WS 2012/13

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Fakultät für Mathematik – Campus **Essen**
Lehrstuhl für *Nichtlineare Analysis und Modellierung*
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen

Diplomarbeit

Die 2. Kornsche Ungleichung

Patricia Derksen

13. März 2013

Betreuer
Prof. Dr. Patrizio Neff

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Neukirchen-Vluyn, 13. März 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit sind die sogenannten Kornschen Ungleichungen, benannt nach dem deutschen Mathematiker und Physiker Arthur Korn[1]. Er entwickelte diese Ungleichungen Anfang des frühen 20. Jahrhunderts im Rahmen des Randwertproblems der Linearen Elastizitätstheorie. Man unterscheidet zwei Ungleichungen: die 1. und die 2. Kornsche Ungleichung.

2. Kornsche Ungleichung:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Für Funktionen mit Nullrandbedingungen vereinfacht sich diese zu:

1. Kornsche Ungleichung:

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\varepsilon_{ij}(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

$\varepsilon_{ij}(u)$ bezeichnet hierbei den symmetrischen Teil des Gradienten ∇u. In der linearen Elastizitätstheorie versteht man unter dem symmetrischen Teil des Gradienten ein Maß für die Verformung eines elastischer Körpers durch eine vektorwertige Funktion. Aus diesem Grund sind die Kornschen Ungleichungen ein wichtiges Werkzeug für die a priori Abschätzung in der linearen Elastizitätstheorie.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die Kornschen Ungleichungen näher zu durchleuchten. Dabei richtet sich mein Hauptaugenmerk auf die unterschiedlichen Beweise der beiden Ungleichungen.

Zu Beginn meiner Arbeit werde ich einige Notationen klären und ein paar Sätze und Definitionen wiederholen, die ich im Laufe dieser Arbeit des öfteren verwenden werde. Ein großer Abschnitt entfällt dabei auf die Fourier-Transformation, die als Vorbereitung für das Lemma von Lions dienen soll, welches eine große Rolle in einem Beweis der 2. Kornschen Ungleichung von Duvaut & Lions spielt.

Da die Kornschen Ungleichungen für Sobolev-Funktionen definiert sind, werde ich mich in Kapitel 3 ausführlich mit Sobolev-Räumen und Funktionen auf diesen befassen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei das Unterkapitel zu Fortsetzungen von Sobolev-Funktionen, da die Vorgehensweise im Beweis zu Satz 3.15 ähnlich ist wie die in einem weiteren Beweis der 2. Kornschen Ungleichung von Nitsche.

[1]* 20. Mai 1870 in Breslau; † 21. Dezember 1945 in Jersey City; Geburts- und Sterbedaten sind im Folgenden der freien Enzyklopädie Wikipedia entnommen.

In Kapitel 4 beschäftige ich mich nun mit den Kornschen Ungleichungen und deren Beweisen. Die 1. Kornsche Ungleichung folgt aus der 2. Kornschen Ungleichung und der Tatsache, dass die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist. Aus diesem Grund besteht meine Hauptaufgabe darin, die 2. Kornsche Ungleichung zu zeigen. In der Literatur sind dazu eine Vielzahl von Beweisen zu finden. Ich werde mich in diesem Kapitel drei unterschiedlichen Beweisen widmen.

Zum Abschluss werde ich mich noch einmal genauer mit der Bedeutung der Kornschen Ungleichungen in der linearen Elastizitätstheorie befassen.

2. Vorbereitungen

Bevor ich mit meiner eigentlichen Arbeit beginne, möchte ich einige wichtige Definitionen und Sätze benennen, die eine zentrale Rolle in dieser Arbeit spielen werden.

2.1. Notationen

Definition 1 *(L^p-Raum) Zu $1 \leq p < \infty$ werden die L^p-Räume[1] folgendermaßen definiert:*

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Mit der Norm

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

wird $L^p(\mathbb{R}^n)$ zu einem Banach-Raum[2]. In Analogie definiere ich

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \mathrm{d}x < \infty\},$$

welcher mit der Norm

$$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| = \inf_{\mu(N)=0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus N} |u(x)|$$

ein Banach-Raum wird. Hierbei bezeichnet $\operatorname{ess\,sup}$ *das wesentliche (oder essentielle) Supremum[3]. Besonders wichtig ist der Raum aller quadratintegrierbarer Funktionen $L^2(\mathbb{R}^n)$, welcher mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen u, v ein Hilbert-Raum[4] ist.

Definition 2 *(glatte Funktion) Eine Funktion u heißt glatt, wenn sie unendlich oft differenzierbar ist. Der Raum aller glatten Funktionen wird mit*

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega)$$

[1]Benannt nach dem französischen Mathematiker Henri Léon Lebesgue (* 28. Juni 1875 in Beauvais; † 26. Juli 1941 in Paris), da diese Räume über das Lebesgue-Integral definiert werden.

[2]Benannt nach dem polnischen Mathematiker Stefan Banach (* 30. März 1892 in Krakau; † 31. August 1945 in Lemberg). Dabei ist ein Banach-Raum ein vollständig normierter Raum.

[3]Ist a Supremum von u, so ist $\{x \in D \mid u(x) > a\} = \emptyset$ (D =Definitionsbereich). Ess sup bedeutet, dass diese Menge eine Nullmenge ist, dass also $u(x) \leq a$ fast überall (f.ü.).

[4]Benannt nach dem deutschen Mathematiker David Hilbert (* 23. Januar 1862 in Königsberg; † 14. Februar 1943 in Göttingen). Ein Hilbert-Raum ist ein Vektorraum, der bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm vollständig (also ein Banach-Raum) ist.

gekennzeichnet, wobei $C^k(\Omega)$ die Menge aller k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

Definition 3 *(Träger) Mit*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(u) \textit{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}$$

wird die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnet, die einen kompakten Träger haben, also außerhalb einer kompakten Menge gleich null sind. Hierbei ist der Träger eine Funktion $u : A \mapsto \mathbb{R}$, definiert als die Nichtnullstellenmenge dieser Funktion, genauer

$$\operatorname{supp}(u) := \overline{\{x \in A \mid u(x) \neq 0\}}.$$

Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ wird auch der Raum der Testfunktionen genannt.

