

Zwischenbericht zum DFG-Forschungsvorhaben

NE 902/2-1 SCHR 570/6-1

**Polykonvexe Energiefunktionen
im Rahmen der anisotropen Elastizität**

Version vom 11. Juni 2008

Patrizio Neff,
Arbeitsgruppe für Partielle
Differentialgleichungen und Anwendungen
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
64289 Darmstadt, Schlossgartenstr. 7



Technische Universität Darmstadt

Jörg Schröder, Vera Ebbing
Institut für Mechanik
Abteilung Bauwissenschaften
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
45117 Essen, Universitätsstr. 15

UNIVERSITÄT
D U I S B U R G
E S S E N

Universität Duisburg-Essen - Campus
Essen

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Angaben	3
2 Veröffentlichungen und Konferenzvorträge	4
3 Ausgangsfragen und Zielsetzung	6
3.1 Stand der Forschung.	6
3.2 Zielsetzung.	7
3.3 Anwendungsperspektiven.	8
4 Arbeits- und Ergebnisbericht	10
4.1 Mathematische und kontinuumsmechanische Grundlagen.	10
4.2 Analyse dünner Schalen mittels anisotroper polykonvexer Energien.	11
4.2.1 Dünne, kreisförmige Platte unter Folgelast.	13
4.2.2 Einachsiger Zugversuch eines dünnwandigen Zylinders.	14
4.2.3 Hyperbolische Schale unter lokal aufgebrachter Belastung.	15
4.2.4 Dünne, quadratische Platte mit zwei verschiedenen Fasertypen.	16
4.3 Anisotrope polykonvexe Energiefunktionen basierend auf kristallographisch motivierten Strukturtensoren.	18
4.3.1 Neues Konzept.	18
4.3.2 Konstruktion von polykonvexen anisotropen Energien.	22
4.3.3 Analyse der anisotropen polykonvexen Energiefunktionen.	24
5 Zusammenfassung und Ausblick	28
5.1 Zusammenfassung.	28
5.2 Ausblick.	28
6 CISM-Kurs in Udine im September 2007	30
7 Anhang	33

1 Allgemeine Angaben

1.1 DFG-Geschäftszeichen

NE 902/2-1 SCHR 570/6-1

1.2 Antragsteller

Hauptantragsteller:

Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Schröder
Institut für Mechanik

Abteilung Bauwissenschaften, Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Universität Duisburg-Essen, Universitätsstr. 15, 45117 Essen

Mitantragsteller:

Dr. rer. nat. habil. Patrizio Neff
Arbeitsgruppe für Partielle Differentialgleichungen und Anwendungen
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt, Schlossgartenstr. 7, 64289 Darmstadt

1.3 Wissenschaftliche Mitarbeiter/in

Dipl.-Ing. Vera Ebbing
Beschäftigungszeitraum: seit 1. Oktober 2006

1.4 Fachgebiet und Arbeitsrichtung

Prof. Schröder: Kontinuumsmechanik und Materialtheorie; Konstruktion anisotroper Materialgleichungen: Hyperelastizität, anisotrope Polykonvexität, anisotrope Plastizität und elektromechanisch gekoppelte Funktionskeramiken; Numerische Methoden in der Mechanik, insbesondere Finite-Element-Methoden.

Dr. Neff: Partielle Differentialgleichungen, mathematische Behandlung finiter Elastizität und finiter Elasto-Plastizität, geometrisch exakte Platten- und Schalentheorie, mikropolare und mikromorphe Theorien, Modellierung in der Materialtheorie, Funktionalanalysis.

1.5 Thema des Projekts

Konstruktion und Analyse anisotroper polykonvexer Energiefunktionen.

1.6 Berichtszeitraum, Förderungszeitraum

01.01.2006 - 31.12.2007

1.7 Kooperationspartner

Prof. Dr.-Ing. habil. Friedrich Gruttmann
Institut für Werkstoffe und Mechanik im Bauwesen
Technische Universität Darmstadt
Petersenstraße 12, 64287 Darmstadt

Klaus Saxe (Laborleiter)
Ingenieurwissenschaften – Abteilung Bauwissenschaften
Labor für Leichte Flächentragwerke
Universität Duisburg-Essen
45117 Essen

2 Veröffentlichungen und Konferenzvorträge

Veröffentlichungen

- [1] BALZANI, D.; GRUTTMANN, F.; SCHRÖDER, J.: Analysis of thin shells using anisotropic polyconvex energy densities. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 1015–1032
- [2] BALZANI, D.; SCHRÖDER, J.; GRUTTMANN, F.: Polyconvex energy densities with applications to anisotropic thin shells. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 7, 2008
- [3] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: Approximation of anisotropic elasticity tensors at the reference state with polyconvex energies. In: *Archive of Applied Mechanics* (2007). – Submitted for publication
- [4] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: On the construction of anisotropic polyconvex energy densities. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 7, 2008
- [5] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: Polyconvex models for arbitrary anisotropic materials. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2008. – Submitted for publication
- [6] NEFF, P.: Mathematical analysis of generalized convexity conditions. In: SCHRÖDER, J. (Hrsg.); NEFF, P. (Hrsg.): *Polyconvexity in Applied Mechanics*. Springer, 2008 (CISM Courses and Lectures Sept. 2007). – In preparation
- [7] SCHRÖDER, J.: On the construction of anisotropic polyconvex energy functions. In: SCHRÖDER, J. (Hrsg.); NEFF, P. (Hrsg.): *Polyconvexity in Applied Mechanics*. Springer, 2008 (CISM Courses and Lectures Sept. 2007). – In preparation
- [8] SCHRÖDER, J.; NEFF, P.; EBBING, V.: A framework for the construction of non-trivial anisotropic polyconvex energy densities. In: *Recent Advances in Mechanics*. 2007 (6th German-Greek-Polish Symposium). – Extended abstract
- [9] SCHRÖDER, J.; NEFF, P.; EBBING, V.: Anisotropic polyconvex energies on the basis of crystallographic motivated structural tensors. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (2008). – Submitted for publication

Konferenzvorträge

- [1] BALZANI, D.; SCHRÖDER, J.; GRUTTMANN, F.: Polyconvex energy densities with applications to anisotropic thin shells. In: *Annual Conference of the ICIAM-GAMM 2007 – Session: Anisotropic Materials*. Zürich, Schweiz, Juli 2007
- [2] BALZANI, D.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.; HOLZAPFEL, G. A.: Materially stable constitutive equations for arterial walls based on polyconvex energies- application to damage modeling and residual stresses. In: *5th World Congress of Biomechanics*. München, Deutschland, Juli/August 2006

- [3] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: A framework for the construction of anisotropic polyconvex energy densities. In: *Offenes Seminar der Arbeitsgruppe für Partielle Differentialgleichungen und Anwendungen, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt*. Darmstadt, Deutschland, Dezember 2007
- [4] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: A framework for the construction of anisotropic polyconvex energy densities. In: *20. Workshop Composite Forschung in der Mechanik: Funktional Gradierte Werkstoffe*. Paderborn, Deutschland, Dezember 2007
- [5] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: On the construction of anisotropic polyconvex energy densities. In: *Annual Conference of the ICIAM-GAMM 2007 – Session: Anisotropic Materials*. Zürich, Schweiz, Juli 2007
- [6] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: A framework for the construction of non-trivial anisotropic polyconvex energy densities. In: *7th GAMM Seminar on Microstructures*. Bochum, Deutschland, Januar 2008
- [7] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: Polyconvex models for arbitrary anisotropic materials. In: *Annual Conference of the GAMM 2008 – Session: Material Models in Solids*. Bremen, Deutschland, April 2008
- [8] NEFF, P.: Fünf Vorträge zu dem Thema: Polyconvexity; coercivity and growth conditions for anisotropic energies. In: *CISM-Kurs*. Udine, Italien, September 2007
- [9] SCHRÖDER, J.: Fünf Vorträge zu dem Thema: Polyconvexity in applied mechanics; 1. Foundations of continuum mechanics, 2. Theory of invariants / Anisotropy, 3. Generalized convexity conditions, 4. Anisotropic metrics / Polyconvexity, 5. Applications / Biomechanics and shells. In: *CISM-Kurs*. Udine, Italien, September 2007
- [10] SCHRÖDER, J.; NEFF, P.; EBBING, V.: A framework for the construction of non-trivial anisotropic polyconvex energy densities. In: *6th German-Greek-Polish Symposium: Recent Advances in Mechanics*. Alexandroupolis, Griechenland, September 2007

3 Ausgangsfragen und Zielsetzung

3.1 Stand der Forschung.

In Hinsicht auf eine physikalisch sinnvolle Materialmodellierung ohne Phasenzerfall muss die freie Energiefunktion quasikonvex sein. Ist dies nicht der Fall, so kann das ursprünglich homogene Material in koexistierende stabile Phasen zerfallen, siehe z.B. KRAWIETZ [31], BALL & JAMES [4], SILHAVÝ [51] und MÜLLER [38]. Rank-1-Konvexität ist eine notwendige – aber nicht hinreichende – Bedingung für Quasikonvexität, sie impliziert bei ausreichend glatten Energiefunktionen zusätzlich die Erfüllung der Legendre-Hadamard-Elliptizitätsbedingung (infinitesimale Rank-1-Konvexität, siehe z.B. BERTRAM, BÖHLKE & SILHAVÝ [9]). Letztere garantiert an jedem materiellen Punkt die Existenz von reellen Wellengeschwindigkeiten zu jedem Beanspruchungszustand und in jede Richtung, in diesem Fall sprechen wir auch von materieller Stabilität. Hierzu muss die Elliptizität des Akustiktensors nachgewiesen werden, siehe z.B. KNOWLES & STERNBERG [30], SCHRÖDER, NEFF & BALZANI [47], und CHIRITA, DANESCU & CIARLETTA [19].

Die mathematische Behandlung von Randwertproblemen beruht auf den sogenannten direkten Methoden der Variationsrechnung, d.h. man möchte eine minimierende Deformation φ der freien Energiefunktion $W(\mathbf{F} = \text{Grad}\varphi)$ bzgl. der gegebenen Randbedingungen finden. Für die Gewährleistung der Existenz von minimierenden Deformationen gewisser Variationsformulierungen im Rahmen der finiten Elastizität muss das Variationsfunktional schwach folgenunterhalbsstetig und koerziv sein. Die Quasikonvexitätsbedingung nach MORREY [37] stellt die schwache Folgenunterhalbsstetigkeit nur dann sicher, wenn weitere „unrealistische“ Wachstumsbedingungen erfüllt sind. Darüberhinaus ist die abstrakte Integral-Ungleichungsbedingung der Quasikonvexität für praktische Auswertungen kaum geeignet. Der Nachweis der materiellen Stabilität und Quasikonvexität der freien Energiefunktion kann durch die Gewährleistung ihrer Polykonvexität nach BALL [1; 2] erfolgen, siehe auch MARSDEN & HUGHES [34], CIARLET [20] und SILHAVÝ [51]. Polykonvexe Funktionen sind automatisch schwach folgenunterhalbsstetig, quasikonvex (siehe [37]) und Rank-1-konvex. Mit dem zusätzlichen Nachweis der Koerzivität wird die Existenz von Lösungen garantiert, siehe Abbildung 1.

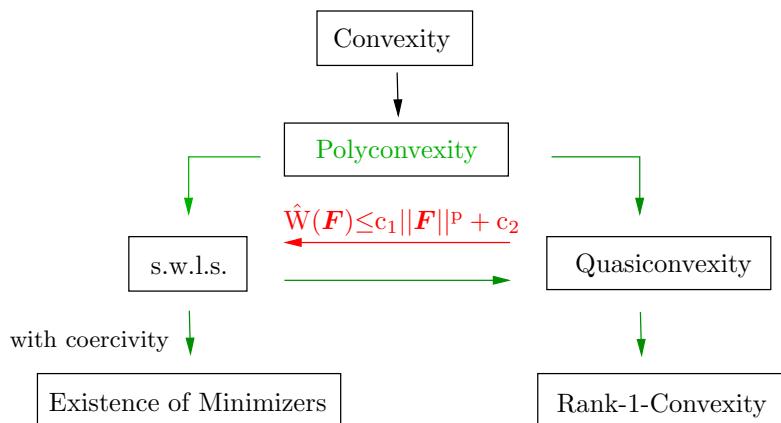


Abbildung 1: Implikationen der Konvexitätsbedingungen, Folgenunterhalbsstetigkeit (s.w.l.s.) und Existenz von Lösungen.

Zur Beschreibung von isotropen Materialien existieren einige Energiefunktionen, z.B. das Ogden-, Mooney-Rivlin- und Neo-Hooke-Modell, die die Polykonvexitätsbedingung erfüllen, siehe STEIGMANN [58], HARTMANN & NEFF [26] und MIELKE [36].

Für den Fall der Anisotropie stellte BALL [3] in „Some open problems in elasticity“ die Frage nach: „*Are there ways of verifying polyconvexity and quasiconvexity for a useful class of anisotropic stored-energy functions?*“ . Erste polykonvexe anisotrope Energiefunktionen für den Fall der transversalen Isotropie und Orthotropie wurden, nach Kenntnisstand der Autoren, erstmals in SCHRÖDER & NEFF [45; 46] vorgestellt. In diesen Arbeiten wurde die Anisotropie des Materials im Rahmen der Invariantentheorie beschrieben. Hier agieren Strukturtensoren, die die zugrundeliegende materielle Symmetrie des Materials charakterisieren, als zusätzliche Größen in den konstitutiven Gleichungen. Das sogenannte Konzept des Strukturtensors wurde in attraktiver Form von BOEHLER [15–17] eingeführt, siehe auch LIU [32]. Basierend auf dem Isotropisierungstheorem für anisotrope Tensorfunktionen kann anisotropes Materialverhalten durch isotrope Tensorfunktionen beschrieben werden. Eine übersichtliche Darstellung der Tensor-Repräsentationstheorie wird in ZHANG & RYCHLEWSKI [61], RYCHLEWSKI & ZHANG [43] und ZHENG & SPENCER [63] gegeben. Die wichtigsten Entwicklungen im Rahmen dieses Forschungsbereiches sind in ZHENG [62] zusammengefasst. Weitere Fallstudien und Erweiterungen, die im Wesentlichen auf [45; 46] gründen, sind in SCHRÖDER, NEFF & BALZANI [47], BALZANI [5] und ITSKOV & AKSEL [27] zu finden. Das Anwendungspotential von polykonvexen Energiefunktionen in der Biomechanik wurde u.a. in MARKERT, EHLERS & KARAJAN [33], BALZANI ET AL. [7], ITSKOV, EHRET & MAVRILAS [28] und EHRET & ITSKOV [25] nachgewiesen. Hier wurden anisotrope polykonvexe Modelle an experimentelle Daten für die Simulationen von biologischen Weichgeweben angepasst. Als offene Fragestellung bleibt: „*Are there ways of designing polyconvex stored-energy functions for all crystal classes?*“ .

3.2 Zielsetzung.

Ziel des bearbeiteten DFG-Projektes war die Entwicklung, Konstruktion und Analyse polykonvexer Funktionen für verschiedene Anisotropieklassen. Im Rahmen der anisotropen Elastizität existieren insgesamt 12 Anisotropiegruppen, 11 charakterisieren die 32 Kristallklassen und der letzte Typ beschreibt den transversal isotropen Fall. In diesem Zusammenhang wird auf die wichtigen Arbeiten von ŞUHUBİ [59], SMITH & RIVLIN [53; 54], SMITH, SMITH & RIVLIN [55], SPENCER [56] und LIU [32] sowie auf die darin angegebenen Referenzen verwiesen. Im einzelnen sollten folgende Aufgaben bearbeitet werden:

- 1) Weiterentwicklung orthotroper polykonvexer Funktionen, ausgehend von [45; 46]:
 - a) Konstruktion einer polykonvexen Grundbasis im Rahmen einer koordinateninvarianten Darstellung.
 - b) Konstruktion polykonvexer Polynomvarianten, in denen multiplikative Kombinationen unterschiedlicher Haupt- und Simultanvarianten vorkommen. Für eine vollständige Beschreibung sind Terme erforderlich, die Kopplungen zwischen den Simultanvarianten bzgl. der verschiedenen Strukturtensoren erfassen.

