Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

4–6.5.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 4

Aufgabe 1.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen f auf dem Intervall $[-1,1]$ integrierbar sind. Falls ja, bestimmen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^4 + 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Aufgabe 2.
Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0,1]$ integrierbar ist und bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Aufgabe 3.
Sei f eine auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbare Funktion. Es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 11.5.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsnummer an.

Aufgabe 1.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen f auf dem Intervall $[0,1]$ integrierbar sind. Falls ja, bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0,1) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ (3 Punkte), (b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (3 Punkte).

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Welche Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ haben folgende Eigenschaft: *Jede obere Riemman-Summe ist gleich jeder unteren Riemann-Summe.* Begründen Sie Ihre Antwort.

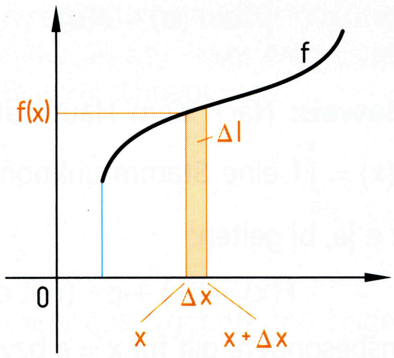
Bitte wenden!

Aufgabe 3. (3 Punkte)
In einem Schulbuch habe ich folgende Darstellung gefunden:

Wir führen eine intuitive Überlegung durch, wobei wir uns der LEIBNIZ'schen Denkweise bedienen. Wir denken uns das Argument x um ein kleines Stück Δx vergrößert. Dabei nehme die Integralfunktion I um ΔI zu (siehe nebenstehende Abbildung).
Es gilt:

$$\Delta I \approx f(x) \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} \approx f(x)$$



Diese Näherung gilt im Allgemeinen umso genauer, je kleiner Δx ist. Für $\Delta x \to 0$ strebt der Differenzenquotient $\frac{\Delta I}{\Delta x}$ gegen den Differentialquotienten $\frac{dI}{dx}$ und es ergibt sich:

$$\frac{dI}{dx} = f(x)$$

Zu welchem Satz aus der Vorlesung passt diese Darstellung? An welchen Stellen ist sie unpräzise? Wie wird diesen Ungenauigkeiten im Beweis in der Vorlesung begegnet? (Übrigens liefert auch das angesprochene Schulbuch noch einen exakten Beweis des Satzes nach.)