Definition 4 *(Gebiet) Eine offene und zusammenhängende Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, heißt Gebiet. Der Abschluss von Ω wird gekennzeichnet mit $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, wobei $\partial\Omega = \Gamma$ den Rand von Ω bezeichnet. Dabei heißt $x \in \mathbb{R}^n$ Randpunkt von Ω, wenn für jedes $\epsilon > 0$ zwei Punkte $x_0, x_1 \in B_\epsilon(x)$ existieren, so dass $x_0 \notin \Omega$ und $x_1 \in \Omega$ gilt. Genauer: der Rand besteht aus allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, für die gilt, dass jede ihrer Umgebungen sowohl Punkte aus Ω als auch Punkte aus dem Komplement von Ω enthält.*

Definition 5 *(Multiindex) Ein Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist ein Vektor nicht negativer ganzer Zahlen, d.h. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Für den Ausdruck D^α bedeutet dies: Die Komponenten von α geben an, wie oft nach welcher Koordinate differenziert wird, d.h.*

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Die Ordnung von α ist dabei gegeben durch $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Insbesondere gilt

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = D^{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}.$$

Beispiel 1 *Im Fall $n = 3$ ist für $u \in C^3(\Omega)$:*

$$D^{(2,1,1)} u(x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3}.$$

Definition 6 *(Gradient, Divergenz, Laplace-Operator) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $u : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)^T : U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld, wobei unter einem Vektorfeld eine Funktion zu verstehen ist, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet.*

(i) Mit ∇ bezeichne ich wie üblich den Nabla-Operator[5]. Dabei handelt es sich formal um einen Vektor, dessen Komponenten aus den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bestehen. Im n-dimensionalen Raum wird das Produkt aus ∇ und einer (davorstehenden) Funktion u als partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ interpretiert und ergibt somit den Gradienten

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T.$$

[5] Dieser Begriff aus dem Hebräischen stammt von dem schottischen Physiker und Theologen William Robertson Smith (* 8. November 1846 in Keig; † 31. März 1894 in Cambridge), den die Form an eine antike Harfe erinnerte.

(ii) Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ ist definiert als das skalare Feld

$$\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_i}.$$

Für matrixwertiges $F = (f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ (hierbei sind f_{ij} für $1 \leq i, j \leq n$ reellwertige, differenzierbare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$) ist die Divergenz gegeben durch

$$\operatorname{div} F = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \right)_{1 \leq j \leq n}.$$

(iii) Mit Δ bezeichne ich den Laplace-Operator[6] $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$. Im n-dimensionalen Raum ergibt sich

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

In einer Dimension handelt es sich bei dem Laplace-Operator also um die zweite Ableitung: $\Delta u(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2}$.

2.2. Wichtige Sätze

In meiner Arbeit werde ich häufiger Sätze aus der Analysis und/oder Funktionalanalysis verwenden. Die wichtigsten, und solche die ich mehrfach verwende, möchte ich an dieser Stelle kurz erwähnen.

Beginnen möchte ich mit einem wichtigen Satz in der Maß- und Integrationstheorie, dem Satz von der majorisierenden Konvergenz. Er besagt, unter welchen Bedingungen Integration und Grenzwertbildung vertauschbar sind. In dem Kapitel zur Fourier- Transformation werde ich ihn des Öfteren verwenden.

Satz 2.1 *(Satz von der majorisierenden Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue) Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$, die fast überall gegen eine messbare Funktion u konvergiert. Ferner sei $\upsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Majorante von u, d.h. $|u_n| \leq \upsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_n \mathrm{d}x.$$

Ein überaus wichtiger Satz in der Integralrechnung ist der folgende Satz. Er besagt, unter welchen Bedingungen es möglich ist, mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale Integrale zurückzuführen.

Satz 2.2 *(Satz von Fubini[7]) Es sei f eine reellwertige μ-messbare Funktion, die bezüglich des Produktmaßes $\mu(x, y)$ Lebesgue-integrierbar ist, d.h.*

$$\int_{I \times J} |f(x, y)| \mathrm{d}(x, y) \leq \infty.$$

[6] Benannt nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Astronomen Pierre-Simon Laplace (* 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge in der Normandie; † 5. März 1827 in Paris).

[7] Benannt nach dem italienischen Mathematiker Guido Fubini (* 19. Januar 1879 in Venedig; † 6. Juni 1943 in New York).

Dann sind

$$x \mapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y, \quad y \mapsto \int_I f(x,y)\mathrm{d}x$$

integrierbar, und es gilt

$$\int_{I\times J} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_J \Big(\int_I f(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int_I \Big(\int_J f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Der Satz gibt also eine Antwort auf die Frage, wann und wie man mehrdimensionale Integrale mit Hilfe von eindimensionalen Integralen berechnen kann. Eine weitere Aussage dieses Satzes ist die Tatsache, dass die Reihenfolge der eindimensionalen Integration keine Rolle spielt.

Weiterhin werde ich im Verlauf dieser Arbeit des öfteren die mehrdimensionale partielle Integration verwenden.

Satz 2.3 *(mehrdimensionale partielle Integration) Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Für $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt die Formel der partiellen Integration:*

$$\int_\Omega u(x)D_i v(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)\mathrm{d}s - \int_\Omega v(x)D_i u(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Hierbei bezeichnet $n_i(x)$ die i-te Komponente des äußeren Normaleneinheitsvektors $n(x)$ in $x \in \partial\Omega$. Für $u = 0$ auf $\partial\Omega$ vereinfacht sich die Formel (2.1) zu

$$\int_\Omega u(x)D_i v(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)D_i u(x)\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Eine Verallgemeinerung der Integration durch Substitution auf Funktionen in höheren Dimensionen stellt die sogenannte Transformationsformel dar.

Satz 2.4 *(Transformationsformel) Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\psi : \Omega \to \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, d.h. eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung mit einer ebenfalls stetig differenzierbarer Umkehrabbildung ψ^{-1}. Dann gilt: Die Funktion u auf $\psi(\Omega)$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $x \mapsto u(\psi(x))|\det(D\psi(x))|$ auf Ω integrierbar ist. Dann gilt*

$$\int_{\psi(\Omega)} u(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega u(\psi(x))|\det(D\psi(x))|\mathrm{d}x.$$

Hierbei bezeichnet $D\psi(x)$ die Jacobi-Matrix[8] von ψ. Unter $det(D\psi(x))$ ist also die Funktionaldeterminate von ψ zu verstehen.

