Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

20–22.4.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 2

Aufgabe 1.
Sei $f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{für } y\geq x,\\ 0 & \text{für } y<x.\end{cases}$

Skizzieren Sie den Graph der Funktion $g(t)=f(\sin t,\cos t)$.

Aufgabe 2.
Eine Menge $A\subset\mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x,y\in A$ und alle $t\in[0,1]$ gilt $tx+(1-t)y\in A$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm in $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Menge $B=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leq 1\}$ konvex ist.

Aufgabe 3.
Kann die folgende Funktion f so in $(0,0)$ definiert werden, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, (b) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Aufgabe 4.
Sei $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\leq x^2\}$. Man definiere die Funktion $f\colon D\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y)\neq(0,0)$. Kann die Funktion f so in $(0,0)$ definiert werden, dass f in $(0,0)$ stetig wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 27.4.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.

Aufgabe 1. Selbständiges Forschen

(a) In der Vorlesung wurden die Sinus- und die Cosinusfunktion über Potenzreihen definiert. Aus der Schule kennen Sie vermutlich den Zugang über den Einheitskreis. Schlagen Sie diesen Zugang in einem Schulbuch nach, Sie werden ihn für die Aufgabe (b) benötigen (Sie brauchen in dieser Teilaufgabe also nichts aufschreiben)!

(b) Wie würden die „Winkelfunktionen” aussehen, wenn man statt des Einheitskreises ein Quadrat (Eckpunkte $A_1=(1,1)$, $A_2=(-1,1)$, $A_3=(-1,-1)$ und $A_4=(1,-1)$) nehmen würde? Dabei sei x die Weglänge zum Quadratpunkt (u,v), wobei das Quadrat ausgehend vom Punkt $(1,0)$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen $\mathrm{qsin}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $\mathrm{qcos}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, wobei $\mathrm{qsin}(x)=v$ und $\mathrm{qcos}(x)=u$ gilt! (3 Punkte)

(c) Welche besonderen Eigenschaften der Sinus- bzw. Cosinusfunktion findet man in analoger Weise auch bei den in b) definierten Funktionen? Geben Sie mindestens drei dieser Eigenschaften an! (3 Punkte)

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Sei $0 < p < 1$. Beweisen Sie, dass die Funktion $\rho(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ keine Norm auf $\mathbb{R}^2$ angibt.

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Kann die Funktion $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)^x$ so in $(0,0)$ definiert werden, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. (3 Punkte)
Beweisen Sie mithilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.