7 Hausübungen

A. 1: Da f in a differenzierbar ist, können wir die Formel benutzen:

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot v_2$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad Df(x,y) = \left(-\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}\right)$$

$$Df(a) = (-1,-1)$$

$$D_v f(1,1) = -3 + 4 = 1.$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x,y) =& x^{y+1} = e^{(y+1)\log x} \\ Df(x,y) =& \left(x^{y+1} \cdot \frac{y+1}{x}, x^{y+1} \cdot \log x\right) \\ Df(2,2) =& \left(2^3 \cdot \frac{3}{2}, 2^3 \cdot \log 2\right) = (12, 8\log 2) \\ D_v f(2,2) =& 12 + 8\log 2. \end{aligned}$$

A. 2: Da $g(t) = |t|$ für $t \neq 0$ differenzierbar ist, ist f in allen Punkten (x,y) mit $xy \neq 0$ differenzierbar.
Sei $a = (x_0, 0)$. Dann ist :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x_0|x_0 t|}{t} = \begin{cases} x_o|x_0| & t \to 0+ \\ -x_0|x_0| & t \to 0- \end{cases}$$

Also wenn $x_0 \neq 0$, dann ist f in $(x_0, 0)$ nicht differenzierbar.
Sei $a = (0, y_0)$. Dann ist :$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$.

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a) - o \cdot h}{\|h\|}\right| = \frac{|f(h_1, h_2 + y_0) - f(0,y_0)|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{|h_1| \cdot |h_1(h_2 + y_0)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |h_1| \cdot |h_2 + y_0| \to 0.$$

Daraus folgt, dass f in $(0,y_0)\forall y_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

A. 3: Nein!

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $D_v f(0,0) = 0$, aber f ist selber nicht stetig in (0,0).