8 Hausübungen

A. 1:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2xy \\ \sin(xy) \\ \cos y - 1 \end{pmatrix}.$$

Damit $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \\ x \end{pmatrix}$ die Ableitung $Df(0,0)$ ist, müssen wir beweisen:

$$\frac{\begin{pmatrix} 2xy \\ \sin(xy) \\ \cos y - 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ für } (x,y) \to (0,0).$$

$$\left| \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \qquad (x,y) \to (0,0) \tag{1}$$

$$\left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \qquad (x,y) \to (0,0) \tag{2}$$

$$\left| \frac{\cos y - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{1-\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{cases} = 0 & \text{für } y = 0 \\ \leq \dfrac{1-\cos y}{|y|} & \text{für } y \neq 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{1-\cos y}{|y|} = |y| \cdot \frac{1-\cos y}{y^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0, \text{ da}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} \overset{dH}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}.$$

□

A. 2: (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + ye^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}.$$

$D_v f(x,y)$ kann mithilfe der Formel $D_v f(x,y) = v_1 \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + v_2 \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}$ berechnet werden.

A. 3: Produkt- und Kettenregel

In dieser Aufgabe üben Sie das Differenzieren von Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und das Anwenden der mehrdimensionalen Produkt- und Kettenregel!

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = 3x^2 \cdot \sin y \cdot e^{x+z-1}$ und $g(x,y,z) = 4x^3 \cdot \cos(y+2z)$ und sei $a = (1, \frac{\pi}{2}, 0)$. Berechnen Sie $(f \cdot g)'(a)$

- durch Anwenden der mehrdimensionalen Produktregel auf Seite 87,
- indem Sie zuerst die beiden Funktionsterme von f und g multiplizieren und danach das Ergebnis differenzieren!

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy \\ y^2 e^x \end{pmatrix}$. Sei $a = (1,2)$. Berechnen Sie $(f \circ g)'(a)$

- durch Anwenden der Kettenregel auf Seite 88,
- indem Sie zuerst den Funktionsterm von $f \circ g$ berechnen und danach das Ergebnis differenzieren!

Musterlösung:

a) **Mit Produktregel:**

$$f'(a) = \begin{pmatrix} 6x\sin ye^{x+z-1} + 3x^2 \sin ye^{x+z-1} & 3x^2 \cos ye^{x+z-1} & 3x^2 \sin ye^{x+z-1} \end{pmatrix}\Big|_a =$$

$$= \begin{pmatrix} 6e^0 + 3e^0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g'(a) = \begin{pmatrix} 12x^2\cos(y+2z) & -4x^3\sin(y+2z) & -8x^3\sin(y+2z) \end{pmatrix}\Big|_a =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Mit $f(a) = 3$ und $g(a) = 0$ folgt dann:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot 0 + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}$$

Ohne Produktregel: $(f \cdot g)(x,y,z) = 12x^5 \sin ye^{x+z-1}\cos(y+2z)$. Differenzieren dieser neuen Funktion und Einsetzen von a liefert

$$(f \cdot g)' = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}$$

b) **Mit Kettenregel:**

$$f'(a) = \begin{pmatrix} 2x+2y & 2x \\ y^2e^x & 2ye^x \end{pmatrix}\Big|_a = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4e & 4e \end{pmatrix}$$

$$g'(f(a)) = g'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}\Big|_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 8e \end{pmatrix}$$

wobei $b = f(a) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4e \end{pmatrix}$ gilt. Es ergibt sich insgesamt:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 8e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4e & 4e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+4e & 2+4e \\ 12 & 4 \\ 32e^2 & 32e^2 \end{pmatrix}$$

Ohne Kettenregel: Wir berechnen zuerst $(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy + y^2e^x \\ 2x^2 + 4xy \\ y^4e^{2x} \end{pmatrix}$ und differenzieren nun:

$$(g \circ f)'(a) = \begin{pmatrix} 2x + 2y + y^2e^x & 2x + 2ye^x \\ 4x + 4y & 4x \\ 2y^4e^{2x} & 4y^3e^{2x} \end{pmatrix}\Bigg|_a = \begin{pmatrix} 6+4e & 2+4e \\ 12 & 4 \\ 32e^2 & 32e^2 \end{pmatrix}$$