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich, wie sich bereits aus dem Namen schließen lässt, mit der Untersuchung linearer, stetiger Funktionale. Aus diesem Grund spielen die Dualräume eine wichtige Rolle in der Funktionalanalsysis. Im Folgenden bezeichne ich mit H' den Dualraum von H.

[8]Benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (* 10. Dezember 1804 in Potsdam; † 18. Februar 1851 in Berlin).

Satz 2.5 *(Darstellungssatz von Riesz[9]) Sei H ein reeller Hilbert-Raum. Dann gibt es zu jedem stetigen Funktional $u \in H'$ genau ein $y \in H$ mit $u(x) = \langle x, y \rangle_H \quad \forall x \in H$. Weiterhin ist $\|y\|_H = \|u\|_{H'}$.*

In Worten ausgedrückt, besagt der Riesz'sche Darstellungssatz, dass jedem linearen und beschränkten Funktional u über dem Hilbert-Raum H eindeutig ein Hilbert-Raum Element y zugeordnet ist. Damit bildet die Menge solcher Funktionale wieder einen Hilbert-Raum.

Ein wichtiges Hilfsmittel, um durch "Zusammenstückeln" von lokaler Integration zur globalen Integration überzugehen, ist das folgende Verfahren der Zerlegung der Eins.

Satz 2.6 *(Zerlegung der Eins) Es sei $\{\Omega_j\}_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von Ω, d.h. $\Omega \subset \bigcup_{j\in J} \Omega_j$ mit Ω_j offen für jedes $j \in J$. Dann existiert eine Familie von Funktionen $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass*

(i) $0 \le \psi_j \le 1$ für alle j

(ii) supp $\psi_j \subset \Omega_j$

(iii) für alle $x \in \Omega$ gilt: $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1$.

(iv) jeder Punkt von Ω besitzt eine offene Umgebung, in der nur endlich viele Funktionen $\psi_i|_\Omega$ einen von Null verschiedenen Funktionswert haben.

$(\psi_j)_{j\in J}$ heißt eine der Überdeckung $\{\Omega_j\}_{j\in J}$ untergeordnete (stetige) Zerlegung der Eins auf Ω.

Bemerkung 2.7 *Für $\psi_j \in C_0^\infty$ kann also eine Funktion u in Funktionen $u_j = u \cdot \psi_j$ zerlegt werden, wobei die u_j alle einen kompakten Träger besitzen. Weiterhin ist dann $u = \sum_{j\in J} u_j$.*

Beispiel 2 [10] *Die Funktion*

$$r(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(-x^{-2})} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar. Dann ist aber ebenso die Funktion s mit

$$s(x) = r(x+1)r(x-1)$$

beliebig oft differenzierbar. Außerdem ist sie im Intervall $(-1; 1)$ streng positiv und außerhalb davon Null. Die Funktionen $f_i, i \in \mathbb{Z}$ mit

$$f_i(x) = \frac{s(x-i)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(x-k)}$$

bilden nun eine beliebig oft differenzierbare Zerlegung der Eins auf der reellen Achse, die der offenen Überdeckung $(i-1; i+1), i \in \mathbb{Z}$ untergeordnet ist. In jedem Punkt x gilt also: $\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i(x) = 1$.

[9] Benannt nach dem ungarischen Mathematiker Frigyes Riesz (* 22. Januar 1880 in Györ; † 28. Februar 1956 in Budapest).

[10] Dieses Beispiel stammt auf dem Artikel Zerlegung der Eins aus der freien Enzyklopädie Wikipedia und steht unter der Doppellizenz GNU-Lizenz für freie Dokumentation und Creative Commons CC-BY-SA 3.0 Unported (Kurzfassung (de)). In der Wikipedia ist eine Liste der Autoren verfügbar.

2.3. Fourier-Transformation

Im Beweis des Lemmas von J.L. Lions werde ich einige Eigenschaften der Fourier-Transformierten[11] benutzen. Aus diesem Grund möchte ich mich zunächst genauer mit der Fourier-Transformation beschäftigen. Sie ist eine fundamental wichtige Integraltransformation.

2.3.1. Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definition 7 *Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Fourier-Transformierte von u in ξ gegeben durch:*

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

Dabei ist $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i = x_1\xi_1 + \ldots x_n\xi_n$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\mathcal{F} : u \to \hat{u}$ heißt Fourier-Transformation.

Proposition 1 *Die Fourier-Transformation ist als Abbildung $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, linear und stetig, für $C(\mathbb{R}^n)$ ausgestattet mit der Norm $\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup|u(x)|$.*

Beweis (siehe [14], S.40) Für den Integrand $u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}$ gilt: Er ist stetig für alle x in ξ und durch $|u(x)|$ beschränkt für fast alle ξ. Mit dem Satz von der majorisierenden Konvergenz ist für $\xi_n \to \xi$:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{u}(\xi_n) = \hat{u}(\xi),$$

woraus die Stetigkeit von $\hat{u}$ folgt. Die Linearität von $\mathcal{F}$ folgt aus der Linearität des Integrals. Zudem gilt:

$$|\mathcal{F}u(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

und somit $\|\mathcal{F}u\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

□

Eine überaus wichtige Eigenschaft der Fourier Transformation ist ihre Wirkung auf Faltungen, dabei ist die Faltung zweier Funktionen wie folgt definiert:

Definition 8 *Seien $u, \upsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist ihre Faltung gegeben durch*

$$(u * \upsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\tau)\upsilon(x - \tau)\mathrm{d}\tau.$$

Damit lässt sich die Faltung als Produkt auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ auffassen.

Satz 2.8 *Für $u, \upsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\widehat{u * \upsilon}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}(\xi)\hat{\upsilon}(\xi).$$

[11] Benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker Jean-Baptiste-Joseph Fourier (* 21. März 1768 bei Auxerre; † 16. Mai 1830 in Paris).

