im Intervall $(0, 1)$ ganz im grauen Bereich liegen (analog zum Intervall $(1, \infty)$).

b) Insgesamt erhalten wir aus Aufgabenteil a) und aus Beispiel 1 auf Seite 35, dass

$$\int_0^1 x^c dx$$

genau für $-1 < c < 0$ existiert, während

$$\int_1^\infty x^c dx$$

genau für $c < -1$ existiert. Es kann also kein $c \in (-\infty, 0)$ geben, für das das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^c dx$$

existiert. Damit sind wir fertig.

In der Skizze erkennt man das daran, dass keine der Funktionen $f(x) = x^c$ mit $c \in (-\infty, 0)$ ganz im grauen Bereich verläuft! Entweder sie verläuft im Intervall $(0, 1)$ im grauen Bereich und im Intervall $(1, \infty)$ nicht, oder umgekehrt!