Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

13.7–15.7.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 14

Defintion.
Eine Funktion $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ heißt *lokal invertierbar in einem Punkt* x_0, wenn es Umgebungen U von x_0 und V von $f(x_0)$ gibt, sodass $f\colon U\to V$ eine Bijektion ist.

Aufgabe 1. Lokale Invertierbarkeit
Den Satz von der lokalen Invertierbarkeit (S. 110) überlegt man sich inhaltlich am besten für den Fall $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dazu haben Sie in der Teilaufgabe (a) Gelegenheit. Fertigen Sie zu dieser Teilaufgabe (a) in Ihrem eigenen Interesse eine Skizze an!

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen lokal invertierbar sind! Wählen Sie dafür einen konkreten Punkt x_0 aus und geben Sie offene Umgebungen V von x_0 und W von $f(x_0)$ an, sodass die Funktion $f:V\to W$ bijektiv ist! Ist die Funktion f sogar global invertierbar?

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=e^x\sin x$

(b) $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ mit $f(r,\varphi,z)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ z\end{pmatrix}$ (Zylinderkoordinaten)

Aufgabe 2.
Sei $f(x,y)=(4xy-2x^2,2x^2+xy-y^2)$.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f lokal invertierbar ist.

(b) Aus (a) folgt, dass die Funktion f im Punkt $(1,1)$ lokal invertierbar ist. Es gibt also Umgebungen $U\ni(1,1)$ und $V\ni f(1,1)=(2,2)$, sodass $f\colon U\to V$ eine Bijektion ist. Beweisen Sie, dass f^{-1} auf V stetig differenzierbar ist, und bestimmen Sie $Df^{-1}(2,2)$.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie: es gibt eine Umgebung V des Punktes $(0,0)$, sodass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} e^{2x+y}-\cos(xy)=s\\ e^x-\cos(x+y)=t\end{cases}$$

eine Lösung $x:=x(s,t)$, $y:=y(s,t)$ für jeden Punkt $(s,t)\in V$ besitzt.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 20.7.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben einmal getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen bleibt es eine gute Idee, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung und Struktur und einen Punkt für saubere Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsgruppennummer an. Vermerken Sie auch, ob Sie Bachelor-Student sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.
Sei $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f lokal invertierbar ist. (3 Punkte)

(b) Aus (a) folgt, dass die Funtion f im Punkt $(1,1)$ lokal invertierbar ist. Geben Sie offene (möglichst große) Umgebungen V von $(1,1)$ und W von $f(1,1)=(0,2)$ an, sodass die Funktion $f:V\to W$ bijektiv ist. (3 Punkte)

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Abbildung f, indem Sie Polarkoordinaten betrachten.

Aufgabe 2.
Sei $f(x,y)=(\sin(xy),x^3-y^3)$.

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(1,0)$ lokal invertierbar ist. (3 Punkte)

(b) Es gibt also Umgebungen $U\ni(1,0)$ und $V\ni f(1,0)=(0,1)$, sodass $f:U\to V$ eine Bijektion ist. Beweisen Sie, dass $f^{-1}(s,t)=(x(s,t),y(s,t))$ auf V zweimal stetig differenzierbar ist, und bestimmen Sie $\dfrac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}(0,1)$. (3 Punkte)

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Sei $f(x,y)=(x^2+2x-y^2+1,2xy+2y)$. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f lokal invertierbar ist.