9 Hausübungen

A. 1:

$$u = 2x - z, v = \sin y, \quad f(x,y,z) = e^{yz} \cdot g(u,v).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{yz} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \cdot \cos y \right) + ze^{yz} \cdot g(u,v)$$

Für $(x,y,z) = (1,0,2)$ bekommen wir $(u,v) = (0,0)$.
Damit ist:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8.$$

A. 2: Sei $x = r\cos t, y = r\sin t, \quad g(t,r) = f(x,y) = f(r\cos t, r\sin t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t,r) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot r \cdot (-\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot r\cos t = \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot x = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(t,r) = \psi(r)$ nicht von t abhängig ist. Also bekommen wir

$$f(x,y) = g(r,t) = \psi(r) = \psi(\sqrt{x^2+y^2}) = \varphi(x^2+y^2).$$

A. 3: Sei $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ fest und sei $g(t) := f(tx)$.
Dann ist

$$t \cdot g'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx) \cdot tx_k \geq 0 \text{ für } t > 0.$$

Damit ist $g'(t) \geq 0 \quad \forall t > 0$. Daraus folgt:

$$f(x) = g(1) \geq g(0) = f(0).$$