Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

8–10.6.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis II, Übung 9

Aufgabe 1.
Für welche der folgenden Abbildungen f und g lassen sich die Verknüpfungen $f\circ g$ bzw. $g\circ f$ bilden? Geben Sie an, welche Gestalt die zu $f'(a)$, $g'(b)$ und gegebenenfalls $(f\circ g)'(b)$ bzw. $(g\circ f)'(a)$ gehörigen Matrizen haben ($a\in D_f$, $b\in D_g$)!

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, (b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, (c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
(d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, (e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, (f) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,
(g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, (h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^5$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Aufgabe 2.
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

(a) Stellen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y)=g(x^2y,x+y,2xy^3)$ durch die partiellen Ableitungen der Funktion g dar.

(b) Sei $Dg(1,0,-2)=(0,-1,1)$. Berechnen Sie $Df(-1,1)$.

Aufgabe 3.
Gegen sei eine differenzierbare Funktion $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ mit

$$Dg(3,1,2)=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Sei $f(x,y)=g(3x^2y,e^{x-y},x+y^2)$. Berechnen Sie $Df(1,1)$.

Aufgabe 4.
Eine differenzierbare Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ erfülle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

für alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass es eine Funktion $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x,y)=\varphi(x+y)$.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 15.6.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung und Struktur und einen Punkt für Handschrift und Leserlichkeit.
Bitte geben Sie deutlich oben rechts Übungsgruppenleiter und Übungsgruppennummer an. Vermerken Sie auch, ob Sie Bachelor-Student sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(0,0)=3$ und $Dg(0,0)=(-1,2)$. Sei

$$f(x,y,z)=e^{yz}\cdot g(2x-z,\sin(y))\,.$$

Bestimmen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0,2)$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfülle

$$y\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

für alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass es eine Funktion $\varphi\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$.
Hinweis: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$.

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\geq 0$$

für alle Punkte $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Beweisen Sie, dass $f(x)\geq f(0)$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$.
Hinweis: Sei $x\in\mathbb{R}^n$ fest. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g(t):=f(tx)$.