Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

27–29.4.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 3

Aufgabe 1. Anwendungen von Abbildungen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Wir werden im laufenden Semester häufig mit Funktionen (= Abbildungen) vom Typ $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu tun haben. Es ist wichtig, dass Sie für verschiedene Werte von n und m die richtigen „Bilder” und repräsentative Beispiele im Kopf haben. Dazu eine Übung:

Geben Sie je ein konkretes (möglichst kreatives) Anwendungsbeispiel für folgende Funktionstypen an! Fertigen Sie — wo möglich — eine Skizze zu Ihren Beispielen an! Aus welchen Gründen kann es interessant sein, sich mit Ihren gewählten Funktionen zu beschäftigen?

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, (b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, (c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, (d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, (e) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$,
(f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$.

Musterbeispiel zu e: Temperatur an einem bestimmten Punkt des Raumes zu einem bestimmten Zeitpunkt $T(x_1,x_2,x_3,t)=\cdots$. Hat man eine Funktion dieser Art zur Verfügung, so kann man Fragen nach der zeitlichen Temperaturveränderung an einem Punkt beantworten, kann die Temperaturverteilung im Raum zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten vergleichen, man kann sich für das Temperaturmaximum bzw. -minimum interessieren, Prognosen über den zukünftigen Temperaturverlauf anstellen, uvm.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie alle Punkte $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, für die der folgende Grenzwert existiert:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x\sin\frac{1}{y}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{xy}{x+y}$.

Aufgabe 3.
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Es gelte: für alle $a,b\in\mathbb{R}$ sind die Funktionen $g(t)=f(a,t)$ und $h(t)=f(t,b)$ stetig auf $\mathbb{R}$. Folgt daraus, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist?

Aufgabe 4.
Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x)=\|x\|$ auf der Menge $A=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le 1\}$ beschränkt ist.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 4.5.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.
Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsnummer an.

Bitte wenden!

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Bestimmen Sie alle Punkte $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, für die der Grenzwert
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1}$$
existiert.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Sei $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Es gelte:
(1) Für alle $a\in\mathbb{R}$ ist die Funktion $g(t)=f(a,t)$ stetig;
(2) Es gibt eine Konstante $L>0$, sodass für alle $x,y,a\in\mathbb{R}$ gilt
$$|f(x,a)-f(y,a)|\le L|x-y|\,.$$
Beweisen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass die Funktion $f(x)=\|x\|$ auf $\mathbb{R}^n$ stetig ist.