Beweis (siehe [11], S.185) Für $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} u(z)v(x-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\xi} u(z) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-z)\cdot\xi} v(x-z)\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\xi} u(z)\mathrm{d}z \hat{v}(\xi) \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.9 *Für $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi)\hat{v}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Beweis Mit dem Satz von Fubini erhalte ich

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x v(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\hat{v}(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2 *Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig in 0 und $\hat{u} \geq 0$. Dann ist $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und*

$$u(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t\cdot x}\mathrm{d}x$$

fast überall. Insbesondere ist

$$u(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\mathrm{d}x.$$

2.3.2. Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum

Definition 9 *Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt schnell-fallend oder auch Schwartz-Funktion[12], wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist, und wenn für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion $x^\alpha D^\beta u(x)$ beschränkt ist.*

Definition 10 *Den Vektorraum aller schnell-fallender Funktionen, oder auch Schwartz-Raum genannt, bezeichne ich mit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < \infty\}.$$

Sein Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt Raum der temperierten Distributionen[13], dabei ist unter einer temperierten Distribution eine lineare und stetige Abbildung $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ zu verstehen.

[12] Benannt nach dem französischen Mathematiker Laurent Schwartz (* 5. März 1915 in Paris; † 4. Juli 2002 in Paris).

[13] Für eine genaue Definition einer Distribution siehe Kapitel 4, Definitionen 21 und 22

Eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist also genau dann Schwartz-Funktion, wenn $D^\beta u$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ schnell-fallend ist. Außerdem ist eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ genau dann Schwartz-Funktion, wenn für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|D^\beta u(x)| \leq \infty.$$

Eine Folge (u_n) konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen 0, wenn die Funktionen, sämtliche Ableitungen und diese multipliziert mit beliebigen Polynomen gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}^n$ gegen 0 konvergierten.

Beispiel 3 *(i) Jede beliebig oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ist eine Schwartz-Funktion, d.h.* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Die Funktion $u(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2}$ *ist ein Beispiel für eine Funktion, die in* $\mathcal{S}$*, aber nicht in* C_0^∞ *liegt, da sie zwar schnell-fallend ist, aber keinen kompakten Träger besitzt.*

Definition 11 *Sei* $u \in \mathcal{S}$ *und* $\xi \in \mathbb{R}^n$*. Dann heißt*

$$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x) \mathrm{d}x$$

die Fourier-Transformierte von u. Der auf $\mathcal{S}$ *definierte Operator heißt Fourier-Transformation.*

Es folgen einige Eigenschaften von $\mathcal{S}$.

Satz 2.10 *(i)* $\mathcal{S}$ *ist invariant unter der Multiplikation von Polynomen und unter der Ableitung, d.h. ist P ein Polynom und* $u \in \mathcal{S}$*, so ist* $Pu \in \mathcal{S}$ *bzw. mit* $u \in \mathcal{S}$ *ist auch* $D^\beta u \in \mathcal{S}$ *für* $\beta \in \mathbb{N}_0^n$

(ii) $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

(iii) $\mathcal{S}$ *ist invariant unter Fourier-Transformation, d.h. für jedes* $u \in \mathcal{S}$ *ist auch* $\hat{u} \in \mathcal{S}$.

Satz 2.11 *Die Abbildung* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *ist bijektiv mit der Umkehrabbildung bzw. inversen Fourier-Transformation*

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x) \mathrm{d}x, \quad u \in \mathcal{S}.$$

Im Beweis dieses Satzes verwende ich unter anderem die folgenden zwei Bemerkungen. Für den Beweis von Bemerkung 2.12 verweise ich auf Dobrowolksi ([7], S. 226f), die Aussage von Bemerkung 2.13 ist offensichtlich.

Bemerkung 2.12 *Es ist* $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}})(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.

Bemerkung 2.13 *Es gilt* $(\mathcal{F}^{-1}u)(x) = (\mathcal{F}u)(-x)$.

Beweis (siehe [7], S.227f) Angesichts von Bemerkung 2.13 existiert die obige Transformation und bildet $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ ab. Erneut wende ich den Satz von Fubini an: Für $u, \upsilon \in \mathcal{S}$ ist

$$\begin{aligned}\int \mathcal{F}u(\xi)\upsilon(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\int u(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\upsilon(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int u(y)\Big(\int \upsilon(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\Big)\mathrm{d}y \\ &= \int u(y)\mathcal{F}\upsilon(y-x)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Nun substituiere ich $z = y - x$. Damit ergibt sich

$$\int \mathcal{F}u(\xi)\upsilon(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi = \int u(z+x)\mathcal{F}\upsilon(z)\mathrm{d}z. \tag{2.3}$$

Zusammen mit der Bemerkung 2.12 und der Substitution $x_i = \frac{y_i}{\epsilon}$ gilt für die Funktion $\upsilon(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\epsilon^2|x|^2}{2}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\upsilon(z) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int \mathrm{e}^{-\frac{\epsilon^2|x|^2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{\epsilon^n}\int \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}y\cdot z}{\epsilon}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}})(\frac{z}{\epsilon}) \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2\epsilon^2}}.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zusammen mit der Gleichung (2.3) und der Substitution $z_i = \epsilon y_i$

$$\begin{aligned}\int \mathcal{F}u(\xi)\upsilon(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi &= \int \mathcal{F}u(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\epsilon^2|\xi|^2}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi &(2.4)\\ &= \epsilon^{-n}\int \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2\epsilon^2}}u(z+x)\mathrm{d}z &(2.5)\\ &= \int \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2}}u(x+\epsilon y)\mathrm{d}y. &(2.6)\end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$ existieren auf beiden Seiten der Gleichung (2.6) die punktweisen Grenzwerte der Integranden. Nun wende ich den Satz von der majorisierenden Konvergenz an. Das ist möglich, da sowohl u als auch $\mathcal{F}u$ schnell-fallend sind:

$$\int \mathcal{F}u(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u)(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}u(x) = \int \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2}}u(x)\mathrm{d}y.$$

Mithin ist $u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u)(x)$, insbesondere ist $\mathcal{F}$ injektiv. In derselben Weise zeigt man, dass $u(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}u)(x)$, woraus die Injektivität von $\mathcal{F}^{-1}$ folgt.

□

Als Konsequenz erhalte ich:

Korollar 1 *Die Fourier-Transformation ist ein Automorphismus des Schwartz-Raumes.*

Nun werde ich die bisherigen Kenntnisse nutzen, um eine Fortsetzung der Fourier-Transformation und Inversion auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ zu erhalten.