- 2) Erweiterung der polykonvexen Funktionen auf die durch zwei beliebig zueinander orientierten Fasern verstärkten Materialien.
- 3) Herleitung polykonvexer Energien für kubische und tetragonale Symmetrie.
- 4) Erfüllung von Zwangsbedingungen und Anpassung an nichtlineare Kennlinien:
 - a) Realisierung der spannungsfreien Referenzkonfiguration. Die Energiefunktion ist so zu konstruieren, dass die Referenzkonfiguration a priori spannungsfrei ist.
 - b) Abwärtskompatibilität: Anpassung an lineare Moduli. In diesem Schritt sollten die Parameter ausgesuchter polykonvexer Energien in der Art bestimmt werden, dass sich bei einer Linearisierung in der Nähe der unbelasteten Ausgangskonfiguration die bekannten Elastizitätsmoduli der linearen Theorie ergeben.
 - c) Anpassung der Energiefunktion an nichtlineare Kennlinien. Hier sollten Anpassungen der Energien an charakteristische Spannungs-Dehnungs-Kennlinien mit ausgeprägter Anisotropie erfolgen; erste Ansätze hierzu finden sich in SCHRÖDER, NEFF & BALZANI [47].

Als Basis sollte die Arbeit SCHRÖDER & NEFF [46] herangezogen werden. An dieser Stelle sei erwähnt, dass während des Bearbeitungszeitraums eine direkte Erweiterung von [46] zur Beschreibung von kubischen Materialien ebenfalls in KAMBOUCHEV, FERNANDEZ & RADOVITZKY [29] vorgeschlagen wurde. Hier wurde ein einzelner vierstufiger Strukturtensor, der die assoziierte Symmetriegruppe charakterisiert, vorgestellt.

3.3 Anwendungsperspektiven.

Anisotrope Materialien haben einen großen Anwendungsbereich und treten in vielfältiger Form auf. Das Interesse an computergestützten Simulationen von Deformationsprozessen anisotroper Festkörper und die damit einhergehende Forderung nach stabilen Algorithmen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode ist somit stets vorhanden. Die Verwendung von polykonvexen Energiefunktionen für das elastische Grundverhalten der Materialien bietet in dieser Hinsicht zwei wesentliche Vorteile: Existenz von Minimierern des zugrundeliegenden Randwertproblems und die damit intrinsisch verbundene materielle Stabilität (Rank-1-Konvexität). Daher ist die Erweiterung polykonvexer Funktionen für die Beschreibung anisotropen Materialverhaltens von großer Bedeutung.

Wichtige Anwendungen anisotroper Energiefunktionen sind zum einen bei der Beschreibung des Verhaltens vieler vorbehandelter Stähle und Mehrphasenstähle, die sich durch ihre hohe Festigkeit und eine ausgeprägte Duktilität auszeichnen, zu finden. Insbesondere bei der Modellierung finiter anisotroper Elasto-Plastizität basierend auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in elastische und plastische Anteile spielt die Polykonvexität im Hinblick auf mathematische Existenzaussagen eine entscheidende Rolle. Bei der Wahl einer polykonvexen freien Energiefunktion bleibt bei „eingefrorener Plastizität“ die Polykonvexitätseigenschaft erhalten. Daraus ergibt sich, dass das Problem, den sogenannten *Trial* - Schritt zu lösen, prinzipiell wohlgestellt ist, siehe NEFF [39].

Zum anderen ist in diesem Zusammenhang die Gruppe der Faserverbundwerkstoffe zu nennen. Je nach Aufbau und Orientierung der eingebetteten Fasern stellt sich ein orthotropes Verhalten der Verbundmaterialien ein. Die Darstellung von mittels zwei beliebig zueinander orientierten Fasern verstärkten Materialien durch polykonvexe Funktionen ist ebenfalls als ingenieurmäßig relevant anzusehen, da solche Materialien z.B. sowohl in Arterienwänden als auch in Faserverbundkonstruktionen vorkommen. Desweiteren besitzen z.B. viele Metalle eine kubische Kristallstruktur und einige Mineralien und Keramiken, insbesondere biokompatible keramische Mineralien, eine tetragonale Kristallstruktur, so dass auch hier die Forderung nach der Simulation von Deformationen dieser Materialien mittels polykonvexer Funktionen besteht.

Für die Entwicklung von Leichtbaukonstruktionen, wie z.B. von witterungsbeständigen Sonnensegeln oder Dachkonstruktionen, wird die Vorhersage von Deformations- und Spannungsverteilungen in dünnen Schalen benötigt. In zahlreichen Fällen kommen spezielle Materialien zum Einsatz, die aus einem gewebten Faserverbund, wie z.B. aus Glas-, Textil-

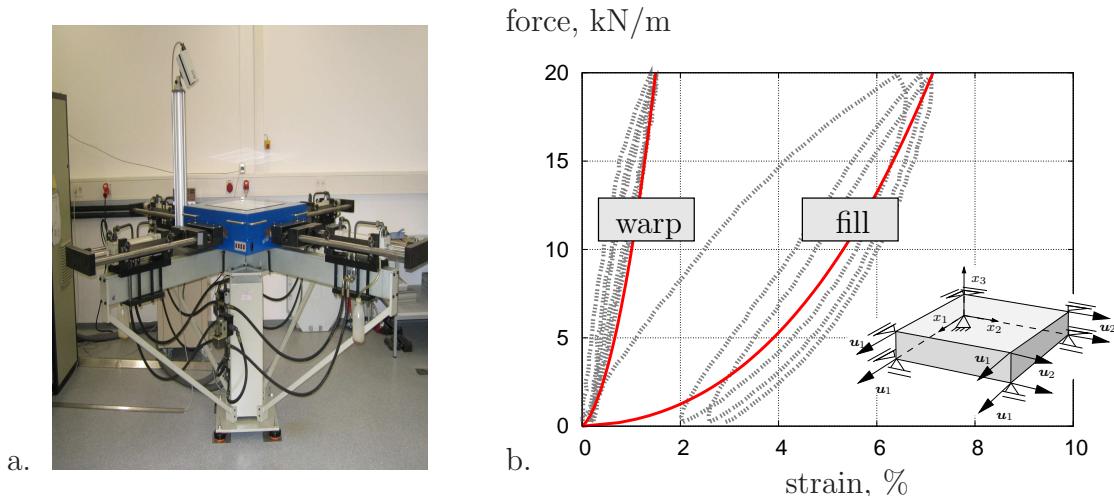


Abbildung 2: a) Maschine für zweiachsige Zugversuche; maximale Zugkraft: 250 kN/m, Genauigkeitsklasse: 1%, Genauigkeit der Längenänderungen: 50 µm, b) Lastdehnungsverhalten eines PVC-Polyester Verbundwerkstoffes.

oder Synthetikfasern, eingebettet in einer silikon-, polymer- oder gummiartigen Matrix, bestehen. Somit müssen hier ein hohes nichtlineares Materialverhalten und starke Anisotropieeffekte des Materials infolge der unterschiedlichen Eigenschaften in Kett- und Schussrichtung beschrieben werden. In Abbildung 2a ist die Maschine für die Durchführung zweiachsiger Zugversuche von faserverstärkten Materialien des Labors für Leichte Flächentragwerke der Universität Duisburg-Essen dargestellt. Das hochgradig nichtlineare Last-Dehnungsverhalten eines typischen Verbundwerkstoffes, das anhand eines derartigen Zugversuchs ermittelt wurde, ist in Abbildung 2b zu sehen.

4 Arbeits- und Ergebnisbericht

Basierend auf den Arbeiten BALZANI, GRUTTMANN & SCHRÖDER [6] sowie SCHRÖDER, NEFF & EBBING [48] und EBBING, SCHRÖDER & NEFF [22], die im Anhang dieses Berichts zu finden sind, werden im Folgenden die Ergebnisse des DFG-Projektes erläutert.

4.1 Mathematische und kontinuumsmechanische Grundlagen.

Es sei $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^3$ die Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt $t = t_0$ und $\mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^3$ die Momentankonfiguration eines materiellen Körpers. Die nichtlineare Deformationsabbildung $\varphi_t : \mathcal{B}_0 \mapsto \mathcal{B}_t$ bildet bei einem festgehaltenen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ Punkte $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ der Referenzkonfiguration auf Punkte der Momentankonfiguration $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ ab. Eine wesentliche kinematische Größe in der Kontinuumsmechanik ist der Deformationsgradient, der definiert ist als

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) := \text{Grad} \varphi_t(\mathbf{X}), \quad (4.1)$$

mit der Jacobi-Determinante $J(\mathbf{X}) := \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) > 0$. Für die geometrische Interpretation von Invarianten gebrauchen wir Ausdrücke, die auf Abbildungen von infinitesimalen Linien- $d\mathbf{X}$, Flächen- $d\mathbf{A} = \mathbf{N}dA$ und Volumenelementen dV basieren. Die assoziierten räumlichen Größen $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{a} = \mathbf{n}da$ and dv ergeben sich aus

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad \mathbf{n}da = \text{Cof}[\mathbf{F}]\mathbf{N}dA \quad \text{and} \quad dv = \det[\mathbf{F}] dV. \quad (4.2)$$

Die Argumente $(\mathbf{F}, \text{Cof}\mathbf{F}, \det\mathbf{F})$ spielen auch bzgl. der Definition der Polykonvexität eine wichtige Rolle:

Polykonvexität: $\mathbf{F} \mapsto W(\mathbf{F})$ ist polykonvex genau dann, wenn eine Funktion $P : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (i.A. nicht eindeutig) existiert, so dass gilt

$$W(\mathbf{F}) = P(\mathbf{F}, \text{Cof}\mathbf{F}, \det\mathbf{F})$$

und die Funktion $\mathbb{R}^{19} \mapsto \mathbb{R}$, $(\mathbf{F}, \text{Cof}\mathbf{F}, \det\mathbf{F}) \mapsto P(\mathbf{F}, \text{Cof}\mathbf{F}, \det\mathbf{F})$ konvex für alle Punkte $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ ist. ■

Der Kofaktor des Deformationsgradienten \mathbf{F} ist für alle invertierbaren \mathbf{F} dabei definiert als $\text{Cof}\mathbf{F} = \det[\mathbf{F}]\mathbf{F}^{-T}$. Im Rahmen der anisotropen finiten Elastizität haben das Prinzip der materiellen Objektivität und das Prinzip der materiellen Symmetrie eine große Bedeutung bei der Aufstellung von Materialgleichungen. Das Prinzip der materiellen Objektivität wird erfüllt, indem die bekannten reduzierten konstitutiven Gleichungen in Termen des rechten Cauchy-Green Deformationstensors $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ genutzt werden, d.h.

$$\psi(\mathbf{C}) = W(\mathbf{F}). \quad (4.3)$$

Das Prinzip der materiellen Symmetrie fordert die Invarianz der konstitutiven Gleichungen in Bezug auf die Transformationen $\mathbf{Q} \in \mathcal{G} \subset \text{O}(3)$ der materiellen Symmetriegruppe $\mathcal{G} \subset \text{O}(3)$. Somit gilt für die reduzierten Materialgleichungen folgende Bedingung:

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{G}. \quad (4.4)$$

Die Anisotropie des Materials kann mit Hilfe sogenannter Strukturtensoren \mathbf{G} , siehe BOEHLER [15–17], erfasst werden, die invariant bzgl. Transformationen mit Elementen der materiellen Symmetriegruppe sein müssen:

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \subset \mathrm{O}(3). \quad (4.5)$$

Führen wir den Strukturtensor als weiteres Tensorargument in der freien Energiefunktion ein, so folgern wir

$$\psi(\mathbf{C}, \mathbf{G}) = \psi(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{O}(3). \quad (4.6)$$

Somit kann die isotrope Tensorfunktion (4.6) in den Haupt- und Simultaninvarianten der Argumente \mathbf{C} und \mathbf{G} dargestellt werden. Die Spezifizierung der Strukturtensoren für verschiedene Anisotropieklassen erfolgt in den folgenden Abschnitten. Bereits hier sei angemerkt, dass für die vollständige Beschreibung der 12 mechanisch relevanten Anisotropieklassen jeweils ein einzelner Strukturtensor ausreicht. Diese Strukturtensoren sind, abhängig von der zu beschreibenden Klasse, von zweiter, vierter oder sechster Ordnung, siehe z.B. ZHENG & SPENCER [63] und ZHENG [62]. Für skalarwertige Funktionen in Tensorargumenten höherer Stufe als zwei existieren jedoch keine brauchbaren Tensorrepräsentationstheoreme.

4.2 Analyse dünner Schalen mittels anisotroper polykonvexer Energien.

In der Arbeit BALZANI, GRUTTMANN & SCHRÖDER [6] wurden anisotrope, dünne Schalen basierend auf anisotropen polykonvexen Energiefunktionen analysiert. Die verwendete nichtlineare Schalentheorie beruht auf der Reissner-Mindlin Theorie. Details bzgl. der FE-Formulierung sowie des verwendeten Variationsfunktionalen und der zugehörigen Linearisierung finden sich in [6], die dem Anhang des vorliegenden Berichts beigefügt wurde. Für eine ausgezeichnete Richtung \mathbf{a} , mit $|\mathbf{a}| = 1$, des Materials definieren wir den Strukturtensor wie folgt

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \mathbf{Q} \mathbf{M} \mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \subset \mathrm{O}(3). \quad (4.7)$$

Für die Formulierung der transversal isotropen Verzerrungsenergiefunktion wird die Polynombasis

$$\mathcal{P}_{ti} = \{I_1, I_2, I_3, J_4, J_5\} \quad (4.8)$$

gewählt, wobei I_1, I_2, I_3 die Hauptinvarianten des rechten Cauchy-Green Deformations-tensors, d.h.

$$I_1 = \mathrm{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \mathrm{tr} [\mathrm{Cof} \mathbf{C}], \quad I_3 = \det \mathbf{C}, \quad (4.9)$$

und J_4 und J_5 die aus den symmetrischen, zweistufigen Tensoren \mathbf{C} und \mathbf{M} bestehenden Simultaninvarianten darstellen, d.h.

$$J_4 = \mathrm{tr} [\mathbf{C} \mathbf{M}], \quad J_5 = \mathrm{tr} [\mathbf{C}^2 \mathbf{M}], \quad (4.10)$$

siehe z.B. SPENCER [56; 57]. In dem Fall, dass mehr als eine Faserrichtung des Materials vorliegt, werden die folgenden allgemeinen Simultaninvarianten berücksichtigt

$$J_4^{(a)} = \mathrm{tr} [\mathbf{C} \mathbf{M}_{(a)}], \quad J_5^{(a)} = \mathrm{tr} [\mathbf{C}^2 \mathbf{M}_{(a)}]. \quad (4.11)$$

Der Tensor $\mathbf{M}_{(a)} = \mathbf{a}_{(a)} \otimes \mathbf{a}_{(a)}$ kennzeichnet hier den allgemeinen Strukturtensor für jede bestimmte Faserrichtung. Infolge des Produktionsprozesses existieren in den meisten membranähnlichen Materialien zwei unterschiedliche Faserrichtungen (Kett- und Schussrichtung). Somit wird in diesem Fall die Polynombasis

$$\mathcal{P}_{2ti} = \{I_1, I_2, I_3, J_4^{(1)}, J_5^{(1)}, J_4^{(2)}, J_5^{(2)}\} \quad (4.12)$$

der Konstruktion der Energiefunktion zugrundegelegt. Überdies wurde hier angenommen, dass sich die Energiefunktion aus einem isotropen Anteil für die Wiedergabe des Matrixverhaltens und einem transversal isotropen Anteil für die Beschreibung der jeweiligen Fasergruppe zusammensetzt; es gilt

$$\psi := \psi^{iso} + \sum_{a=1}^2 \psi_{(a)}^{ti}. \quad (4.13)$$

Eine geeignete isotrope polykonvexe Energiefunktion ist gegeben mit

$$\psi^{iso} = c_1 \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + \varepsilon_1 \left(I_3^{\varepsilon_2} + \frac{1}{I_3^{\varepsilon_2}} - 2 \right), \quad c_1 > 0, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 1. \quad (4.14)$$

