Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

18–20.5.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 6

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$

Aufgabe 2.
Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren. Falls ja, berechnen Sie sie.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx\ \ (k\in\mathbb{N})\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 |\log x|\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$

Aufgabe 3.
Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren. (Sie müssen sie nicht berechnen.)

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sin x)\cdot(\log x)}{x}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(1+x^3)e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$

Aufgabe 4.
Sei $f_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Folge der stetigen Funktionen, die gleichmäßig (auf dem Intervall $[a,b]$) gegen einer Funktion f konvergiert. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 25.5.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung und Struktur und einen Punkt für Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsgruppennummer an. Vermerken Sie auch, ob Sie Bachelor-Student sind.

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ (3 Punkte), (b) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ (3 Punkte).

Bitte wenden!

Aufgabe 2.
Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ (3 Punkte), (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^4)\sqrt{x}}\,dx$ (3 Punkte).

Aufgabe 3. Uneigentliche Integrale über Funktionen der Form $f(x)=x^c$ (3 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für jede Funktion der Form $f(x)=x^c$ mit $c<-1$ das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^c dx$ existiert (s. S. 35, Beispiel 1). Überlegen Sie sich – bevor Sie die nachfolgenden Aufgaben bearbeiten – dass das genau jene Funktionen der Form $f(x)=x^c$ sind, deren Graph im Intervall $(1,\infty)$ ganz im grauen Bereich der untenstehenden Zeichnung verläuft (für die also $0\leq f(x)<\frac{1}{x}$ für $x\in(1,\infty)$ gilt).

(a) Wie muss $c\in(-\infty,0)$ gewählt werden, damit für Funktionen der Form $f(x)=x^c$ das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^c dx$ existiert? Beweisen Sie das!

(b) Folgern Sie: Es gibt kein $c\in(-\infty,0)$, für das das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x^c dx$ existiert. Zeichnen Sie danach die untenstehende Skizze ab und zeichnen Sie einige der Funktionen $f(x)=x^c$ für unterschiedliche Werte von c zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes ein!