2.3.3. Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$

Das Ziel dieses Abschnitts wird es sein, die Fourier-Transformierte für eine beliebige Funktion $u \in L^2$ zu definieren. Um das zu erreichen werde ich wie folgt vorgehen: Ich konstruiere eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1 \cap L^2$, die in L^2 gegen u konvergiert. Für deren Folgenglieder u_n ist die Fourier-Transformierte definiert. Die Fourier-Transformierte von u erhalte ich dann als Grenzwert der Folgen $(\hat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Doch bevor ich diese Folge wirklich konstruieren kann, benötige ich zunächst den folgenden Satz:

Satz 2.14 *Für $u \in L^1 \cap L^2$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt: $\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.*

Beweis (siehe [11], S.183f) Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $v(x) := \bar{u}(-x)$. Weiterhin sei $\omega = u * v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ die Faltung, d.h.

$$\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\bar{u}(-y)\mathrm{d}y. \tag{2.7}$$

Dann ist (siehe Eigenschaften der Fourier-Transformation)

$$\hat{\omega} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}\hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Aber es ist

$$\hat{v}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\bar{u}(-x)\mathrm{d}x = \bar{\hat{u}}(y);$$

und somit $\hat{\omega} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}|\hat{u}|^2$. Da ω stetig ist, erhalte ich unter Verwendung von Proposition 2 (siehe S.12)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{\frac{n}{2}}|\hat{u}|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\omega}(x)\mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\omega(0).$$

Somit ist zusammen mit (2.7)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2\mathrm{d}x = \omega(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(-x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\mathrm{d}x.$$

□

Proposition 3 $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *ist ein beschränkter linearer Operator ($L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ausgestattet mit der L^2-Norm).*

Beweis Die Beschränktheit folgt direkt aus dem vorhergehenden Satz. Die Linearität folgt erneut aus der Linearität des Integrals.

□

Proposition 4 $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *ist dicht in* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $M \subset X$ liegt dicht in X, wenn $\bar{M} = X = \{x \in X \mid \exists$ Folge $x_n \in M$ mit $x_n \to x\}$.

Beweis $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt die Behauptung.

□

Da, wie eben gesehen, $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist in $L^2(\mathbb{R}^n)$, muss es eine eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{F}$ auf ganz $L^2(\mathbb{R}^n)$ geben, welche ich jetzt konstruieren werde (siehe [8], S. 3). Sei dazu $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere ich

$$u_k(t) := \begin{cases} u(t), & |t| \leq k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die punktweise Konvergenz von $u_k \to u$ für $k \to \infty$ ist offensichtlich, die Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz[14]. Also gilt: $u_k \to u$ für $k \to \infty$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Da $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und der Träger von u_k kompakt ist, liegt u_k in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Es ist daher möglich, die Fourier-Transformierte von u_k zu berechnen. Diese ist dann wohldefiniert:

$$\hat{u}_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_k(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot t} \mathrm{d}t = \int_{|t| \leq k} u(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot t} \mathrm{d}t.$$

Mit $u_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist nach Satz 2.14 auch $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Und da u_k gegen u konvergiert, ist wegen

$$\lim_{k,l \to \infty} \|\hat{u}_k - \hat{u}_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k,l \to \infty} \|\widehat{u_k - u_l}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k,l \to \infty} \|u_k - u_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

für $k, l \in \mathbb{N}$ auch u_k eine Cauchy-Folge[15]. Wegen der Vollständigkeit von L^2 konvergiert $\hat{u}_k$ also in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition 12 *Die Fourier-Transformierte von u definiere ich als den oben genannten, eindeutigen Grenzwert von $\hat{u}_k$ in L^2,*

$$\hat{u}(x) := \lim_{k \to \infty} \hat{u}_k = \lim_{k \to \infty} \int_{|t| \leq k} u(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot t} \mathrm{d}t.$$

Bemerkung 2.15 *Es kommt nicht auf die Wahl der Folge u_k an.*

Beweis (siehe [8], S. 3f) Sei u_k eine Folge mit $u_k \to u$ und $\hat{u}_k \to \hat{u}$ für $k \to \infty$. Sei v_k eine weitere Folge in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $v_k \to u$ für $k \to \infty$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{v}_k$ ebenso eine Cauchy-Folge wie $\hat{u}_k$ und besitzt daher einen eindeutigen Grenzwert in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diesen Grenzwert bezeichne ich mit v. Dann gilt

$$0 = \lim_{k \to \infty} \|u_k - v_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k \to \infty} \|\hat{u}_k - \hat{v}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u} - \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

und da $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ eine Norm ist, ist $\|\hat{u} - \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$ äquivalent dazu, dass $\hat{u} = \hat{v}$. Somit konvergiert auch $\hat{v}_k$ gegen $\hat{u}$.

□

[14] Ist $u_k : \Omega \to \mathbb{K}$ eine Folge messbarer Funktionen mit einer gemeinsamen Majorante $v \in L^2(\Omega)$ und existiert $\lim_{k \to \infty} u_k$ fast überall, so gilt $u = \lim_{k \to \infty} u_k \in L^2(\Omega)$.

[15] Benannt nach dem französischen Mathematiker Augustin Louis Cauchy (* 21. August 1789 in Paris; † 23. Mai 1857 in Sceaux).

Daraus ergibt sich also, dass die Fourier-Transformierten einer Folge, die gegen u konvergiert, immer gegen die Fourier-Transformierte von u konvergieren. Mit Definition 12 ist die Fourier-Transformierte einer Funktion in $L^2(\mathbb{R}^n)$ also eindeutig bestimmt.

Als nächstes folgen einige Eigenschaften der Fourier-Transformierten für den L^2-Raum, dabei lassen sich die meisten Eigenschaften der L^1-Theorie auch auf L^2 übertragen.

Satz 2.16 *(Eigenschaften der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$)*
Für beliebige $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gelten

(i) $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

(ii) $\widehat{D^\alpha u} = \mathcal{F}(D^\alpha u) = \mathrm{i}^\alpha \xi^\alpha \mathcal{F}(u) = \mathrm{i}^\alpha \xi^\alpha \hat{u}$, *für jeden Multiindex α so dass $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(iii) Wenn $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}\hat{v}$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) v(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{v}(x) \mathrm{d}x$

(v) $\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \overline{v}(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) \overline{\hat{v}}(x) \mathrm{d}x$

Diese Eigenschaften benötige ich nun, um das Hauptresultat der L^2-Theorie, den Satz von Plancherel[16], zu beweisen. Doch dafür muss ich zunächst den Begriff eines unitären Operators definieren.

