Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

13–15.4.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 1

Aufgabe 1.
Beweisen Sie, dass die Funktion f auf dem Intervall I wohl definiert und differenzierbar ist:

(a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\,,\ I=(-10,10)\,,$ (b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{nx}}\,,\ I=(0,\infty)\,.$

Aufgabe 2.
Stellen Sie die folgende Funktion als eine Potenzreihe dar (um den Punkt x_0):

(a) $f(x)=\frac{x^5}{1-x}\,,\ x_0=0\,;$ (b) $f(x)=\frac{1}{x-1}\,,\ x_0=2\,.$

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie den Konvergenzradius und die Summe der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\,,$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n\,.$

Hausaufgaben

Abgabe bis zum 20.4.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}+1}$ auf dem Intervall $(0,\infty)$ wohl definiert und differenzierbar ist.

Aufgabe 2.
Stellen Sie die folgende Funktion als eine Potenzreihe dar (um den Punkt x_0):

(a) $f(x)=\frac{1+x}{e^x}\,,\ x_0=0$ (3 Punkte), (b) $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}\,,\ x_0=2$ (3 Punkte).

Aufgabe 3. Differenzieren von Potenzreihen
Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden. Am Rand des Konvergenzkreises kann sich dabei allerdings das Konvergenzverhalten ändern. Das werden Sie in dieser Aufgabe sehen.

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe konvergiert! (3 Punkte)

(b) Differenzieren Sie die Potenzreihe aus (a)! Ermitteln Sie für die neue Potenzreihe wieder den Konvergenzradius und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie konvergiert! (3 Punkte)

(c) Differenzieren Sie nun die in (b) erhaltene Potenzreihe noch einmal! Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die entstehende Potenzreihe konvergent? Mit welcher reellen Funktion stimmt sie innerhalb des Konvergenzkreises überein? (3 Punkte)