Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

22–24.6.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 11

Aufgabe 1.
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 1\,.$$

Sei $g(s,t) = f(s+t, e^{s+t}+t)$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}(0,0)$.

Aufgabe 2.
Sei $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$.

(a) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Entscheiden Sie, ob $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existieren.

Aufgabe 3.
Sei $f(x,y) = \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und beweisen Sie, dass sie auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind.

(b) Beweisen Sie, dass $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existieren und ungleich sind.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 29.6.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung und Struktur und einen Punkt für Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsgruppennummer an. Vermerken Sie auch, ob Sie Bachelor-Student sind.

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Seien $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und

$$u(x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Stellen Sie die Funktion

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

durch die Ableitungen der Funktion f dar.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.
Sei $f(x,y)=xy\sin(\sqrt{x^2+y^2})$.

(a) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und entscheiden Sie, ob sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind. (3 Punkte)

(b) Entscheiden Sie, ob $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existiert. (3 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y,z)=xyz$. Seien $a=(1,1,1)$ und $b=(2,1,3)$.

(a) Wie kann man mit Hilfe eines Satzes aus der VO sofort begründen, dass es einen Punkt c auf der Verbindungsstrecke von a nach b geben muss mit $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$? Finden Sie einen solchen Punkt c! (3 Punkte)

(b) Gibt es so einen Punkt c auch für die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix} xyz \\ x^2 z \end{pmatrix}$$

(Punkte a, b wie oben)? Welche Konsequenz hat das für den in (a) verwendeten Satz? (3 Punkte)