Definition 13 *Ein Operator heißt unitär, wenn er linear, isometrisch (d.h. normerhaltend) und bijektiv ist.*

Satz 2.17 *(Satz von Plancherel)*

(i) Die Fouriertransformation ist ein unitärer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Die Inverse Abbildung der Fouriertransformation F, erhält man durch

$$\mathcal{F}^{-1} u(x) = \mathcal{F} u(-x) \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis (siehe [8], S. 5ff)

(i) Die Linearität folgt erneut aus der Linearität des Integrals und die Isometrie ist eine Folgerung aus Satz 2.14. Es ist nämlich $\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(u-v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u-v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Überdies ist es mir möglich, aus der Isometrie auch auf die Injektivität zu schließen: Da nämlich $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ eine Norm ist, folgt aus

$$0 = \|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(u-v)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u-v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow u = v.$$

Es bleibt noch die Surjektivität von $\mathcal{F}$ zeigen. Dafür benötige ich die folgende Tatsache.

Behauptung 1 *$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) =: W$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

[16]Benannt nach dem Schweizer Mathematiker Michel Plancherel (* 16. Januar 1885 in Bussy, † 4. März 1967 in Zürich).

Beweis Da jede Abbildung surjektiv auf ihr Bild ist, ist also $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to W = \mathrm{im}\,(\mathcal{F})$ surjektiv. Zusammen mit der Injektivität von $\mathcal{F}$ folgt daraus, dass die Abbildung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to W = \mathrm{im}\,(\mathcal{F})$ bijektiv ist. Sei $(\upsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nun eine Folge in W mit $\upsilon_k \to \upsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$. Dann gibt es aufgrund der Bijektivität von $\mathcal{F}$ für jedes k in $\mathbb{N}$ genau ein $u_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{F}u_k = \upsilon_k$. Weiterhin gilt zusammen mit Satz 2.14

$$\lim_{k,l\to\infty} \|u_k - u_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k,l\to\infty} \|\mathcal{F}u_k - \mathcal{F}u_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k,l\to\infty} \|\upsilon_k - \upsilon_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Somit ist u_k eine Cauchy-Folge und wegen der Vollständigkeit von $L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es dann ein $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $u_k \to u$ für $k \to \infty$.
$\mathcal{F}u \in W$, da $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \|\upsilon_k - \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\lim_{k\to\infty} \upsilon_k - \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\upsilon - \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Somit ist $\upsilon = \mathcal{F}u$. Folglich konvergiert jede Folge aus W in W. Demnach ist W also ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$.

□

Behauptung 2 *$\mathcal{F}$ ist surjektiv.*

Beweis Es ist also zu zeigen, dass $W = L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Der Beweis erfolgt indirekt. Ich nehme also an, dass $L^2(\mathbb{R}^n) \neq W$.
Zur Erinnerung: $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein Hilbert-Raum[17]. Angesichts der Behauptung 1 lässt sich $L^2(\mathbb{R}^n)$ also schreiben als die innere orthogonale Summe von W und seinem orthogonalen Komplement $W^\perp$, d.h. also

$$L^2(\mathbb{R}^n) = W \bigoplus W^\perp, \qquad \text{für } W^\perp = \{z \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \langle z, \omega \rangle = 0, \forall \omega \in W\}.$$

Da ich angenommen habe, dass $W \neq L^2(\mathbb{R}^n)$, gibt es ein $u \neq 0$ in $W^\perp$, d.h. $\langle u, \hat{\upsilon} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\upsilon} \in W$. Wegen $\hat{\upsilon} \in W$ und $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to W$ bijektiv, ist υ eindeutig bestimmt, ebenso auch $\mathcal{F}u = \hat{u}$, da $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zusammen mit den Eigenschaften der Fourier-Transformierten ist daher

$$0 = \langle u, \hat{\upsilon} \rangle = \langle \hat{u}, \upsilon \rangle \quad \forall \upsilon \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Somit ist $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$, also $u = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

□

(ii) Sei $u_k \to u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{u}_k \to \hat{u}$ und ω_k eine Folge von Funktionen mit

$$\omega_k(t) = \lim_{|x|\leq k} \hat{u}(x)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t\cdot x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_k(x)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t\cdot x}\mathrm{d}x.$$

[17] Das Skalarprodukt für Funktionen $u, v \in L^2$ ist dabei definiert als: $\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} u(t)\overline{v(t)}dt$

Offensichtlich ist $\omega_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$, weil $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Da $\hat{u}_k$ gegen $\hat{u}$ konvergiert, folgt zusammen mit der Definition von ω_k, dass $\lim_{k,l\to\infty}\|\omega_k - \omega_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. Somit ist ω_k also eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und wegen der Vollständigkeit von $L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert ω_k gegen eine Funktion $\tilde{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(t) &= \lim_{k\to\infty} \omega_k(t) = \lim_{k\to\infty} \int_{|x|\leq k} \hat{u}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t\cdot x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t\cdot x}\mathrm{d}x \\
&= (\mathcal{F}\hat{u})(-t).
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini gilt für $\upsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\upsilon_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\upsilon_k \to \upsilon$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\langle \upsilon, \tilde{\omega}\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle \upsilon_k, \omega_k\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \upsilon_k(t)\left[\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{u}_k}(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\cdot x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{u}_k}(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} \upsilon_k(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\cdot x}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{u}_k}(x)\hat{\upsilon}_k(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{u}}(x)\hat{\upsilon}(x)\mathrm{d}x \\
&= \langle \hat{\upsilon}, \hat{u}\rangle \\
&= \langle \upsilon, u\rangle.
\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini durfte hierbei mit derselben Begründung angewendet werden, weshalb es auch möglich war Integral und Grenzwert zu vertauschen, nämlich, weil das Skalarprodukt von zwei Funktionen in $L^2(\mathbb{R}^n)$ existiert und somit endlich ist. Folglich ist

$$\langle \upsilon, \tilde{\omega}\rangle = \langle \upsilon, u\rangle$$

für alle $\upsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nach Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes ist dann

$$u(t) = \tilde{\omega}(t) = (\mathcal{F}\hat{u})(-t) \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

und somit

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(t) = \hat{u}(-t) = \mathcal{F}u(-t) \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

□

3. Sobolev-Räume

Nun komme ich zum Hauptteil meiner Arbeit. Meine Untersuchung über Sobolev-Räume beginne ich mit dem folgenden elementaren Satz, welcher eine wichtige Rolle in der Variationsrechnung spielt, beispielsweise bei der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung[1].

