Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

29.6–1.7.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 12

Aufgabe 1. Taylorpolynom
In dieser Aufgabe sollen Sie ganz konkret ein Taylorpolynom zu einer einfachen Funktion bestimmen. Dabei kommen sowohl die Jacobi- als auch die Hesse-Matrix zum Einsatz. Taylorpolynome können (wie schon im Eindimensionalen) dazu benutzt werden, Näherungswerte für Funktionswerte nahe am Entwicklungspunkt zu berechnen.

Sei $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=x^{2y}$ und sei $a=(1,1)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades zu f im Punkt a!

(b) Geben Sie damit eine Näherung für $f(1.2,0.9)$ an (ohne Taschenrechner)!

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Hesse-Matrix der Funktion

$$f(x,y)=2x+y-xy+x^3\,,$$

ohne die partiellen Ableitungen zu berechnen!

Hinweis: Verwenden Sie die Hausaufgabe 3(b).

Aufgabe 3.
Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Seien $x,v\in\mathbb{R}^n$ mit

$$D_v f(x)=0 \quad \text{und} \quad D^2 f(x)v^2>0\,.$$

Beweisen Sie, dass die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g(t)=f(x+tv)$ ein lokales Minimum an der Stelle $t=0$ annimmt.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 6.7.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.
Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben einmal getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen bleibt es eine gute Idee, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung und Struktur und einen Punkt für saubere Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsgruppennummer an. Vermerken Sie auch, ob Sie Bachelor-Student sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion $f(x,y)=\sin(xy)$ an der Stelle $(1,\pi)$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktion $f(x,y)=e^{x^2+xy+y^2}$ an der Stelle $(0,0)$, ohne die partiellen Ableitungen zu berechnen!

Aufgabe 3.
(a) Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Angenommen es gilt für $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}D^2 f(x)h^2 + r(h)\,.$$

Beweisen Sie, dass $\dfrac{r(h)}{\|h\|^2} \to 0$, wenn $h \to 0$. (3 Punkte)

(b) Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion, $A(x)$ eine $1\times n$ Matrix und $B(x)$ eine $n\times n$ symmetrische Matrix. Angenommen es gilt für $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+h) = f(x) + A(x)h + \frac{1}{2}B(x)h^2 + r(h)\,,$$

wobei $\dfrac{r(h)}{\|h\|^2} \to 0$, wenn $h \to 0$. Beweisen Sie, dass $A(x) = Df(x)$ und $B(x) = D^2 f(x)$. (3 Punkte)