Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

20.7–22.7.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 15

Aufgabe 1.
Wir werden den Satz über implizite Funktionen (S. 115) an einer **einfachen Funktion** abarbeiten und dazu geometrische Überlegungen anstellen, um Ihnen die Aussage des Satzes klar zu machen.

Sei $f:\mathbb{R}^{1+1}\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=25-(x^2+y^2)$.

(a) Welches geometrische Objekt wird durch die Funktion f dargestellt (Skizze)?

(b) Auf welchem geometrischen Objekt liegen alle Punkte $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit $f(a,b)=0$?

(c) Berechnen Sie die im Satz angegebene Determinante und untersuchen Sie, welche Punkte aus Teilaufgabe (b) die Voraussetzung des Satzes **nicht** erfüllen (über diese Punkte sagt der Satz dann also nichts aus)! Erklären Sie anhand einer Skizze, warum man für diese Punkte keine wie im Satz beschriebene Funktion φ finden kann!

(d) Bei komplizierteren Funktionen f kann man die Funktion φ meistens nicht explizit angeben (der Satz über implizite Funktionen macht ja nur eine Aussage über ihre Existenz und Eindeutigkeit, nicht aber wie man sie berechnet). In unserem einfachen Fall geht das aber: Geben Sie also zu einem beliebigen Punkt (a,b), der die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, eine passende Umgebung U von b und eine Funktion $\varphi:U\to\mathbb{R}$ mit $\varphi(b)=a$ und $f(\varphi(y),y)=0$ an!

Aufgabe 2.
(a) Beweisen Sie: Es gibt eine Zahl $\eta>0$, sodass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x+t\sin(x+y)=0 \\ y+t\cos(xy)=0 \end{cases}$$

für jedes Parameter $t\in(-\eta,\eta)$ eine stetig differenzierbare Lösung $(x,y):=(x(t),y(t))$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie $x'(0)$ und $y'(0)$.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie: Es gibt eine Umgebung U des Punktes $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi)$, sodass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x+\cos(y-s-t)=0 \\ \sin(x-s+t)+2y=0 \end{cases}$$

für jedes Paar $(s,t)\in U$ eine stetig differenzierbare Lösung $(x,y):=(x(s,t),y(s,t))$ besitzt.

Aufgabe 4.
(a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $(x^2+1)z=4-y^2\log z$ für jedes Paar $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $z=z(x,y)>0$ besitzt.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion z stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie $Dz(1,0)$.