3.1. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung

Definition 14 *Mit $L^1_{loc}(\Omega)$ bezeichne ich den Raum aller lokal integrierbaren Funktionen. Er besteht aus allen messbaren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$, die auf jeder Menge $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ integrierbar sind.*

Satz 3.1 *(Fundamentallemma der Variationsrechnung) Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \geq 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0. \tag{3.1}$$

Dann ist $u \geq 0$ fast überall in Ω.

Für den Beweis benötige ich noch einige Informationen über sogenannte Glättungsfunktionen:
Sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gegeben mit:

$$\eta(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{(-\frac{1}{1-|x|^2})} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.2}$$

wobei für die reelle Konstante λ gelten soll, dass $\int_\Omega \eta(x)\mathrm{d}x = 1$.
Für alle $\varepsilon > 0$ sei $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Dann gilt: $\eta_\varepsilon(x) = 0$ für $|x| \geq \varepsilon$ und $\|\eta_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$=1. Das Faltungsintegral

$$u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \tag{3.3}$$

existiert dann und ist unendlich oft differenzierbar für $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. u_ε heißt die Glättungsfunktion von u.
Außerdem verwende ich im Beweis noch die folgenden zwei Lemmata:

Lemma 3.2 *Wenn $u \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$, dann ist $\eta_\varepsilon * u = u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$ und $\|\eta_\varepsilon * u\|_{L^p(\Omega)} = \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$, $u_\varepsilon \to u$ in $L^p(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$.*

[1] Benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in Sankt Petersburg) und dem italienischen Mathematiker und Astronomen Joseph-Louis de Lagrange (* 25. Januar 1736 in Turin; † 10. April 1813 in Paris). Die Euler-Lagrange-Gleichung ist das zentrale Element in der Variationsrechnung, in dessen Rahmen Extrema von Funktionalen untersucht werden. In diesem Zusammenhang beschreibt die Euler-Lagrange-Gleichung die Stationäritätsbedingung eines Funktionals.

Lemma 3.3 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Dann gilt: Aus $u_k \to u$ in $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, folgt $u_k \to u$ dem Maße nach.*

Damit ist es mir nun möglich das Fundamentallemma zu beweisen.

Beweis (siehe [7], S.87f)
Zunächst nehme ich an, u sei stetig und es gebe einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) < 0$. Wegen der Stetigkeit von u gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(x_0)$ mit $u(x) < 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Es ist dann möglich eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_0))$ zu konstruieren mit $\varphi \geq 0, \varphi \neq 0$. Daher ist $\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x < 0$, im Widerspruch zur Annahme (3.1).
Sei nun $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, also nicht notwendigerweise stetig. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist auch $\eta_\varepsilon * \varphi = \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Zusammen mit dem Satz von Fubini ist dann

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega u(x)\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x &= \int_\Omega \int_{|x-y|<\varepsilon} u(x)\varphi(y)\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \varphi(y)\left(\int_{|x-y|<\varepsilon} u(x)\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega u_\varepsilon(y)\varphi(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Da u_ε stetig ist, ist $u_\varepsilon \geq 0$ in Ω. Mit

$$u = u - u_\varepsilon + u_\varepsilon \tag{3.4}$$

folgt zusammen mit Lemma 3.2, dass $\|u - u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Lemma 3.3 liefert weiterhin:

$$\mu\Big(\{x \in \Omega : |u(x) - u_\varepsilon(x)| \geq \alpha\}\Big) \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Aus (3.4), folgt $u(x) \geq -\alpha$ bis auf eine Menge vom Maß ε'. Da α und ε' beliebig klein gewählt werden können, gilt $u \geq 0$ fast überall in Ω.

□

3.2. Schwache Ableitungen

Oft erscheint die Definition der klassischen Ableitung als zu streng. Beispielsweise für die Funktion $u(x) = |x|$. Hier liegt es nahe, einfach $u'(x) = sgn(x)$[2] zu setzen. In diesen Fällen schafft die Definition der schwachen Ableitung Abhilfe. Sie ermöglicht es, auch Funktionen eine Ableitung zuzuordnen, die nicht im klassischen Sinn differenzierbar sind.

[2]Die Signumfunktion $sgn(x)$ ist hierbei wie folgt definiert:

$$sgn(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Definition 15 *Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ besitzt eine* α-te schwache Ableitung *in* Ω, *wenn es eine Funktion $u_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt, derart, dass*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi \mathrm{d}x \tag{3.6}$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Lemma 3.4 *Die schwache Ableitung ist, sofern sie existiert, eindeutig. Ist eine Funktion stetig differenzierbar, so stimmt die schwache Ableitung mit der klassischen Ableitung überein, was man mit Hilfe der partiellen Integration sehen kann.*

Beweis (siehe [7], S.88) Angenommen u_α und $u_{\alpha'}$ seien schwache Ableitungen von u. Dann ist für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$: $\int_\Omega u D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_{\alpha'} \varphi \mathrm{d}x$. Also ist: $\int_\Omega (u_\alpha - u_{\alpha'})\varphi \mathrm{d}x = 0$. Und aus einer Variante des Fundamentallemmas folgt $u_\alpha = u_{\alpha'}$.

□

Aus diesem Grund werde ich in dieser Arbeit nicht zwischen der klassischen und der schwachen Ableitung unterscheiden. Im Folgenden ist also stets $u_\alpha = D^\alpha u$. Es folgt ein Beispiel einer schwach differenzierbarer Funktion.

Beispiel 4 *(siehe [7], S.89) Die Funktion $u(x) = |x|$ ist schwach differenzierbar in $\Omega = (-1, 1)$ mit der Ableitung $D^\alpha u = sgn(x)$. Denn mit partieller Integration gilt:*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 -x\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -x\varphi(x)|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x + x\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^1 sgn(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Hierbei habe ich verwendet, dass $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, da $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Die zweite Ableitung jedoch existiert nicht. Versuche ich nämlich $u(x) = |x|$ ein zweites Mal zu differenzieren:

$$\int_{-1}^1 sgn(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 -\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \varphi'(x)\mathrm{d}x = -2\varphi(0),$$

so müsste $-2\varphi(0)$ nach Definition der schwachen Ableitung für eine beliebige Wahl von φ mit (u'', φ) übereinstimmen. So ein u'' gibt es aber nicht in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Der nächste Satz stellt eine Verallgemeinerung dieses Beispiels dar.