Da diese Energiefunktion koerziv ist, ist jede additive Kombination mit ψ^{iso} ebenfalls koerziv. Für die Darstellung des Materialverhaltens in Faserrichtung wird die polykonvexe Invariante

$$K_3 = \text{tr}[\text{Cof}[\mathbf{C}](\mathbf{1} - \mathbf{M})] = I_1 J_4 - J_5 \quad (4.15)$$

verwendet. Als transversal isotrope Energiefunktion wählen wir

$$\psi^{ti} = \begin{cases} \alpha_1 (K_3 - 2)^{\alpha_2} & \text{für } K_3 \geq 2 \\ 0 & \text{für } K_3 < 2, \end{cases} \quad (4.16)$$

mit $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 0$. Für einfach faserverstärkte Materialien weist die Energiefunktion somit die Struktur

$$\psi_{aniso1} = \psi^{iso} + \alpha_1 (K_3 - 2)^{\alpha_2}, \quad (4.17)$$

mit $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 2$ und $\langle(\bullet)\rangle := ((\bullet) + |(\bullet)|)/2$ auf. Für zweifach faserverstärkte Materialien erscheint die Energiefunktion in der Form

$$\psi_{aniso2} = \psi^{iso} + \alpha_1^{(1)} \langle K_3^{(1)} - 2 \rangle^{\alpha_2^{(1)}} + \alpha_1^{(2)} \langle K_3^{(2)} - 2 \rangle^{\alpha_2^{(2)}}. \quad (4.18)$$

Im Folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Beispiele kurz dargestellt. Um die Anisotropieeffekte besser beurteilen zu können, wurde stets ein Vergleich zwischen der Simulation einer anisotropen Schale und einer isotropen Schale durchgeführt. Zunächst wurde eine kreisförmige Platte, ein Zylinder und eine hyperbolische Schale berachtet, die jeweils aus einem einfach faserverstärkten Material bestehen. Da faserverstärkte Membrane oftmals ein unterschiedliches Verhalten in Kett- und Schussrichtung aufweisen, wurde desweiteren eine quadratische Platte mit ausgeprägt unterschiedlichen Spannungs-Dehnungskurven in den zwei Richtungen untersucht. Für weitere Erläuterungen wird auf die Arbeit [6] im Anhang verwiesen.

4.2.1 Dünne, kreisförmige Platte unter Folgelast. Im ersten Beispiel wird eine dünne, kreisförmige, einfach faserverstärkte Platte mit einem Durchmesser von 400 cm und einer Dicke von 0.3 cm unter der Einwirkung einer Folgelast senkrecht zur Plattenmittelfläche analysiert. Die Orientierung der ausgezeichneten Richtung ist in Abbildung 3c dargestellt. Die Materialparameter, die in der Energiefunktion (4.17) berücksichtigt werden, sind

$$c_1 = 100.0 \text{ kN/cm}^2, \quad \varepsilon_1 = 2000.0 \text{ kN/cm}^2, \quad \varepsilon_2 = 5.0, \quad (4.19)$$

$$\alpha_1 = 14000.0 \text{ kN/cm}^2, \quad \alpha_2 = 2.3.$$

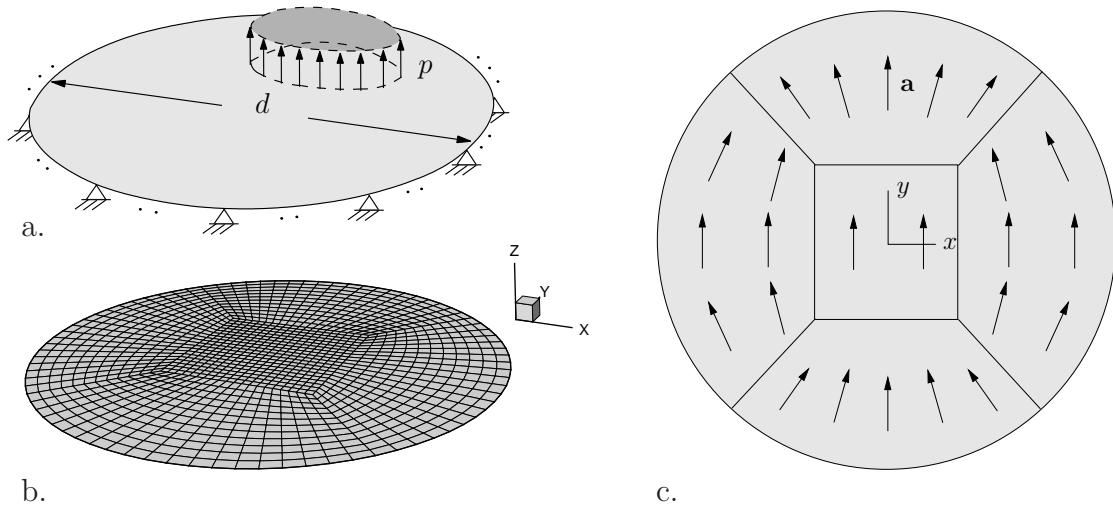


Abbildung 3: a) System mit Randbedingungen, b) Diskretisierung mit 1360 vierknotigen Schalenelementen und c) Orientierung der ausgezeichneten Richtung a .

Wie in Abbildung 4 erkennbar ist, verhält sich die isotrope Platte während der Deformation rotationssymmetrisch, wohingegen sich bei der anisotropen Platte ein ovales Plateau in der Mitte der Platte ausbildet.

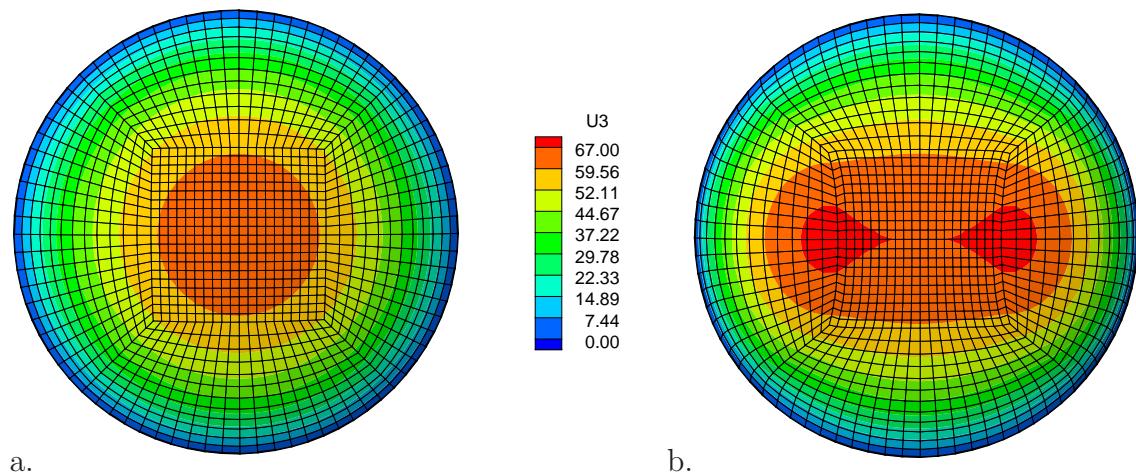


Abbildung 4: Vertikale Verschiebungen: a) isotrope Platte und b) anisotrope Platte.

4.2.2 Einachsiger Zugversuch eines dünnwandigen Zylinders. Als zweites Beispiel wird ein Zugversuch eines dünnwandigen Zylinders durchgeführt. In den Abbildungen 5a,b ist das System mit den Randbedingungen bzw. die Diskretisierung mit 450 vierknotigen Schalenelementen zu sehen. Es wurde eine spiralförmige Anordnung der ausgezeichneten Richtung \mathbf{a} angenommen und die Materialparameter in (4.17) lauten: $c_1 = 100.0 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_1 = 2000.0 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_2 = 10.0$, $\alpha_1 = 14000.0 \text{ kN/cm}^2$, $\alpha_2 = 2.3$.

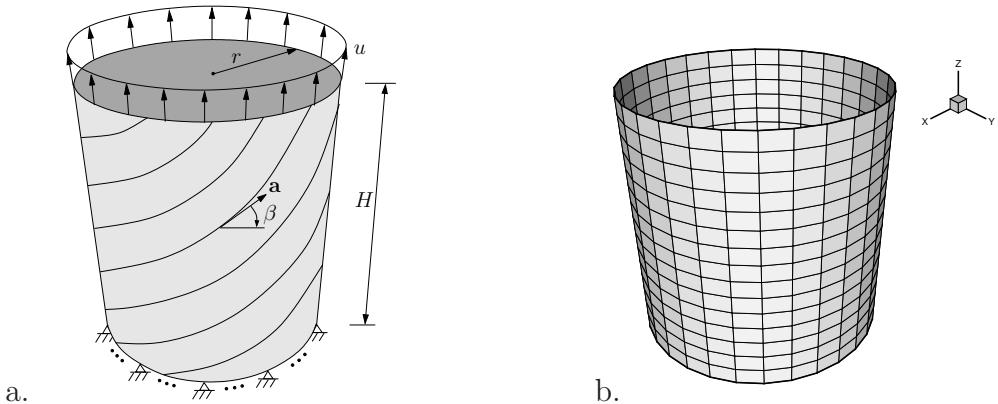


Abbildung 5: Dünnwandiger Zylinder: a) System mit Randbedingungen und b) Diskretisierung mit 450 vierknotigen Schalenelementen.

In Abbildung 6 können wir beobachten, dass sich der anisotrope Zylinder im Gegensatz zum isotropen Zylinder um die z -Achse verdreht. Der unterschiedliche Verlauf der Verschiebungen in x -Richtung und die Einschnürung des oberen Zylinderdurchmessers verdeutlichen dieses Phänomen.

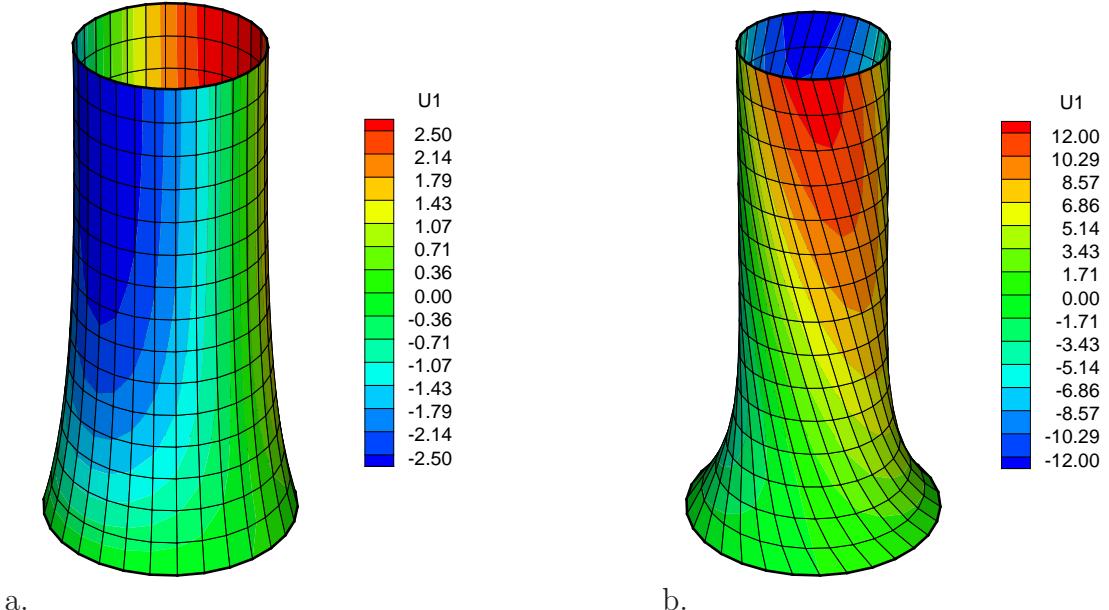


Abbildung 6: Verschiebungen in x -Richtung der a) isotropen und b) anisotropen Schale.

4.2.3 Hyperbolische Schale unter lokal aufgebrachter Belastung. Als drittes Beispiel im Rahmen der Beschreibung von einfach faserverstärkten Materialien wurde eine hyperbolische Platte mit lokal verteilten Lasten untersucht, siehe Abbildung 7. Die Materialparameter in (4.17) weisen die folgenden Werte auf:

$$c_1 = 100.0 \text{ kN/m}^2, \quad \varepsilon_1 = 2000.0 \text{ kN/m}^2, \quad \varepsilon_2 = 10.0, \quad (4.20)$$

$$\alpha_1 = 1000.0 \text{ kN/m}^2, \quad \alpha_2 = 2.3.$$

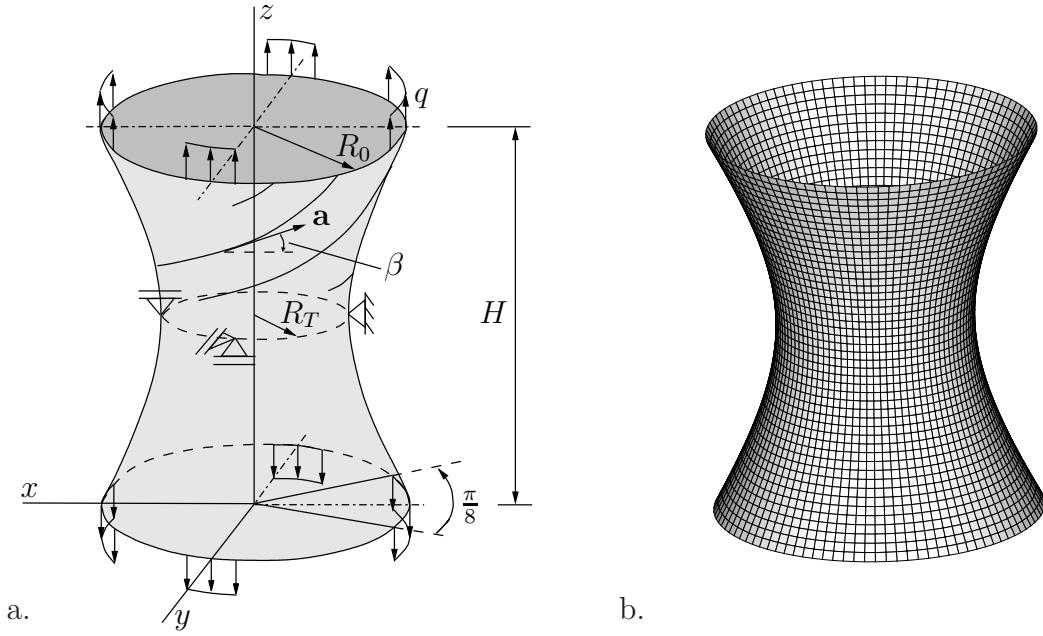


Abbildung 7: Hyperbolische Schale: a) System mit Randbedingungen und b) Diskretisierung mit 4608 vierknotigen Schalenelementen.

