Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

11–13.5.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 5

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe einer Substitution:

(a) $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx\,.$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe der Partiellintegration:

(a) $\displaystyle\int xe^x\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int_1^4 \log x\,dx\,.$

Aufgabe 3.
Sei $\Psi(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Drücken Sie $\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt$ mithilfe von $\Psi(x)$ aus.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 18.5.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsnummer an.

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{4\sqrt[3]{x^5}-7\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ (3 Punkte), (b) $\displaystyle\int \sin x\cdot\sin 3x\,dx$ (3 Punkte),

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$ (3 Punkte).

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx\,.$$

Bitte wenden!

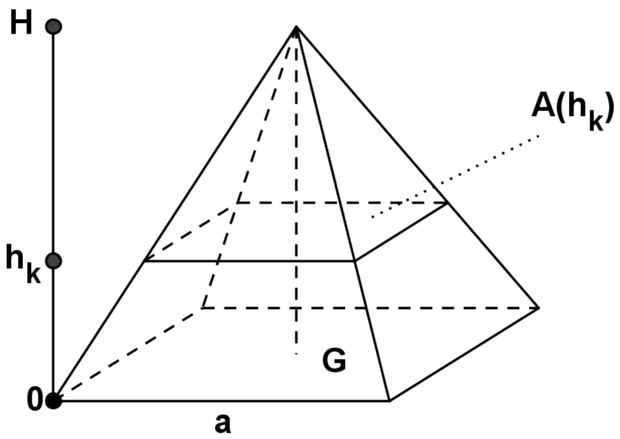
Aufgabe 3. Pyramidenvolumen (3 Punkte)
In der Sekundarstufe I wird die Formel für das Volumen einer (geraden quadratischen) Pyramide $V = \frac{G \cdot H}{3}$ nur präformal begründet (z.B. durch Füllexperimente mit einer hohlen Pyramide und einem hohlen Quader mit derselben Grundfläche und Höhe). Mit Hilfe der Intergralrechnung kann man diese Formel aber jetzt exakt beweisen.

(a) Wir werden das zunächst über Ober- und Untersummen machen. Zerschneiden Sie dazu die Pyramide durch horizontale Schnitte in n gleich hohe Teile. Ersetzen Sie nun jeden der Teile durch einen umschliešenden Quader und summieren Sie alle n Quadervolumina auf (Obersumme)! Analog gehen Sie zur Berechnung einer Untersumme vor!

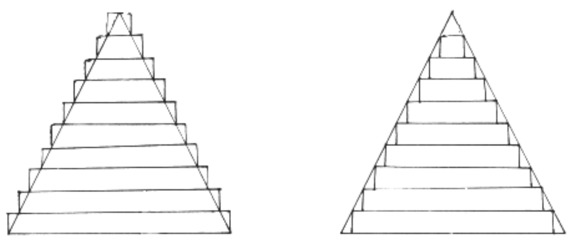
Hinweis: Wählen Sie eine Partition $P_n = \{h_0, h_1, \cdots, h_n\}$ der Höhe, wobei $h_k = k \cdot \frac{H}{n}$ gelten soll! Drücken Sie dann den Flächeninhalt der (quadratischen) Schnittfläche $A(h_k)$ durch G und H aus (*Hinweis: Strahlensatz*)! Danach können Sie die Quadervolumina berechnen und aufsummieren.

(b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (a), ob die Funktion $A(h)$ auf dem Intervall $[0, H]$ Riemann-integrierbar ist!

(c) Berechnen Sie nun das Pyramidenvolumen noch einmal — und zwar durch Integration der Funktion $A(h)$ nach h.



Quadratische Pyramide



Ober- und Untersummen