Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

15–17.6.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 10

Aufgabe 1. Ableitung der Umkehrabbildung
Diese Aufgabe soll deutlich machen, dass die Analysis enge Anknüpfungspunkte zur Linearen Algebra hat. Nachdem die Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, kommen Methoden aus der Lin. Algebra auch in der Analysis zum Einsatz.

Sei $f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)|x\in\mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^3 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und somit eine Umkehrabbildung g besitzt!

(b) Geben Sie diese Umkehrabbildung g an!

(c) Berechnen Sie die Jacobimatrix zu f! Für welche (x_0,y_0) ist $f'(x_0,y_0)$ invertierbar?

(d) Berechnen Sie $g'(f(2,1))$ auf zwei Arten: einmal durch Invertieren der Matrix $f'(2,1)$ und einmal durch direktes Ableiten der Abbildung g!

Aufgabe 2.
Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^3+y=s \\ -y^3+x=t \end{cases}$$

mit den Unbekannten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und den gegebenen Parametern $(s,t)\in\mathbb{R}^2$.

(a) Beweisen Sie, dass das Gleichungssystem für jedes Paar $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $x:=x(s,t)$, $y:=y(s,t)$ besitzt.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktionen $x(s,t)$ und $y(s,t)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar sind und berechnen Sie $x'(0,2)$ und $y'(0,2)$.

Aufgabe 3.
(a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x)\neq 0$. Beweisen Sie, dass f eine injektive Funktion ist. Ist f auch surjektiv?

(b) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\det f'(x)\neq 0$. Kann man daraus schließen, dass f injektiv ist?

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 22.6.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.
Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung und Struktur und einen Punkt für Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsgruppennummer an. Vermerken Sie auch, ob Sie Bachelor-Student sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.
Sei $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0 \text{ und } y\neq 0\}$. Wir definieren die Funktion $f\colon A\to\mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2y-y^3 \\ y^3+2x^2y \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie, dass f eine injektive Abbildung ist und bestimmen Sie das Bild $B=f(A)$. Skizzieren Sie die Menge B. (3 Punkte)

(b) Beweisen Sie, dass $f^{-1}\colon B\to A$ eine stetig differenzierbare Abbildung ist und bestimmen Sie $Df^{-1}(0,3)$. (3 Punkte)

Aufgabe 2.
Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x+y^5=s \\ x^3-y^3=t \end{cases}$$

mit den Unbekannten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und den gegebenen Parametern $(s,t)\in\mathbb{R}^2$.

(a) Beweisen Sie, dass das Gleichungssystem für jedes Paar $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $x:=x(s,t)$, $y:=y(s,t)$ besitzt. (3 Punkte)

(b) Beweisen Sie, dass die Funktionen $x(s,t)$, $y(s,t)$ auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(s,t)\mid t=s^3\}$ stetig differenzierbar sind und berechnen Sie $x'(1,9)$ und $y'(1,9)$. (3 Punkte)

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Sei $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(0)\neq 0$. Außerdem wissen wir, dass $x=0$ eine eindeutige Lösung der Gleichung $f(x)=0$ ist.
Kann man daraus schließen, dass es ein Parameter $y\neq 0$ gibt, damit die Gleichung $f(x)=y$ eine eindeutige Lösung besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis:
Ab jetzt wird eine weitere Übungsgruppe angeboten. Diese findet mittwochs von 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr im LUDI statt. Ein Wechsel in diese Gruppe ist problemlos möglich.