Obwohl nur Lasten symmetrisch in z -Richtung aufgebracht wurden, kann eine Rotation

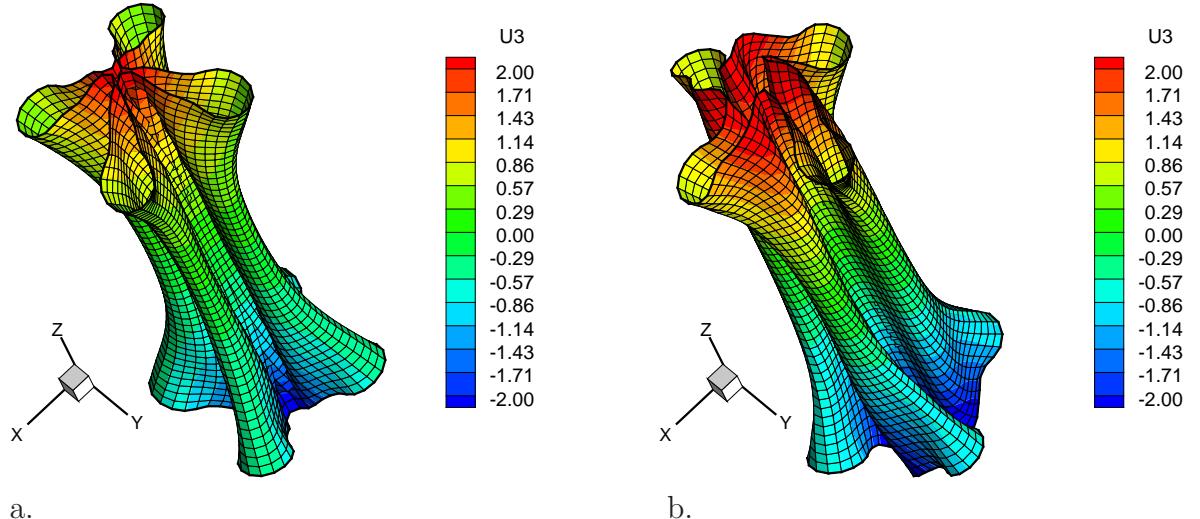


Abbildung 8: Vertikale Verschiebung: a) isotrope und b) transversal isotrope Schale.

des anisotropen Hyperboloids um die z -Achse in Abbildung 8b festgestellt werden. Dies ist auch in diesem Beispiel auf die unsymmetrische Anordnung der steifen Fasern zurückzuführen, die diagonal entgegen der Rotationsrichtung orientiert sind. Der isotrope Hyperboloid hingegen weist keine Rotation um die z -Achse auf, siehe Abbildung 8a.

4.2.4 Dünne, quadratische Platte mit zwei verschiedenen Fasertypen. Als letztes Beispiel wurde eine dünne, quadratische Platte, bestehend aus einem typischen Material leichter Flächentragwerke mit charakteristischem Verhalten in Kett- und Schussrichtung, betrachtet.

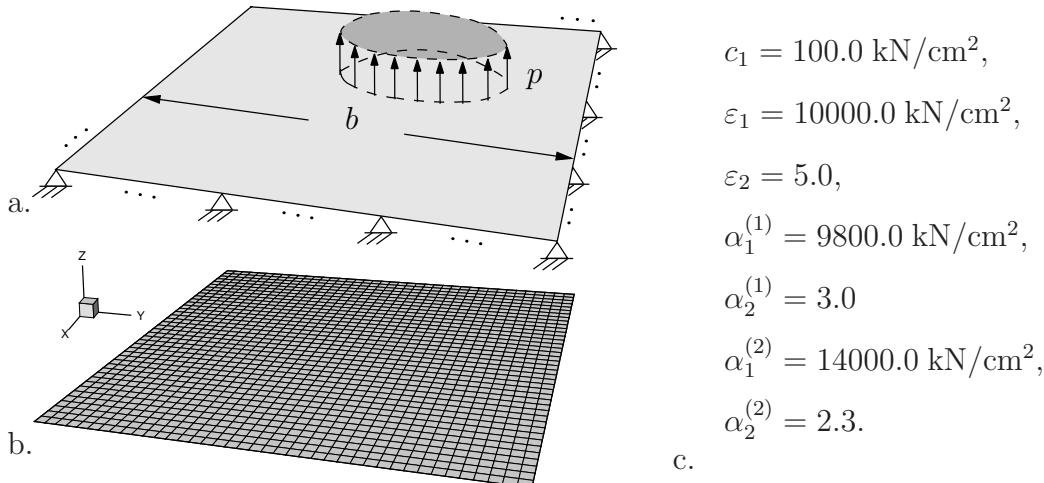


Abbildung 9: Dünne, rechteckige Platte: a) System mit Randbedingungen und b) Diskretisierung mit 1600 vierknotigen Schalenelementen, c) Materialparameter in (4.17).

Die Platte ist 100.0 cm breit und 0.2 cm dick. Die Kettrichtung wird in x -Richtung, d.h. $\mathbf{a}_{(1)} = (1, 0, 0)^T$, und die Schussrichtung in y -Richtung, d.h. $\mathbf{a}_{(2)} = (0, 1, 0)^T$, gelegt.

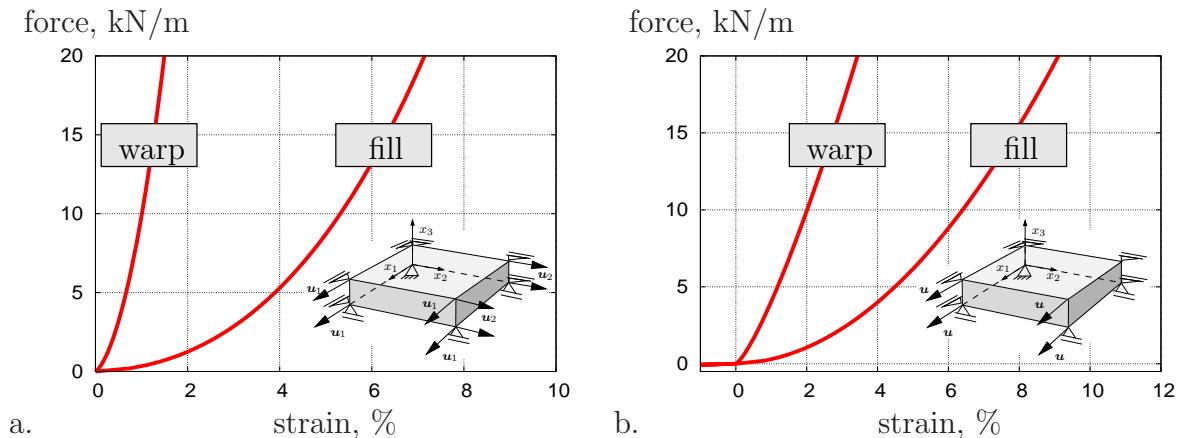


Abbildung 10: Last-Verschiebungsverhalten infolge eines a) zweiachsigen Zugversuchs und b) einachsigen Zug-/Druckversuchs in x -Richtung („warp“) und y -Richtung („fill“).

Aus einer „groben“ Anpassung der Simulationsergebnisse an die experimentellen Last-Verschiebungskurven des biaxialen Zugversuchs und des einachsigen Zug-/Druckversuchs in x - und y -Richtung ergeben sich die Materialparameter aus Abbildung 9c für die Energiefunktion (4.18).

Für die numerische Analyse wurde der Lastparameter gesteigert bis eine maximale vertikale Verschiebung von $u_3 = 13.0$ cm der isotropen und anisotropen Platte erreicht wurde. Gemäß der Konvergenzstudie, die für die isotrope Platte unter der Berücksichtigung verschiedener Diskretisierungen der Platte durchgeführt wurde und Abbildung 11 entnommen werden kann, wird eine Diskretisierung mit 1600 vierknotigen Schalenelementen gewählt.

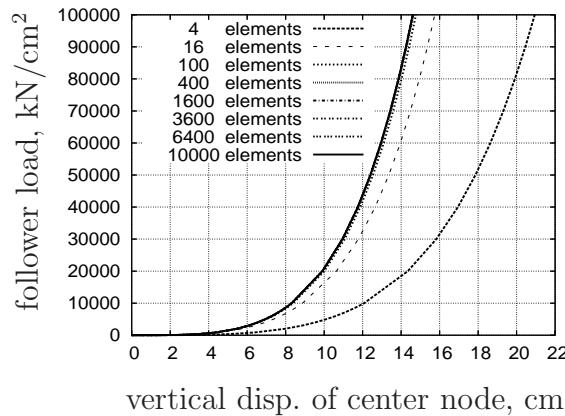


Abbildung 11: Last vs. vertikaler Verschiebung des Mittelpunktes der anisotropen Platte.

Betrachtet man den Verlauf der vertikalen Verschiebung in Abbildung 12, so stellt man eine vierfache Symmetrie des Deformationsmusters der isotropen Platte und eine zweifache Symmetrie der Durchbiegung der anisotropen Platte fest. Dieser Verformungszustand folgt aus den steiferen Fasern in Kettrichtung gegenüber den Fasern in Schussrichtung, siehe Abbildung 10.

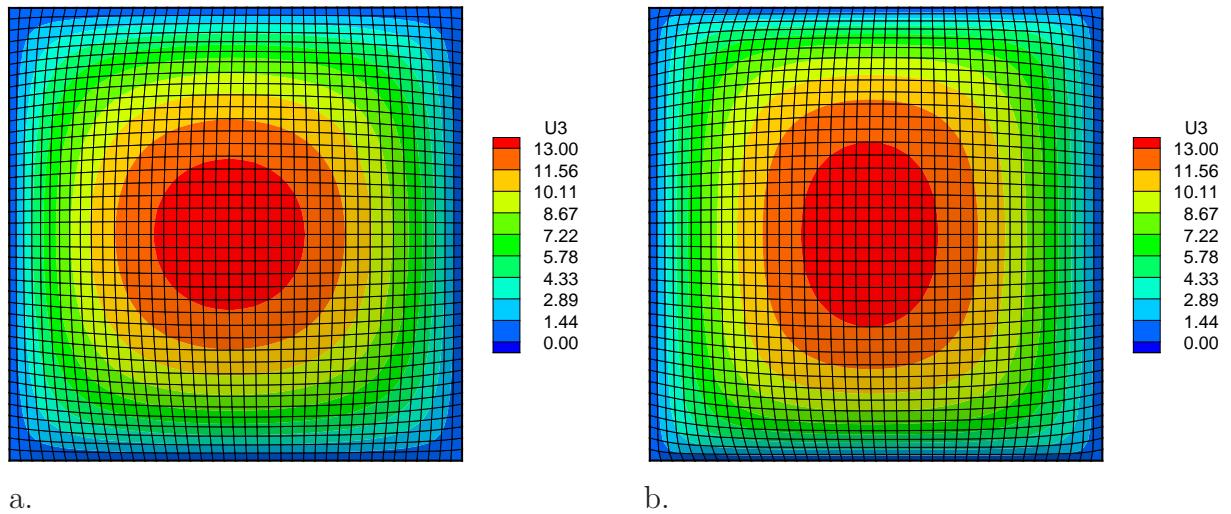


Abbildung 12: Konturdarstellungen der vertikalen Verschiebungen u_3 : a) isotroper und b) anisotroper Fall.

4.3 Anisotrope polykonvexe Energiefunktionen basierend auf kristallographisch motivierten Strukturtensoren.

4.3.1 Neues Konzept. Die 32 Kristallklassen können in sieben Kristallsysteme eingeteilt werden. Die Symmetrie sowie die anisotropen physikalischen Eigenschaften eines Kristalls sind von der Geometrie des Kristallgitters abhängig. Insgesamt werden mit den sieben Kristallsystemen 14 sogenannte Bravaisgitter assoziiert. Jedes Bravaisgitter wird durch drei Basisvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, mit $a = |\mathbf{a}_1|, b = |\mathbf{a}_2|, c = |\mathbf{a}_3|$, und drei von den Achsen eingeschlossenen Winkeln α, β, γ definiert, siehe Abbildung 13 und die Tabelle 1.

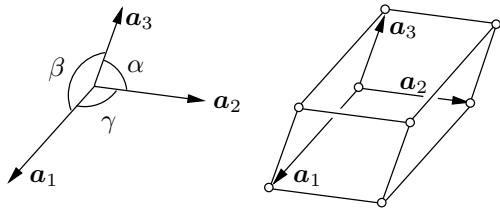


Abbildung 13: Bravaisgitter mit den Basisvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ und den von den Achsen eingeschlossenen Winkeln α, β, γ .

Die Beziehungen zwischen den Symmetrien eines Kristalls und seinen physikalischen Eigenschaften werden im Prinzip von Neumann [41] grundlegend beschrieben. Dieses besagt, dass *die Symmetrieelemente, die mit den physikalischen Eigenschaften eines Kristalls assoziiert werden, mindestens die Symmetrie der Punktgruppe eines Kristalls beinhalten müssen*.

Tabelle 1: Die sieben Kristallsysteme

Nr.	Kristallsystem	Kantenlängen	Winkel
1	triklin	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
2	monoklin	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ; \gamma \neq 90^\circ$
3	trigonal	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$
4	hexagonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$
5	orthorhombisch	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
6	tetragonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
7	kubisch	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

Die Hauptidee des vorgeschlagenen Konzepts basiert auf der Einführung eines zweistufigen, symmetrischen und positiv definiten Tensors

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T, \quad (4.21)$$

der selbstverständlich die Invarianzbedingung (4.5) erfüllen muss, siehe EBBING, SCHRÖDER & NEFF [22–24], SCHRÖDER, NEFF & EBBING [48]. \mathbf{G} kann im gewissen

Sinn als Strukturtensor, wie er von BOEHLER [15; 16] eingeführt wurde, angesehen werden. Im Gegensatz zu den herkömmlichen Strukturtensoren muss \mathbf{G} positiv definit (bzw. positiv semi-definit) sein.

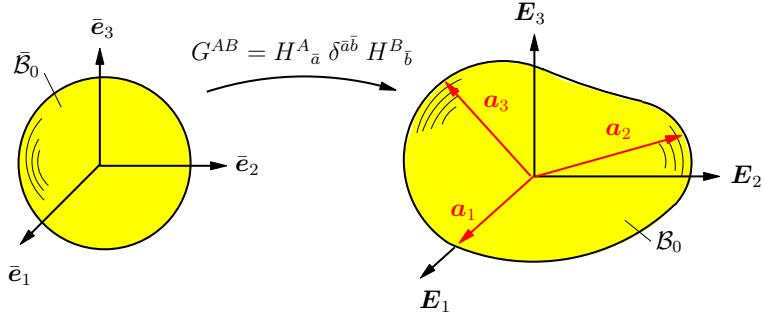


Abbildung 14: Fiktive Referenzkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}_0$ und reale Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 .

Zur Interpretation dieser Größe führen wir in Analogie zu z.B. MENZEL & STEINMANN [35] eine fiktive Referenzkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}_0$ ein. Die Transformation \mathbf{H} ist eine lineare Abbildung, die die kartesischen Basisvektoren $\bar{\mathbf{e}}_i \in \bar{\mathcal{B}}_0$ der fiktiven Referenzkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}_0$ auf kristallographisch motivierte Basisvektoren $\mathbf{a}_i \in \mathcal{B}_0$ der realen Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 abbildet, d.h. $\mathbf{H} : \bar{\mathbf{e}}_i \mapsto \mathbf{a}_i$:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{H} \bar{\mathbf{e}}_i. \quad (4.22)$$

Der Tensor $\mathbf{G} = \mathbf{H} \mathbf{H}^T$ kann hier demzufolge als *push-forward* der kartesischen Metrik der fiktiven Referenzkonfiguration auf die reale Referenzkonfiguration interpretiert werden. Detaillierte Darstellungen des triklinen und monoklinen Strukturtensors sind der Tabelle 2 zu entnehmen. Für die Formulierung der Energiefunktion werden die drei polykonvexen Hauptinvarianten des rechten Cauchy-Green Deformationstensors

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \text{tr} [\text{Cof} \mathbf{C}] \quad I_3 = \det \mathbf{C}, \quad (4.23)$$

und die gemischten Invarianten, bestehend aus dem rechten Cauchy-Green Deformationstensor und dem Strukturtensor,

$$J_4 = \text{tr} [\mathbf{C} \mathbf{G}], \quad J_5 = \text{tr} [\text{Cof} [\mathbf{C}] \mathbf{G}] = \text{tr} [\mathbf{C}^2 \mathbf{G}] - I_1 J_4 + \text{tr} \mathbf{G} I_2, \quad (4.24)$$

verwendet. Diese Invarianten (4.24) sind konvex bzgl. ihrer Argumente \mathbf{F} bzw. $\text{Cof} \mathbf{F}$ und somit polykonvex.

