Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

1–3.6.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 8

Aufgabe 1.
Benutzen Sie die Definition der Differenzierbarkeit um zu beweisen, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = (xz - y, x^2 + z, x + 2y)$$

im Punkt
(a) $a = (0,0,0)$,
(b) $a = (1,1,0)$
differenzierbar ist. Bestimmen Sie auch die Ableitung $Df(a)$, ohne partielle Ableitungen auszurechnen.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:
(a) $f(x,y) = e^{xy} + x^8$,
(b) $f(x,y) = x(x+y)^{20}$.
Bestimmen Sie auch die Richtungsableitung $D_v f(x,y)$ für $v = (2,-3)$.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und alle Vektoren $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$, damit die Funktion $f(x,y) = |y - e^x|$ die Richtungsableitung $D_v f(x,y)$ besitzt.

Hausaufgaben

Abgabe bis zum 8.6.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.
Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung und Struktur und einen Punkt für Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsgruppennummer an. Vermerken Sie auch, ob Sie Bachelor-Student sind.

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Benutzen Sie die Definition der Differenzierbarkeit um zu beweisen, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y) = (x + 2xy + 2, \sin(xy) - y + 1, \cos y + x)$$

im Punkt $a = (0,0)$ differenzierbar ist. Bestimmen Sie auch die Ableitung $Df(a)$, ohne partielle Ableitungen auszurechnen.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:
(a) $f(x,y)=\sin x+y^2$ (3 Punkte),
(b) $f(x,y)=x+e^{xy}$ (3 Punkte).
Bestimmen Sie auch die Richtungsableitung $D_v f(x,y)$ für $v=(-1,2)$.

Aufgabe 3. Produkt- und Kettenregel
In dieser Aufgabe üben Sie das Differenzieren von Abbildungen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und das Anwenden der mehrdimensionalen Produkt- und Kettenregel!

(a) Seien $f,g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z)=3x^2 \cdot \sin y \cdot e^{x+z-1}$ und $g(x,y,z)=4x^3 \cdot \cos(y+2z)$ und sei $a=(1,\frac{\pi}{2},0)$. Berechnen Sie $(f\cdot g)'(a)$
- durch Anwenden der mehrdimensionalen Produktregel auf Seite 87,
- indem Sie zuerst die beiden Funktionsterme von f und g multiplizieren und danach das Ergebnis differenzieren! (3 Punkte)

(b) Sei $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $g(x,y)=\begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2+2xy \\ y^2e^x \end{pmatrix}$. Sei $a=(1,2)$. Berechnen Sie $(g\circ f)'(a)$
- durch Anwenden der Kettenregel auf Seite 88,
- indem Sie zuerst den Funktionsterm von $f\circ g$ berechnen und danach das Ergebnis differenzieren! (3 Punkte)