Polykonvexitätsbeweis. Unter Berücksichtigung der Identität $(\text{tr} [\mathbf{C} \mathbf{G}])^k = (\text{tr} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{G}])^k = \|\mathbf{F} \mathbf{H}\|^{2k} = \langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \mathbf{F} \mathbf{H} \rangle^k$, $k \geq 1$, erhalten wir

$$\begin{aligned} D_F(\langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \mathbf{F} \mathbf{H} \rangle^k) \cdot \xi &= 2k \langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \mathbf{F} \mathbf{H} \rangle^{k-1} \langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \xi \mathbf{H} \rangle \\ D_F^2(\langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \mathbf{F} \mathbf{H} \rangle^k) \cdot (\xi, \xi) &= 2k \langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \mathbf{F} \mathbf{H} \rangle^{k-1} \langle \xi \mathbf{H}, \xi \mathbf{H} \rangle \\ &\quad + 4k(k-1) \langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \mathbf{F} \mathbf{H} \rangle^{k-2} \langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \xi \mathbf{H} \rangle^2 \\ &= 2k \|\mathbf{F} \mathbf{H}\|^{2k-2} \|\xi \mathbf{H}\|^2 \\ &\quad + 4k(k-1) \|\mathbf{F} \mathbf{H}\|^{2k-4} \langle \mathbf{F} \mathbf{H}, \xi \mathbf{H} \rangle^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Demzufolge können nun Funktionen für beliebige Anisotropieklassen konstruiert werden, die automatisch polykonvex sind. Aus der Tensor-Repräsentationstheorie wissen wir, dass der Gebrauch von ein- und zweistufigen Strukturtensoren zu vollständigen Beschreibungen der triklinen, monoklinen und orthorhombischen Symmetrien sowie der transversalen Isotropie führt.

Tabelle 2: Trikliner und monokliner Strukturtensor $\mathbf{G} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$

<p>Triklines System mit $\mathbf{a}_1 \parallel \bar{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{a}_2 \perp \bar{\mathbf{e}}_3$:</p> $\mathbf{H}^a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^a = \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{d} & \tilde{e} \\ \tilde{d} & \tilde{b} & \tilde{f} \\ \tilde{e} & \tilde{f} & \tilde{c} \end{bmatrix},$ <p>with $\tilde{a} = a^2 + b^2 \cos^2 \gamma + c^2 \cos^2 \beta$</p> $\tilde{b} = b^2 \sin^2 \gamma + \frac{c^2 (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \gamma}$ $\tilde{c} = \frac{c^2 (1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)}{\sin^2 \gamma}$ $\tilde{d} = b^2 \cos \gamma \sin \gamma + \frac{c^2 \cos \beta (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)}{\sin \gamma}$ $\tilde{e} = \frac{c^2 \cos \beta (1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)^{1/2}}{\sin \gamma}$ $\tilde{f} = \frac{c^2 (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma) (1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)^{1/2}}{\sin^2 \gamma}$
<p>Monoklines System mit $\mathbf{a}_1 \parallel \bar{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{a}_3 \parallel \bar{\mathbf{e}}_3$:</p> $\mathbf{H}^m = \begin{bmatrix} a & b \cos \gamma & 0 \\ 0 & b \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^m = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 \cos^2 \gamma & b^2 \cos \gamma \sin \gamma & 0 \\ b^2 \cos \gamma \sin \gamma & b^2 \sin^2 \gamma & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$

Für die Charakterisierung der weiteren gebräuchlichen mechanischen Symmetriegruppen sind jedoch höherstufige Strukturtensoren notwendig: für das trigonale, tetragonale und kubische System vierstufige und für das hexagonale System sechsstufige Strukturtensoren. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf ZHENG & SPENCER [63], ZHENG [62] und XIAO [60]. Somit ist es offensichtlich, dass das vorgestellte Konzept nicht die vollständige Funktional- bzw. Polynombasis liefern kann, die für die Beschreibung der Anisotropien einiger Kristallklassen benötigt werden. In SCHRÖDER, NEFF & EBBING [48] wurden die Konsequenzen des vorgestellten Konzeptes bzgl. der bekannten Darstellungen von anisotropen Energiefunktionen überprüft. Hierfür wurden die invarianten Funktionen $\mathbf{C} \cdot \mathbf{G}$ und $\text{Cof} \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}$ ausgewertet, d.h. die Koeffizienten der Komponenten von \mathbf{G} identifiziert. Diese stellen die inherenten polykonvexe Funktionalbasis der zugrundeliegenden Kristallsymmetrie bis zum zweiten Grad dar. Die Vollständigkeit der polykonvexen Funktionalbasen wurde schließlich durch einen Vergleich mit den Elementen der klassischen Funktional-

basen, die z.B. in DIMITRIENKO [21] aufgeführt sind, bis zum zweiten Grad überprüft. Für genauere Details siehe die Arbeit SCHRÖDER, NEFF & EBBING [48], Seiten 15-18, die dem Anhang beigefügt ist. Zusammenfassend wurde hier vermerkt, dass die Symmetrien des triklinen, monoklinen, orthorhombischen und hexagonalen Systems mittels des erarbeiteten polykonvexen Ansatzes erfasst werden können. So liefert beispielsweise die Auswertung der anisotropen Invarianten des monoklinen Systems für eine spezielle Ausrichtung des Koordinatensystems in Bezug auf das kristallographische System die polykonvexe Basis

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12} \quad (4.26)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Cof}C_{11} &= C_{22}C_{33} - C_{23}^2, \\ \text{Cof}C_{22} &= C_{11}C_{33} - C_{13}^2, \\ \text{Cof}C_{33} &= C_{11}C_{22} - C_{12}^2, \\ \text{Cof}C_{12} &= C_{13}C_{23} - C_{12}C_{33}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Der Vergleich mit der bekannten Funktionalbasis im monoklinen Fall

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12}, C_{13}^2, C_{23}^2, C_{13}C_{23} \quad (4.28)$$

zeigt, dass alle Elemente der klassischen Basis durch nichttriviale Kombinationen der Elemente der polykonvexen Basis hergeleitet werden können. Somit handelt es sich bei der polykonvexen Basis um eine „vollständige“ Basis. Da das monokline System durch den Sonderfall zweier beliebig zueinander orientierten Basisvektoren und einem orthogonal zu diesen Vektoren ausgerichteten Basisvektor charakterisiert wird, siehe Tabelle 1, ist der Arbeitspunkt 2, Abschnitt 3.2, prinzipiell abgeschlossen. Im rhombischen/orthotropen Fall führt die Analyse der anisotropen polykonvexen Invarianten zu der Basis

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, \text{Cof}C_{11}, \text{Cof}C_{22}, \text{Cof}C_{33}, \quad (4.29)$$

die als „vollständige“ Basis bezeichnet werden kann, nachdem $\det \mathbf{C}$ ergänzt und mit der klassischen Funktionalbasis verglichen wurde. Multiplikative Kombinationen unterschiedlicher Haupt- und Simultaninvarianten finden sich in der zweiten gemischten polykonvexen Invarianten (4.24). Kopplungen zwischen den orthotropen Simultaninvarianten bzgl. der verschiedenen *klassischen* Strukturtensoren, d.h.

$$\text{tr}[\mathbf{CM}_1]\text{tr}[\mathbf{CM}_2], \text{tr}[\mathbf{CM}_1]\text{tr}[\mathbf{CM}_3], \text{tr}[\mathbf{CM}_2]\text{tr}[\mathbf{CM}_3], \quad (4.30)$$

mit beispielsweise

$$\text{tr}[\mathbf{CM}_1]\text{tr}[\mathbf{CM}_2] = \text{tr}[\mathbf{C}(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1)]\text{tr}[\mathbf{C}(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2)] = C_{11}C_{22}, \quad (4.31)$$

sind in (4.29) intrinsisch vorhanden, siehe Arbeitspunkte 1a,b, Abschnitt 3.2.

In den Fällen der tetragonalen, trigonalen und kubischen Anisotropie liefert das Konzept nicht den vollständigen Satz an Invarianten, die für eine Beschreibung dieser Kristallsysteme notwendig sind. Für genauere Erläuterungen sei auch hier auf die dem Anhang beigefügte Arbeit [48], Seiten 15-18, verwiesen. Nichtsdestotrotz erfüllt der eingeschränkte Ansatz die grundlegenden Existenztheorien der finiten Elastizität (Arbeitspunkt 3, Abschnitt 3.2).

4.3.2 Konstruktion von polykonvexen anisotropen Energien. Es wird angenommen, dass sich die Energiefunktion aus einem isotropen und einem anisotropen Anteil zusammensetzt, d.h.

$$\psi = \psi^{iso}(I_1, I_2, I_3) + \psi^{aniso}(I_1, I_2, I_3, J_{4j}, J_{5j} | j = 1, \dots, m), \quad (4.32)$$

wobei I_1, I_2, I_3 die drei Hauptinvarianten darstellen und die invarianten, polykonvexen Funktionen im anisotropen Anteil definiert sind als

$$J_{4j} = \text{tr}[\mathbf{C}\mathbf{G}_j], \quad J_{5j} = \text{tr}[\text{Cof}[\mathbf{C}]\mathbf{G}_j], \quad (4.33)$$

und abhängig sind vom j -ten Strukturtensor \mathbf{G}_j . Die Spur von \mathbf{G}_j sei

$$g_j := \text{tr}\mathbf{G}_j. \quad (4.34)$$

Als isotropen Anteil der Funktion verwenden wir das kompressible Mooney-Rivlin Model

$$\psi^{iso} := \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \delta_1 I_3 - \delta_2 \ln(\sqrt{I_3}), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2 \geq 0. \quad (4.35)$$

Der isotrope Teil des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors ergibt sich zu

$$\mathbf{S}^{iso} = 2\partial_C\psi^{iso} = 2 \left[\left(\frac{\partial\psi^{iso}}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi^{iso}}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{1} - \frac{\partial\psi^{iso}}{\partial I_2} \mathbf{C} + \frac{\partial\psi^{iso}}{\partial I_3} I_3 \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (4.36)$$

Der anisotrope Anteil besteht aus der dritten Hauptinvarianten I_3 und den beiden gemischten Invarianten J_{4j} und J_{5j} , d.h.

$$\psi^{aniso} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m [f_{3rj}(I_3) + f_{4r}(J_{4j}) + f_{5r}(J_{5j})], \quad (4.37)$$

woraus per Definition der assoziierte zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor in der Form $\mathbf{S}^{aniso} := 2\partial_C\psi^{aniso}$, mit

$$\mathbf{S}^{aniso} = 2 \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial f_{3rj}}{\partial I_3} I_3 + \frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}} J_{5j} \right) \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial f_{4r}}{\partial J_{4j}} \mathbf{G}_j - \frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}} I_3 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}_j \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (4.38)$$

erscheint. Der Grund, warum im anisotropen Anteil der Energiefunktion zusätzlich die dritte Hauptinvariante gebraucht wird, liegt darin, dass die Bedingung einer spannungsfreien Referenzkonfiguration $\mathbf{S}(\mathbf{C} = \mathbf{1}) = \mathbf{0}$ nun unabhängig für (4.36) und (4.38) erfüllt werden kann, was mit einer Entkopplung der isotropen und anisotropen Terme einhergeht. Wir erhalten zum einen die Bedingung für den isotropen Materialparameter δ_2

$$\mathbf{S}^{iso} = \left(\frac{\partial\psi^{iso}}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial\psi^{iso}}{\partial I_2} + \frac{\partial\psi^{iso}}{\partial I_3} \right) \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \delta_1) \quad (4.39)$$

und zum anderen infolge

$$\mathbf{S}^{aniso} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial f_{3rj}}{\partial I_3} + \frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}} g_j \right) \mathbf{1} + \left(\frac{\partial f_{4r}}{\partial J_{4j}} - \frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}} \right) \mathbf{G}_j \right] = \mathbf{0}, \quad (4.40)$$

Tabelle 3: Vier verschiedene anisotrope polykonvexe Energiefunktionen

$$\psi_I^{aniso} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_{rj} \left[\frac{1}{\alpha_{rj} + 1} \frac{1}{(g_j)^{\alpha_{rj}}} (J_{4j})^{\alpha_{rj}+1} + \frac{1}{\beta_{rj} + 1} \frac{1}{(g_j)^{\beta_{rj}}} (J_{5j})^{\beta_{rj}+1} + \frac{g_j}{\gamma_{rj}} (I_3)^{-\gamma_{rj}} \right]$$

mit $\xi_{rj} \geq 0, \alpha_{rj} \geq 0, \beta_{rj} \geq 0, \gamma_{rj} \geq -1/2$

$$\psi_{II}^{aniso} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_{rj} \left[\frac{1}{\alpha_{rj} + 1} \frac{1}{(g_j)^{\alpha_{rj}}} (J_{4j})^{\alpha_{rj}+1} + \frac{1}{\beta_{rj} + 1} \frac{1}{(g_j)^{\beta_{rj}}} (J_{5j})^{\beta_{rj}+1} - \ln(I_3^{g_j}) \right]$$

mit $\xi_{rj} \geq 0, \alpha_{rj} \geq 0, \beta_{rj} \geq 0$

$$\psi_{III}^{aniso} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{J_{4j}^{\alpha_{rj}}}{I_3^{1/3}} + \frac{J_{5j}^{\alpha_{rj}}}{I_3^{1/3}} + \frac{g_j^{\alpha_{rj}}}{\beta_{rj}} I_3^{-\beta_{rj}} \right]$$

mit $\alpha_{rj} = 5/3, \beta_{rj} \geq -1/2$

$$\psi_{IV}^{aniso} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{J_{4j}^{\alpha_{rj}}}{I_3^{1/3}} + \frac{J_{5j}^{\alpha_{rj}}}{I_3^{1/3}} - g_j^{\alpha_{rj}} \beta_{rj} \ln(I_3) \right]$$

mit $\alpha_{rj} \geq 1, \beta_{rj} = \alpha_{rj} - 2/3$

für den anisotropen Anteil die Bedingungen

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f_{3rj}}{\partial I_3} + \frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}} g_j \right) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial f_{4r}}{\partial J_{4j}} - \frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}} \right) = 0 \quad \forall \mathbf{G}_j, \quad (4.41)$$

oder die mehr eingeschränkten Beziehungen (für jedes r und j einzeln)

$$\frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}} g_j = -\frac{\partial f_{3rj}}{\partial I_3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_{4r}}{\partial J_{4j}} = \frac{\partial f_{5r}}{\partial J_{5j}}. \quad (4.42)$$

Spezielle anisotrope polykonvexe Energiefunktionen, die automatisch eine spannungsfreie Referenzkonfiguration ($\mathbf{S}(\mathbf{C} = \mathbf{1}) = \mathbf{0}$) liefern, sind in Tabelle 3 aufgelistet. Für weitere Details siehe [48], Abschnitt 3.1, (Arbeitspunkt 4a, Abschnitt 3.2). In diesem Zusammenhang sei für den orthotropen Fall auch auf ITSKOV & AKSEL [27] verwiesen.

Um die Existenz einer minimierenden Deformation einer freien Energiefunktion zu gewährleisten, muss die Polykonvexitäts- und die Koerzivitätsbedingung, siehe BALL [3], erfüllt

sein. Da die anisotrope Energiefunktion ψ_I^{aniso} in Tabelle 3 für sich allein schon koerziv ist, kann der isotrope Anteil der Energiefunktion (4.32) vernachlässigt werden. Der Beweis der Koerzivität der Energiefunktion ψ_I^{aniso} findet sich in [48], siehe Anhang.

4.3.3 Analyse der anisotropen polykonvexen Energiefunktionen. Abwärtskompatibilität: Anpassung an lineare Moduli. Die linearisierten Elastizitätstensoren in der Nähe der Referenzkonfiguration $\mathbb{C}_0 = 4\partial_{CC}\psi|_{C=1}$ müssen identisch mit den bekannten Elastizitätsmoduli der linearen Theorie sein. Dies resultiert aus der Linearisierung der Spannungsfunktion nahe der unbelasteten Referenzkonfiguration:

$$Lin[\mathbf{S}] = \mathbb{C}_0 : Lin[\mathbf{E}] \quad \text{mit} \quad \mathbb{C}_0 := 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \Big|_{C=1} \quad \text{und} \quad \mathbf{S}|_{C=1} = \mathbf{0}, \quad (4.43)$$

mit dem Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}). \quad (4.44)$$

Der Term $Lin[\mathbf{S}]$ kann als linearer Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und der Term $Lin[\mathbf{E}]$ als linearer Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ der Theorie infinitesimaler Deformationen identifiziert werden. Somit erscheint (4.43) in der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.45)$$

Um das phänomenologische Antwortverhalten von orthotropen und monoklinen Materialien mit Hilfe der polykonvexen Energiefunktion (4.32) zu beschreiben, wurden die linearisierten vierstufigen Elastizitätstensoren in der Nähe der unbelasteten Referenzkonfiguration an lineare, auf experimentelle Daten basierende Moduli angepasst. Diese Annäherung wurde mittels der Minimierung der Fehlerfunktion

$$e = \frac{\| \mathbb{C}^{(V)comp} - \mathbb{C}^{(V)exp} \|}{\| \mathbb{C}^{(V)exp} \|} \quad (4.46)$$

durchgeführt. $\mathbb{C}^{(V)comp} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ kennzeichnet den anzupassenden, in Voigt Notation angegebenen Elastizitätstensor \mathbb{C}_0 . $\mathbb{C}^{(V)exp} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ist die auf den experimentellen Daten basierende Koeffizientenmatrix. Die gebrauchte Norm der Matrixdarstellung ist definiert als

$$\| \mathbb{C}^{(V)} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\mathbb{C}_{ij}^{(V)})^2}. \quad (4.47)$$

Für die Durchführung der Parameteranpassungen wurde die Evolutionsstrategie, die von SCHWEFEL [49] und RECHENBERG [42] vorgeschlagen wurde, gewählt. Um eine bessere Vorstellung des Materialverhaltens der anisotropen Materialien zu erhalten, wurden die charakteristischen Oberflächen ihrer Elastizitätsmoduli graphisch dargestellt, siehe z.B. SHUVALOV [50] und BÖHLKE & BRÜGGEMANN [18].

Orthotrope Materialien. Zur Beschreibung orthorhombischer Materialien wurde die Energiefunktion (4.32) mit dem ersten präsentierten anisotropen Anteil aus Tabelle 3 unter Berücksichtigung des orthorhombischen Strukturtensors

$$\mathbf{G}_j^o = \begin{bmatrix} a_j & 0 & 0 \\ 0 & b_j & 0 \\ 0 & 0 & c_j \end{bmatrix} \quad \text{mit } a_j, b_j, c_j > 0, \quad (4.48)$$

an experimentelle Daten, die aus SIMMONS & WANG [52] stammen, angepasst. Als Beispiele hierfür werden die Ergebnisse der Anpassung der Energiefunktion an das Materialverhalten der rhombischen Materialien Acenaphthene und Ammonium Sulfate gezeigt. Die charakteristischen Oberflächen der Elastizitätsmoduli und die Elastizitätstensoren der angepassten Materialien in Voigt Notation sind in Abbildung 15 dargestellt.

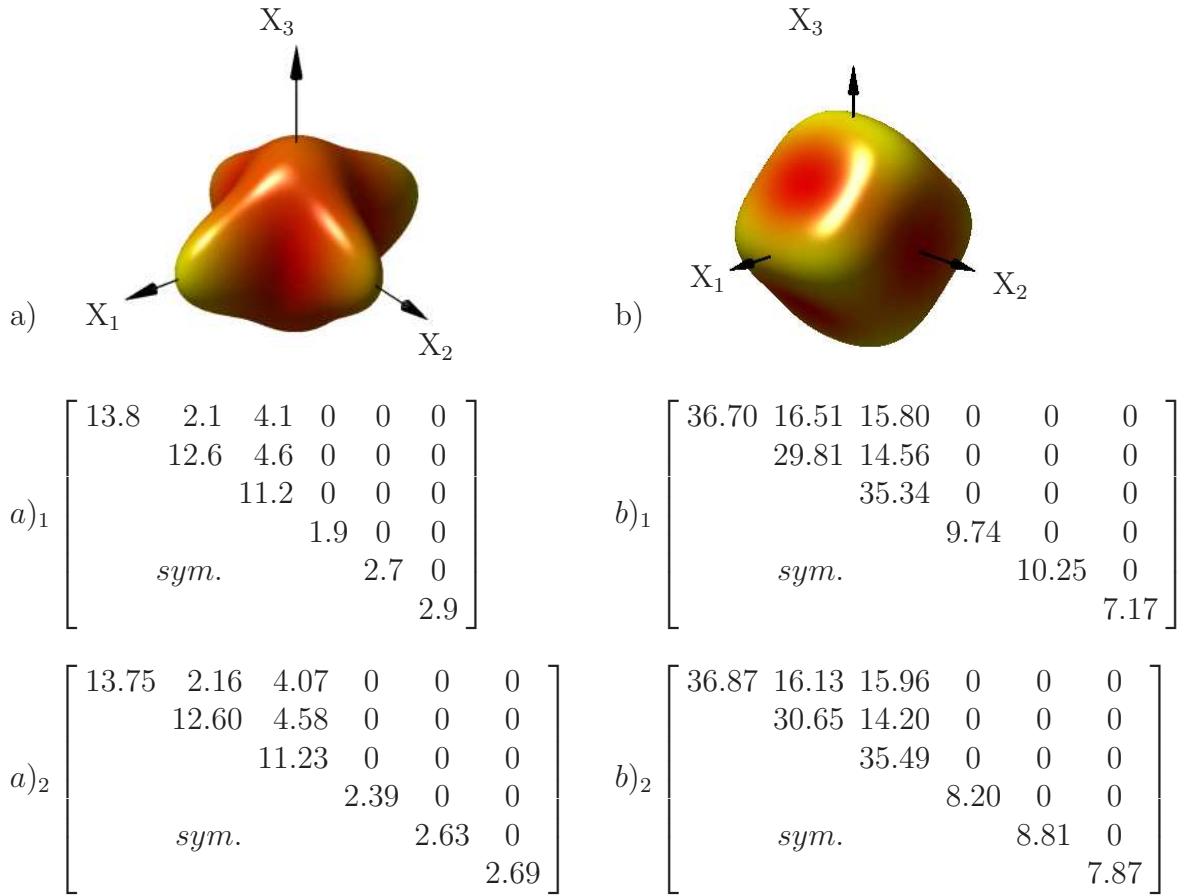


Abbildung 15: Charakteristische Oberflächen der Elastizitätsmoduli von a) Acenaphthene und b) Ammonium Sulfate in [GPa]. a, b)₁ zeigt $\mathbb{C}^{(V)exp}$, a, b)₂ $\mathbb{C}^{(V)comp}$ des Materials.

Die Materialparameterlisten der rhombischen Materialien, die die sich aus der Anpassung ergebenen isotropen, anisotropen Materialparameter sowie die Parameter der Strukturtensoren umfassen, sind in Tabelle 4 gegeben. Zudem sind hier die Fehler, die die Annäherungen lieferten, angegeben. Diese minimalen Fehler verdeutlichen, dass eine Beschreibung von rhombischem Materialverhalten mit Hilfe des vorgestellten Konzeptes möglich ist.

Monokline Materialien Die beschriebene Methode wurde desweiteren für die Darstellung monoklinen Materialverhaltens verwendet. Im Folgenden werden die Ergebnisse, die

Tabelle 4: Materialparameterliste von Acenaphthene und Ammonium Sulfate

Acenaphthene						Ammonium Sulfate					
Isotrope Materialparameter:						Isotrope Materialparameter:					
$\delta_1 = 0.0077, \delta_2 = 0.0154.$						$\alpha_1 = 1.349, \delta_1 = 0.226, \delta_2 = 3.151, .$					
Strukturtensoren:						Strukturtensoren:					
$\mathbf{G}_1^o = \text{diag}(0.016, 0.0000002, 0.394),$						$\mathbf{G}_1^o = \text{diag}(0.827, 0.517, 0.0000001),$					
$\mathbf{G}_2^o = \text{diag}(0.640, 0.0000001, 0.128),$						$\mathbf{G}_2^o = \text{diag}(0.0000001, 0.252, 0.587),$					
$\mathbf{G}_3^o = \text{diag}(0.0000002, 0.716, 0.273).$						$\mathbf{G}_3^o = \text{diag}(0.270, 0.957, 1.222).$					
Anisotrope Materialparameter:						Anisotrope Materialparameter:					
r	j	α_{rj}	β_{rj}	γ_{rj}	ξ_{rj}	r	j	α_{rj}	β_{rj}	γ_{rj}	ξ_{rj}
1	1	1.037	0.069	-0.134	0.246	1	1	1.448	1.907	-0.500	0.224
1	2	1.918	0.944	-0.260	0.283	1	2	0.000	2.083	-0.312	0.663
1	3	2.242	1.419	-0.479	0.292	1	3	0.428	1.288	-0.941	0.149
2	1	0.379	0.091	-0.286	0.513	2	3	2.357	0.000	-0.406	0.275
2	2	2.173	1.993	-0.383	0.206	3	2	0.000	2.035	-0.090	0.352
2	3	1.815	1.143	0.179	0.034	3	3	0.000	1.900	-0.500	0.700
3	1	1.287	0.583	0.010	0.234						
3	2	1.880	1.094	-0.489	0.445						
3	3	2.610	1.461	-0.472	0.487						
Anpassungsfehler:						Anpassungsfehler:					
$e = 2.28\%$						$e = 3.46\%$					

aus der Verwendung der anisotropen Energiefunktion ψ_I^{aniso} , Tabelle 3, mit $n = m = 3$ und den monoklinen Strukturtensoren

$$\mathbf{G}_j^m = \begin{bmatrix} a_j & d_j & 0 \\ d_j & b_j & 0 \\ 0 & 0 & c_j \end{bmatrix} \quad \text{mit } a_j, c_j > 0, d_j^2 < a_j b_j \quad (4.49)$$

resultieren, präsentiert. Die charakteristischen Oberflächen der Elastizitätstensoren, die auf experimentellen Daten basierenden Elastizitätstensoren, die ebenfalls dem Buch SIMMONS & WANG [52] entnommen wurden, sowie die angepassten Elastizitätstensoren in Voigt Notation sind in Abbildung 16 abgebildet. Die resultierenden Materialparameter und die Anpassungsfehler sind der Tabelle 5 zu entnehmen. Auch hier weisen die Anpassungen sehr geringe Fehler auf, was zeigt, dass der vorgestellte Ansatz ebenfalls für die Beschreibung monoklinen Materialverhaltens geeignet ist.

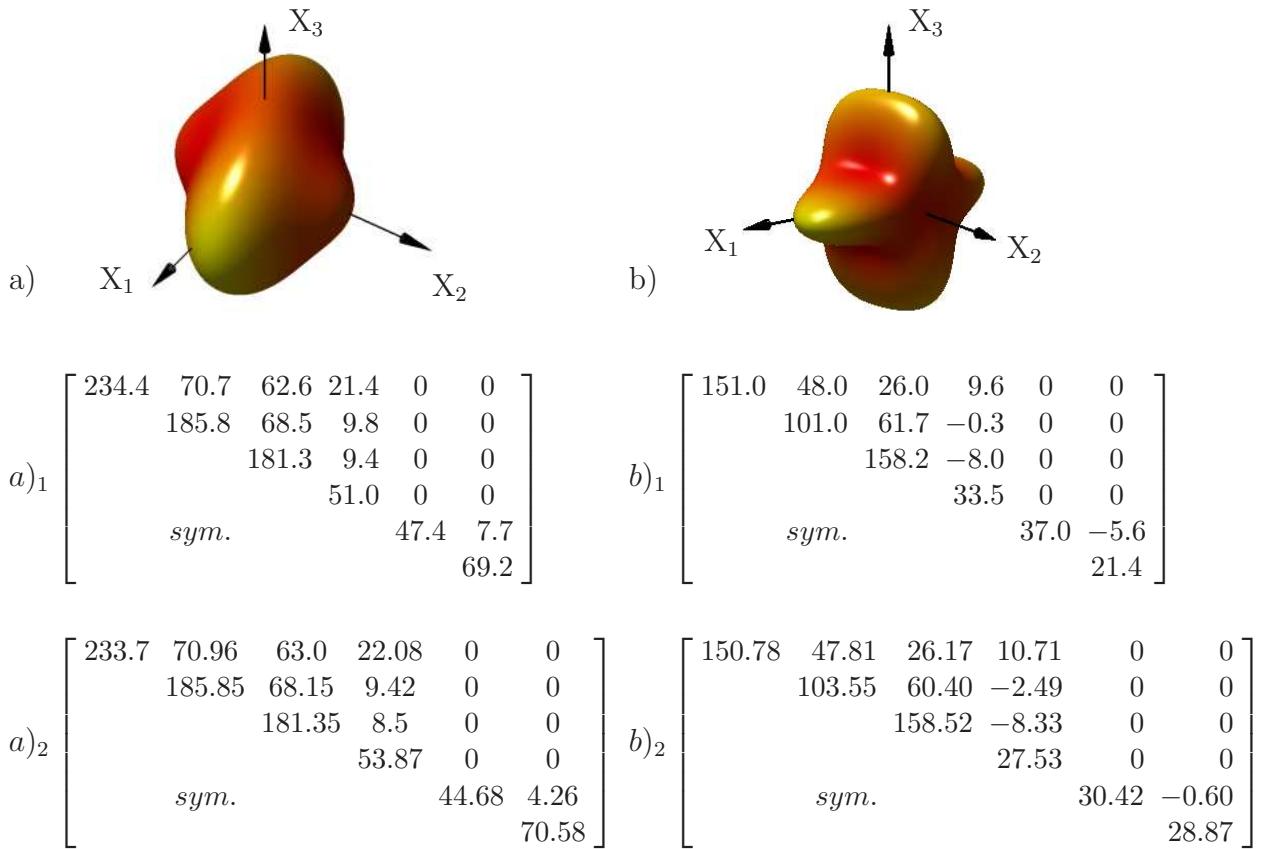


Abbildung 16: Charakteristische Oberflächen der Elastizitätsmoduli von a) Aegirite und b) Feldspar in [GPa]. a, b)₁ zeigt $\mathbf{C}^{(V)exp}$, a, b)₂ $\mathbf{C}^{(V)comp}$ des Materials.

Tabelle 5: Materialparameterliste von Aegirite und Feldspar (Labradorite)

Aegirite						Feldspar (Labradorite)					
Strukturtensoren:						Strukturtensoren:					
$G_1 = \text{diag}(1, 1, 1)$,						$G_1 = \text{diag}(1, 1, 1)$,					
$G_2^m = \begin{bmatrix} 2.530 & 0.433 & 0 \\ 0.433 & 0.676 & 0 \\ 0 & 0 & 1.976 \end{bmatrix}$,						$G_2^m = \begin{bmatrix} 2.400 & 0.263 & 0 \\ 0.263 & 1.087 & 0 \\ 0 & 0 & 0.747 \end{bmatrix}$,					
$G_3^m = \begin{bmatrix} 2.218 & -0.228 & 0 \\ -0.228 & 0.218 & 0 \\ 0 & 0 & 2.596 \end{bmatrix}$.						$G_3^m = \begin{bmatrix} 0.061 & -0.268 & 0 \\ -0.268 & 1.187 & 0 \\ 0 & 0 & 2.049 \end{bmatrix}$.					
Anisotrope Materialparameter:						Anisotrope Materialparameter:					
r	j	α_{rj}	β_{rj}	γ_{rj}	ξ_{rj}	r	j	α_{rj}	β_{rj}	γ_{rj}	ξ_{rj}
1	1	0.700	0.000	-0.500	1.532	2	1	8.022	0.000	-0.346	2.318
1	2	3.942	0.000	-0.410	1.728	3	1	5.841	0.000	-0.484	3.233
2	1	1.000	0.385	-0.500	0.334	3	2	3.829	0.000	-0.085	0.152
2	2	3.685	0.000	-0.500	1.726						
3	2	4.391	0.000	-0.500	2.289						
3	3	0.000	4.028	-0.500	1.200						
Anpassungsfehler:						Anpassungsfehler:					
$e = 1.62\%$						$e = 5.28\%$					

5 Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung.

Die mathematische Behandlung von Randwertproblemen beruht auf den sogenannten direkten Methoden der Variationsrechnung, d.h. man möchte eine minimierende Deformation der freien Energiefunktion $W(\mathbf{F})$ bzgl. der gegebenen Randbedingungen finden. In der finiten Elastizität ist die Existenz von minimierenden Deformationen gewisser Variationsfunktionale garantiert, wenn das Variationsfunktional schwach folgenunterhalbstetig und koerziv ist. Da polykonvexe Funktionen automatisch eine schwache Folgenunterhalbstetigkeit aufweisen, bevorzugen wir deren Gebrauch. Für isotrope Materialien existierte zum Zeitpunkt der Antragstellung bereits eine Vielzahl von polykonvexen Funktionen. In den Fällen der transversalen Isotropie und Orthotropie finden sich erste Ergebnisse in den Arbeiten SCHRÖDER & NEFF [45; 46].

Im Rahmen dieses DFG-Projektes wurden polykonvexe Energiefunktionen für weitere Anisotropieklassen entwickelt und konstruiert sowie ihre Anwendbarkeit zur Beschreibung von realen anisotropen Materialien analysiert. So wurde zum einen die Simulation von anisotropen, dünnen Schalen unter Berücksichtigung von polykonvexen Energiefunktionen anhand von numerischen Beispielen überprüft. Da die untersuchten Schalen aus Faserverbundmaterialien bestehen, wurde angenommen, dass sich die Energiefunktion aus einem isotropen Anteil für die Beschreibung des Matrixmaterials und aus einer Überlagerung von transversal isotropen Anteilen für die Darstellung der eingebetteten Fasern zusammensetzt. Die wesentlichen Ergebnisse hierzu wurden in der Arbeiten BALZANI, GRUTTMANN & SCHRÖDER [6], siehe Anhang, und BALZANI, GRUTTMANN & SCHRÖDER [8] veröffentlicht.

Zum anderen wurde eine neue Methode zur Beschreibung weiterer Anisotropieklassen in den Arbeiten EBBING, SCHRÖDER, & NEFF [22–24] und SCHRÖDER, NEFF & EBBING [48] vorgestellt. Die Grundidee liegt hierbei in der Einführung eines zweistufigen, symmetrischen und positiv definiten Strukturtensors $\mathbf{G} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$, der die Anisotropien der jeweiligen Kristallklasse widerspiegelt. Dieser Tensor kann als *push-forward* der kartesischen Metrik einer fiktiven Referenzkonfiguration auf die reale Referenzkonfiguration interpretiert werden. Die Transformation \mathbf{H} sei eine Abbildung der kartesischen Basisvektoren der fiktiven Referenzkonfiguration auf kristallographisch motivierte Basisvektoren. Der große Vorteil der Formulierungen von invarianten Funktionen in Abhängigkeit von Skalarprodukten, die aus dem rechten Cauchy-Green Deformationstensor \mathbf{C} und dem Strukturtensor \mathbf{G} gebildet werden, liegt darin, dass diese Funktionen automatisch polykonvex sind und die Bedingung einer spannungsfreien Referenzkonfiguration a priori erfüllen. Einschränkungen des Gebrauchs dieses Ansatzes, die auf der Polykonvexitätsbedingung sowie der Verwendung von zweistufigen Strukturtensoren basieren, wurden detailliert erläutert.

5.2 Ausblick.

Im Rahmen der klassischen Tensor-Repräsentationstheorie werden überwiegend ein- und zweistufige Strukturtensoren gebraucht, siehe BOEHLER [15–17] und LIU [32]. Die trikline, monokline, orthorhombische sowie die transversal isotrope Symmetrie kann mit Hilfe von derartigen Strukturtensoren vollständig erfasst werden. Hier sei auf ZHANG & RY-

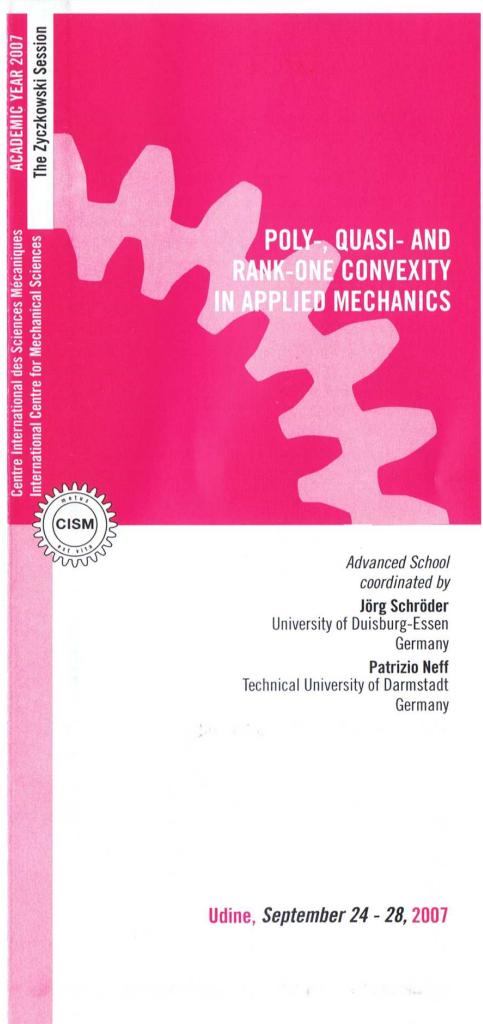
CHLEWSKI [61], RYCHLEWSKI & ZHANG [43], ZHENG & SPENCER [63] und ZHENG [62] verwiesen. Somit ist in diesen Fällen eine Darstellung basierend auf der Tensor-Representationstheorie und sogar im polykonvexen Rahmen – wie es in SCHRÖDER, NEFF & EBBING [2008] ausführlich erläutert wird – möglich.

Für die Beschreibung des trigonalen, tetragonalen und kubischen Systems werden jedoch Strukturtensoren bis zur vierten Stufe und für die Darstellung der hexagonalen Symmetrie sogar sechsstufige Strukturtensoren benötigt, siehe ebenfalls [61], [43], [63] und [62]. Die Möglichkeit, die 12 Anisotropietypen jeweils mittels nur eines einzelnen Strukturtensors zu beschreiben, wird in [63] vorgestellt. In Bezug auf die Anwendung des Isotropisierungstheorems auf anisotrope Tensorfunktionen, die Tensoren höherer Stufe als zwei als Variablen aufweisen, sind keine grundlegenden Arbeiten bekannt, außer spezielle Studien von BETTEN [10], BOEHLER [17], BETTEN [11], BETTEN & HELISCH [13], BETTEN & HELISCH [14] und BETTEN [12]. In den Arbeiten [12; 14] kommen kombinatorische Algorithmen zum Einsatz, die es erlauben, irreduzible Systeme von Tensorgeneratoren für Systeme symmetrischer Tensoren zweiter und vierter Stufe aufzustellen. Für die Aufstellung konkreter Energien sind diese Darstellungen jedoch zu unhandlich und scheinen darüberhinaus in ihrer allgemeinen Form zur Erzwingung der Polykonvexitätsrestriktion weniger geeignet.

Augrunddessen besteht diesbezüglich weiterer Forschungsbedarf. Es wurde bereits – wie in Abschnitt 3.2 erwähnt – eine Methode zur Beschreibung von kubischen Materialien in [29] vorgestellt, die eine direkte Erweiterung des in [46] eingeführten Konzeptes darstellt. Wir sind jedoch daran interessiert, basierend auf einem einheitlichen Konzept die Beschreibung aller genannten Anisotropieklassen zu erfassen. Erste mögliche Ansätze hierfür wurden bereits von den Mitwirkenden dieses Projektes entwickelt und werden im Verlängerungsantrag näher erläutert.

6 CISM-Kurs in Udine im September 2007

Vom 24.-28. September 2007 haben wir als Organisatoren einen CISM-Kurs zum Thema **Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics** angeboten. CISM steht für *Centre International des Sciences Mécaniques* und ist eine 1968 gegründete gemeinnützige Organisation zur Förderung der mechanischen Wissenschaften. Uns war es gelungen, eine Reihe von international herausragenden Wissenschaftlern für diesen Kurs und zu diesem Thema zu gewinnen. Es trugen mit jeweils 5 · 45 Minuten vor: Sir John Ball (ehemaliger Präsident der Internationalen Mathematischen Union, Oxford), Antonio de Simone (Triest), Patrizio Neff (Darmstadt), Annie Raoult (Paris), Jörg Schröder (Essen), Miroslav Silhavý (Prag) und David Steigmann (Berkeley). Im Hinblick auf eine zusammenfassende Darstellung der Kursinhalte sei auf den zweiseitigen Bericht verwiesen, der in der ersten Erscheinung des GAMM-Rundbriefes in diesem Jahr (2008) veröffentlicht wurde und ebenfalls auf den folgenden zwei Seiten zu finden ist. Darüberhinaus sind weitere Details in den Arbeiten SCHRÖDER [44] und NEFF [40] dokumentiert.



INVITED LECTURERS

Jörg Schröder - University of Duisburg-Essen, Germany
5 lectures on: Representation theorems for isotropic tensor functions, continuum mechanical interpretation of generalized convexity conditions, construction of anisotropic polyconvex functions. Applications: Modeling of arterial walls and hyperelastic thin shells.

Patrizio Neff - Technical University Darmstadt, Germany
5 lectures on: Polyconvexity: Coercivity and growth conditions for anisotropic energies used in biomechanics, tensile instabilities for fiber reinforced solids, dimensional reduction of generalized continuum models and their relation to classical shell models.

Sir John Ball - University of Oxford, United Kingdom
5 lectures on: Outstanding open problems of nonlinear elasticity; existence, singularities and asymptotic behaviour of solutions, status of elasticity with respect to atomistic models, understanding of microstructure induced by solid phase transformations, and fracture.

Antonio De Simone - SISSA, Int. School for Advanced Studies, Italy
5 lectures on: Liquid Crystal Elastomers (LCEs): nematic and smectic phases and their response to external loads. Variational models of the quasistatic response of LCEs. Soft deformation paths as quasi-convex hulls of the sets of spontaneous strains. Quasi-convex envelope of the energy density and its use in finite-element simulations.

Annie Raoult - University René Descartes-Paris 5, France
5 lectures on: Network modeling: adapted principle of frame indifference, existence results, homogenization. Mechanical applications in biomechanics and carbon nanotube modeling. Adapted convexity conditions for director models in thin structure. theories.

Miroslav Silhavý - Acad. of Sciences of the Czech Republic, Prague
5 lectures on: Semiconvexity of isotropic functions, rank 1 convexity and phase equilibria in general materials, phase equilibria in isotropic materials, explicitly solvable models: e.g., Hadamard material, a class of energies related to nematic elastomers.

David J. Steigmann - University of California at Berkeley, USA
5 lectures on: Polyconvexity conditions in terms of the right stretch tensor, gradient formulae for the rotation and stretch factors in the polar decomposition combined with convexity properties of certain stretch invariants.

LECTURES

All lectures will be given in English. Lecture notes can be downloaded from CISM web site, instructions will be sent to accepted participants.

BELLA FIGURA IN UDINE!

von PATRIZIO NEFF

Vom 24. bis 28. September 2007 fand in Udine ein CISM-Kurs mit dem Titel: "Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics" statt. Vielen Lesern ist Udine und CISM sicherlich schon bekannt. Für die Leser, welche Udine jedoch noch nicht kennen oder noch nicht an einem CISM-Kurs teilgenommen haben: Udine ist eine Stadt in der Region Friaul-Julisch Venetien im Nordosten Italiens und mit ca. 100.000 Einwohnern die zweitgrößte der Region. Die Stadt liegt male risch zwischen den Südalpen und der Adria, nur 20 Kilometer von der slowenischen Grenze und Triest entfernt. CISM steht für Centre International des Science Mécaniques (<http://www.cism.it>) und ist eine 1968 gegründete gemeinnützige Organisation zur Förderung der mechanischen Wissenschaften. Im Renaissance-Palazzo del Torso, mitten im Zentrum von Udine, finden regelmäßig wissenschaftliche Veranstaltungen größtenteils wöchentlich statt. Begleitend zu den angebotenen Kursen ist es Tradition, einen Tagungsband im Springer-Verlag zu veröffentlichen. Diese Bände haben zur exzellenten Reputation von CISM beigetragen.

Verallgemeinerte Konvexitätsbedingungen haben sich als ein Schlüsselbegriff für die Behandlung vieler ingenieurrelevanter Problemstellungen herausgestellt. Insbesondere der zuerst von John Ball Ende der Siebziger Jahre eingeführte Begriff der Polykonvexität erlaubte zum erstenmal die Existenz von Minimierern von realistischen Variationsfunktionalen bei endlichen elastischen Verzerrungen zu beweisen. Ein Teil des Kurses widmete sich daher der Analyse dieses Begriffs und verwandter Konvexitäts-Begriffe, der andere Teil wandte sich der mathematischen Anwendung der Konvexitätsbegriffe auf Probleme mit dünnen Strukturen zu. Herrn Schröder und mir als Organisatoren war es gelungen, eine Reihe von international herausragenden Wissenschaftlern für diesen Kurs und zu diesem Thema zu gewinnen. Es trugen (in alphabetischer Reihenfolge) mit jeweils 5*45 Minuten vor: Sir John Ball (ehemaliger Präsident der Internationalen Mathematischen Union, Oxford), Antonio de Simone (Triest), Patrizio Neff (Darmstadt), Annie Raoult (Paris), Jörg Schröder (Essen), Miroslav Silhavy (Prag) und David Steigmann (Berkeley).

John Ball begann den Kurs mit einem faszinierenden Überblick über die offenen Probleme der nicht-linearen Elastizität. Die verständliche Entwicklung der Themen, die Beiläufigkeit, mit der schwierigste Konzepte klar eingeführt wurden, bezeugten eindrucksvoll die Meisterschaft von Ball auf diesem, „seinem“, Gebiet! Das Auditorium war begeistert. Es ist unmöglich hier auch nur

ansatzweise die Fülle der Einsichten zu rekapitulieren. Anni Raoult stellte an der Tafel ihren Beweis zur Nicht-Elliptizität der SVK-Energie vor. Danach zeigte sie, wie man unter geschickter Ausnutzung von algebraischen Beziehungen sogar die quasikonvexe Hülle dieser Energie ausrechnen kann. Sie wendete sich sodann der Dimensionsreduktion von klassischen dreidimensionalen Energiefunktionalen zu. Dafür motivierte und benutzte Sie die Γ -Konvergenz. Im Ergebnis stellt sich eine Membran ein, welche einer Kompression keinen Widerstand entgegenseetzt. Dabei wird klar, dass das erhaltene Membranmodell nur die Spannungen, aber nicht die Deformation richtig wiedergibt. Die tatsächliche Membran würde unter Kompression ausbeulen. Der Γ -Limes beinhaltet einen Quasikonvexitätschritt, welcher für dieses Verhalten verantwortlich ist.

Jörg Schröder legte den kontinuumsmechanischen Grundstein, indem er die Zuhörer auf das Gebiet der Darstellungstheorie von isotropen Tensorfunktionen einstimmte. Diese Darstellungssätze werden gebraucht, um anisotropes Materialverhalten mittels Invarianten auf einem erweiterten Satz von Variablen auszudrücken. Damit gelingt die Konstruktion von anisotropen, polykonvexen Funktionen, die dann bei der numerischen Berechnung von z.B. Arterienwänden Verwendung finden. Weiterhin wurden die eingeführten Invarianten auch ingenieur-mechanisch interpretiert. Mit eindrucksvollen Animationen des Deformationsverhaltens dünner, anisotroper Schalen dokumentierte er den Stand der Technik.

Antonio de Simone untersuchte analytisch und numerisch geometrisch exakte Modelle zur Beschreibung von Liquid-Crystal Elastomeren. Dabei stellte er zuerst ausgiebig die experimentellen Befunde vor. Es zeigt sich ein ausgeprägter Einfluss der Mikrostruktur auf das makroskopische Antwortverhalten. Die Mikrostruktur zeigt zudem ein ausgeprägtes richtungsabhängiges Verhalten. In einem ersten Schritt der Vereinfachung wird angenommen, dass sich das Material einem Energieprinzip entsprechend verhält. Aus den klassischen Darstellungssätzen lässt sich sodann eine kanonische freie Energie konstruieren, welche aber nicht quasikonvex ist. Ziel ist es jetzt, die quasikonvexe Hülle zu bestimmen. Dies gelingt de Simone wie folgt: man finde zuerst die Rang-Eins-Hülle und zeige sodann, dass sie mit der polykonvexen Hülle übereinstimmt. Hier fließt sehr viel physikalisches Verständnis ein. Danach ist die gefundene Hülle Basis einer FEM-Implementation. Klar ist, dass die Elliptizität erhalten bleibt. Nun zeigen sich aber die Grenzen der gewählten Methode: die Hülle selbst ist



sehr „flach“, so dass weitere numerische Änderungen notwendig werden. Zuletzt erweitert de Simone das System um dissipative Effekte; konkrete numerische Resultate stehen dafür aber noch aus.

David Steigmann befasste sich mit Theorien für Membran und Schalen sowie der Handhabung des Biotschen Verzerrungstensors. Für den zweidimensionalen Membranfall stellte er die Pipkinsche Methode vor, um zu relaxierten, quasikonvexen Energiefunktionalen zu kommen. Steigmann ging dann auf Formeln zur Berechnung des Biotschen Verzerrungstensors ein und konnte zeigen, wie man elegant mit dieser Größe rechnet. Insbesondere ist es mit den von ihm gezeigten Formeln möglich, Polykonvexität für anisotrope Ausdrücke zu überprüfen. Daran anschließend stellte Steigmann eine Schalentheorie höherer Ordnung vor, welche sich in das Umfeld des noch immer ungelösten Problems einer physikalisch korrekten, gleichzeitigen Beschreibung von Membran und Biegung einordnen lässt.

Miroslav Silhavy skizzierte im ersten Teil seiner Vorlesungen die verschiedenen Konvexitätsbedingungen, insbesondere für objektive und isotrope Energiefunktionen. Er stellte Beziehungen zwischen der Legendre-Hadamard-Elliptizitätsbedingung und der Baker-Erikssen-Ungleichung her und formulierte notwendige und hinreichende Kriterien für die Rang-Eins-Konvexität. Des Weiteren stellte Silhavy allgemeine Methoden vor, um die quasikonvexe Hülle einer Energiefunktion zu bestimmen. Silhavy verdeutlichte, dass bis auf Modifikationen des Sverakischen Gegenbeispiels alle elliptischen Funktionen auch quasikonvex sind. Die Umkehrung ist sowieso klar. Mit den von ihm in diesem Teil vorgestellten Methoden (insbesondere sogenannte Interlacing-Ungleichungen zwischen gewissen Eigenwerten) konnten einige bereits vorgestellte Resultate als Spezialfälle abgehandelt werden. Zum Beispiel ergibt sich die von de Simone angegebene quasikonvexe Hülle ganz zwangslässig. Im zweiten Teil ging Silhavy auf die Frage

nach den richtigen Konvexitätsbedingungen für Interface-Energie Terme ein.

Meine Vorlesungen begann ich mit grundsätzlichen Konzepten zur Konvexität, wobei ich insbesondere auf Fallstricke einging, die der erfolgreichen Anwendung der Methoden im Wege stehen. So reicht z.B. die Überprüfung auf Positivität der formalen zweiten Ableitung eingeschränkt auf positiv definite Inkremente keineswegs aus. Ich rekapitulierte auch, wie man geschickt die Taylor-Entwicklung ansetzt, um, unter Umgehung der Index-Rechnung, erste und zweite Ableitungen zu berechnen. Damit kann man dann typischerweise die Nicht-Elliptizität von vielen in der Ingenieurliteratur gern verwendeten Ausdrücken zeigen. Im letzten Teil meiner Vorlesung stellte ich die Dimensionsreduktion eines dreidimensionalen finiten Cosserat Modells mithilfe der Methode der Γ -Konvergenz vor. Zuerst führte ich das zugrunde liegende Modell ein, welches zusätzliche Rotationsfreiheitsgrade aufweist. Dann wendete ich, angelehnt an Raoults Vorgehen, eine Membranskalierung an, um den Γ -Limes für die Dicke gegen Null zu bestimmen. Der Γ -Limit weist eine unübliche Defizienz auf: er ist nicht wohlgestellt! Die Gründe dafür wurden in einer Gegenüberstellung zu einer formalen Dimensionsreduktion erörtert. Das „formale“ Modell geht nach Linearisierung in das wohlbekannte Reissner-Mindlin Modell über.

Die Organisatoren danken allen Vortragenden und den 59 Teilnehmern aus 13 Ländern, die zum Erfolg dieses Kurses beigetragen haben.

Dr. rer. nat. habil. Patrizio Neff
 Technische Universität Darmstadt
 FB Mathematik, AG 6
 Schlossgartenstr. 7
 D-64289 Darmstadt
 Germany
 e-mail: neff@mathematik.tu-darmstadt.de

7 Anhang

Literatur

- [1] BALL, J. M.: Convexity conditions and existence theorems in non–linear elasticity. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 63 (1977), S. 337–403
- [2] BALL, J.M.: Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elasto-statics. In: KNOPS, R.J. (Hrsg.): *Herriot Watt Symposium: Nonlinear Analysis and Mechanics*. Bd. 1. London : Pitman, 1977, S. 187–238
- [3] BALL, J.M.: Some open problems in elasticity. In: *Geometry, Mechanics and Dynamics*. New York : Springer, 2002, S. 3–59
- [4] BALL, J.M.; JAMES, R.D.: Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two well problem. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 338 (1992), S. 389–450
- [5] BALZANI, D.: *Polyconvex anisotropic energies and modeling of damage applied to aterial walls.*, Institut für Mechanik, Abteilung Bauwissenschaften, Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Diss., 2006
- [6] BALZANI, D.; GRUTTMANN, F.; SCHRÖDER, J.: Analysis of Thin Shells Using Anisotropic Polyconvex Energy Densities. In: *cmiamae* 197 (2008), S. 1015–1032
- [7] BALZANI, D.; NEFF, P.; SCHRÖDER, J.; HOLZAPFEL, G.A.: A polyconvex framework for soft biological tissues. Adjustment to experimental data. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), Nr. 20, S. 6052–6070
- [8] BALZANI, D.; SCHRÖDER, J.; GRUTTMANN, F.: Polyconvex Energy Densities with Applications to Anisotropic Thin Shells. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 7, 2008
- [9] BERTRAM, A.; BÖHLKE, T.; SILHAVÝ, M.: On the rank 1 convexity of stored energy functions of physically linear stress-strain relations. In: *Journal of Elasticity* 86 (2007), S. 235–243
- [10] BETTEN, J.: Integrity basis for a second-order and a fourth-order tensor. In: *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 5 (1982), Nr. 1, S. 87–96
- [11] BETTEN, J.: Recent advances in applications of tensor functions in solid mechanics. In: *Advances in Mechanics* 14 (1991), Nr. 4, S. 79–109
- [12] BETTEN, J.: Anwendungen von Tensorfunktionen in der Kontinuumsmechanik anisotroper Materialien. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 78 (1998), Nr. 8, S. 507–521
- [13] BETTEN, J.; HELISCH, W.: Irreduzible Invarianten eines Tensors vierter Stufe. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 72 (1992), Nr. 1, S. 45–57
- [14] BETTEN, J.; HELISCH, W.: Tensorgeneratoren bei Systemen von Tensoren zweiter und vierter Stufe. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 76 (1996), Nr. 2, S. 87–92

- [15] BOEHLER, J.P.: Lois de comportement anisotrope des milieux continus. In: *Journal de Mécanique* 17 (1978), Nr. 2, S. 153–190
- [16] BOEHLER, J.P.: A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 59 (1979), S. 157–167
- [17] BOEHLER, J.P.: Introduction to the invariant formulation of anisotropic constitutive equations. In: BOEHLER, J.P. (Hrsg.): *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics* Bd. 292. Springer, 1987, S. 13–30
- [18] BÖHLKE, T.; BRÜGGEMANN, C.: Graphical representation of the generalized hooke's law. In: *Technische Mechanik (Magdeburg)* 21 (2001), Nr. 2, S. 145–158
- [19] CHIRITA, S.; DANESCU, A.; CIARLETTA, M.: On the strong ellipticity of the anisotropic linearly elastic materials. In: *Journal of Elasticity* 87 (2007), S. 1–27
- [20] CIARLET, P.G.: *Mathematical Elasticity, Vol I: Three-Dimensional Elasticity*. Amsterdam : Elsevier, 1988 (Studies in Mathematics and its Applications)
- [21] DIMITRIENKO, Y.I.: *Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions*. Kluwer Academic Publishers, 2002
- [22] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: Approximation of anisotropic elasticity tensors at the reference state with polyconvex energies. In: *Archive of Applied Mechanics* (2007). – Submitted for publication
- [23] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: On the construction of anisotropic polyconvex energy densities. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 7, 2008
- [24] EBBING, V.; SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: Polyconvex models for arbitrary anisotropic materials. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2008. – Submitted for publication
- [25] EHRET, A.; ITSKOV, M.: A polyconvex hyperelastic model for fiber-reinforced materials in application to soft tissues. In: *Journal of Materials Science* 42 (2007), S. 8853–8863
- [26] HARTMANN, S.; NEFF, P.: Polyconvexity of generalized polynomial type hyperelastic strain energy functions for near incompressibility. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 2767–2791
- [27] ITSKOV, M.; AKSEL, N.: A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. In: *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), S. 3833–3848
- [28] ITSKOV, M.; EHRET, A.E.; MAVRILLAS, D.: A polyconvex anisotropic strain-energy function for soft collagenous tissues. In: *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* 5 (2006), S. 17–26
- [29] KAMBOUCHEV, N.; FERNANDEZ, J.; RADOVITZKY, R.: A polyconvex model for materials with cubic symmetry. In: *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering* 15 (2007), S. 451–467

- [30] KNOWLES, J.K.; STERNBERG, E.: On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics. In: *Journal of Elasticity* 8 (1978), S. 329–379
- [31] KRAWIETZ, A.: *Materialtheorie - Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens*. Springer, 1986
- [32] LIU, I.S.: On representations of anisotropic invariants. In: *International Journal of Engineering Science* 20 (1982), S. 1099–1109
- [33] MARKERT, B.; EHLERS, W.; KARAJAN, N.: A general polyconvex strain-energy function for fiber-reinforced materials. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 5 (2005), S. 245–246
- [34] MARSDEN, J.E.; HUGHES, J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, 1983
- [35] MENZEL, A.; STEINMANN, P.: On the comparison of two strategies to formulate orthotropic hyperelasticity. In: *Journal of Elasticity* 62 (2001), S. 171–201
- [36] MIELKE, A.: Necessary and sufficient conditions for polyconvexity of isotropic functions. In: *Journal of Convex Analysis* 12 (2005), S. 291–314
- [37] MORREY, C.B.: Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. In: *Pacific Journal of Mathematics* 2 (1952), S. 25–53
- [38] MÜLLER, S.: Variational models for microstructure and phase transitions. In: *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems*. Berlin : Springer, 1999 (Lecture Notes in Math. 1713), S. 85–210
- [39] NEFF, P.: *Mathematische Analyse multiplikativer Viskoplastizität*. Aachen, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2000. – Shaker Verlag, ISBN:3-8265-7560-1
- [40] NEFF, P.: Mathematical analysis of generalized convexity conditions. In: SCHRÖDER, J. (Hrsg.); NEFF, P. (Hrsg.): *Polyconvexity in Applied Mechanics*. Springer, 2008 (CISM Courses and Lectures Sept. 2007). – In preparation
- [41] NEUMANN, F.E.; MEYER, O.E. (Hrsg.): *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper and des Lichtäthers*. Teubner, 1885
- [42] RECHENBERG, I.: *Evolutionsstrategie '94*. Frommann-Holzboog, 1994
- [43] RYCHLEWSKI, J.; ZHANG, J.M.: On representations of tensor functions: a review. In: *Advances in Mechanics* 14 (1991), S. 75–94
- [44] SCHRÖDER, J.: On the construction of anisotropic polyconvex energy functions. In: SCHRÖDER, J. (Hrsg.); NEFF, P. (Hrsg.): *Polyconvexity in Applied Mechanics*. Springer, 2008 (CISM Courses and Lectures Sept. 2007). – In preparation
- [45] SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: On the construction of polyconvex anisotropic free energy functions. In: MIEHE, C. (Hrsg.): *Proceedings of the IUTAM Symposium on Computational Mechanics of Solid Materials at Large Strains*, Kluwer Academic Publishers, 2001, S. 171–180

- [46] SCHRÖDER, J.; NEFF, P.: Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 401–445
- [47] SCHRÖDER, J.; NEFF, P.; BALZANI, D.: A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity. In: *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), Nr. 15, S. 4352–4371
- [48] SCHRÖDER, J.; NEFF, P.; EBBING, V.: Anisotropic polyconvex energies on the basis of crystallographic motivated structural tensors. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (2008). – Submitted for publication
- [49] SCHWEFEL, H.P.: *Evolution and Optimum Seeking*. Wiley, 1996
- [50] SHUVALOV, L.A.: *Modern Crystallography IV, Physical Properties of Crystals*. Springer, 1988
- [51] SILHAVÝ, M.: *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer, 1997
- [52] SIMMONS, G.; WANG, H.: *Single Crystal Elastic Constants and Calculated Aggregate Properties*. Massachusetts Institute of Technology : The M.I.T. Press, 1971
- [53] SMITH, G.F.; RIVLIN, R.S.: Stress-deformation relations for anisotropic solids. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1 (1957), S. 107–112
- [54] SMITH, G.F.; RIVLIN, R.S.: The strain-energy function for anisotropic elastic materials. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 88 (1958), S. 175–193
- [55] SMITH, G.F.; SMITH, M.M.; RIVLIN, R.S.: Integrity bases for a symmetric tensor and a vector. The crystal classes. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 12 (1963), S. 93–133
- [56] SPENCER, A.J.M.: Theory of invariants. In: ERINGEN, A.C. (Hrsg.): *Continuum Physics* Bd. 1. Academic Press, 1971, S. 239–353
- [57] SPENCER, A.J.M.: Isotropic polynomial invariants and tensor functions. In: BOEHLER, J.P. (Hrsg.): *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics* Bd. 292. Springer, 1987, S. 141–170
- [58] STEIGMANN, D.J.: Frame-invariant polyconvex strain-energy functions for some anisotropic solids. In: *Mathematics and Mechanics of Solids* 8 (2003), S. 497–506
- [59] ŞUHUBİ, E.S.: Thermoelastic Solids. In: ERINGEN, A.C. (Hrsg.): *Continuum Physics* Bd. 2. Academic Press, 1975
- [60] XIAO, H.: On isotropic extension of anisotropic tensor functions. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 76 (1996), Nr. 4, S. 205–214
- [61] ZHANG, J.M.; RYCHLEWSKI, J.: Structural tensors for anisotropic solids. In: *Archives of Mechanics* 42 (1990), S. 267–277

- [62] ZHENG, Q.S.: Theory of representations for tensor functions – A unified invariant approach to constitutive equations. In: *Applied Mechanics Reviews* 47 (1994), S. 545–587
- [63] ZHENG, Q.S.; SPENCER, A.J.M.: Tensors which characterize anisotropies. In: *International Journal of Engineering Science* 31 (1993), Nr. 5, S. 679–693