Satz 3.5 *Sei $\{\Omega_k\}_{k=1,\ldots,K}$ eine Partition von Ω in stückweise glatte Teilgebiete, d.h. $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k$, $\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset$ für $k \neq l$. Dann ist jede (vektorwertige) Funktion $u \in C^0(\bar{\Omega})$ mit $u \in C^1(\bar{\Omega}_k)$ für alle $k = 1, \ldots, K$ schwach differenzierbar in Ω mit beschränkter Ableitung, die in den Ω_k jeweils mit der klassischen Ableitung übereinstimmt und auf den Rändern der Ω_k beliebig ist.*

Beweis (siehe [7], S.90)
Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Mit partieller Integration erhalte ich

$$\int_\Omega uD\varphi \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} uD\varphi \mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} Du\varphi \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} \nu u\varphi \mathrm{d}\sigma.$$

Das Integral über $\partial\Omega$ verschwindet wegen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, die übrigen Randintegrale heben sich gegenseitig auf, weil die äußeren Einheitsnormalenvektoren an benachbarten Teilgebieten jeweils unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Es ist daher:

$$\int_\Omega uD\varphi \mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} Du\varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega Du\varphi \mathrm{d}x.$$

□

Es folgen einige Eigenschaften schwacher Ableitungen.

Satz 3.6 *(i) Wenn u eine schwache Ableitung $D^\alpha u$ in Ω besitzt, so ist u auch schwach differenzierbar in jedem Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega$.*

(ii) Wenn $D^\alpha u$ eine schwache Ableitung $D^\beta(D^\alpha u)$ besitzt, so existiert die schwache Ableitung $D^{\alpha+\beta}u$ ebenfalls und beide stimmen überein.

Beweis (siehe [7], S.90)

(i) Die Behauptung folgt direkt aus der Definition der schwachen Ableitung (da man die Funktionen φ mit verschwindenem Träger auf Ω_0 einschränken kann)

(ii) Aus

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u)\varphi \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

sowie

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\beta\psi \mathrm{d}x = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

erhalte ich mit $\varphi = D^\beta\psi$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega uD^{\alpha+\beta}\psi \mathrm{d}x &= \int_\Omega uD^\alpha\varphi \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u)\varphi \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u)D^\beta\psi \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \psi \in C_0^\infty(\Omega).
\end{aligned}$$

□

3.3. Definition und grundlegende Eigenschaften von Sobolev-Räumen

Definition 16 *Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$ besteht der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ aus allen Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, die k-mal schwach differenzierbar sind mit Ableitungen im Raum $L^p(\Omega)$, d.h.*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k \ \exists \ y \in L^p(\Omega) \text{ mit } y = D^\alpha u\}.$$

Diese Räume werden als Sobolev-Räume[3] bezeichnet.

Beispiel 5 *Die Funktion $u(x) = |x|$ auf $\Omega = (-1, 1)$ aus Beispiel 4 liegt also im Sobolev-Raum $W^{1,\infty}(\Omega)$, da $u, u' \in L^\infty(\Omega)$. Sie liegt aber in keinem Raum $W^{2,p}(\Omega)$, weil keine zweite schwache Ableitung von u existiert.*

Satz 3.7 *Mit den Normen*

(i) $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$,

(ii) $\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$,

werden die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$ zu Banach-Räumen.

Beweis (siehe [11], S.249)
Ich beweise den Satz für den Fall $0 \leq p < \infty$. Dabei zeige ich zunächst, dass $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm ist:
Offenbar ist $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ und $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$ genau dann, wenn $u = 0$. Um die Dreiecksungleichung zu zeigen verwende ich die Minkowski Ungleichung[4].

Minkowski Ungleichung: Für $u, v \in L^p(\Omega)$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist $u + v \in L^p(\Omega)$ und es gilt

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Seien also $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, dann ist

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} (\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)})^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Somit ist $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm. Es bleibt zu zeigen, dass $W^{k,p}(\Omega)$ vollständig ist. Sei dazu $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist für jedes $0 \leq |\alpha| \leq k$ aufgrund der

[3]Benannt nach dem russischen Mathematiker Sergei Lwowitsch Sobolew (* 6. Oktober 1908 in Sankt Petersburg; † 3. Januar 1989 in Moskau).
[4]Benannt nach dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (* 22. Juni 1864 in Aleksotas; † 12. Januar 1909 in Göttingen).

Definition der Sobolev-Norm die Folge $(D^\alpha u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen einen Grenzwert $u_\alpha^* \in L^p(\Omega)$. Der Beweis ist beendet, wenn ich zeigen kann, dass $u_\alpha^* = D^\alpha u$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \varphi \mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k D^\alpha \varphi \mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_k \varphi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha^* \varphi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Also ist $u_\alpha^* = D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ und $u_k \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

□

Bemerkung 3.8 *Auf $W^{k,p}(\Omega)$ sind ebenfalls die folgenden Halbnormen definiert:*

$u \to |u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p\}^{\frac{1}{p}}$

$u \to |u|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = max_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}$.

Bemerkung 3.9 *Der Raum $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, \upsilon \rangle = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha \upsilon \mathrm{d}x.$$

3.4. Approximation von Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen

Um weitere Eigenschaften von Sobolev-Räumen studieren zu können, ist es notwendig, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen approximiert werden können. Der nachfolgende Satz zeigt, dass sich Sobolev-Funktionen lokal durch die Glättungsfunktion u_ε (3.3) approximieren lassen.

Satz 3.10 *Sei $u \in W^{k,p}(\Omega), 1 \le p < \infty$ und $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Dann ist $D^\alpha(\eta_\varepsilon * u) = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ für $|\alpha| \le k$. Insbesondere gilt $u_\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(\Omega_0)$.*

Bemerkung 3.11 *$\Omega \subset\subset V$ bedeutet, dass Ω relativ kompakt, d.h. $\Omega \subset V$ mit $\bar{\Omega}$ kompakt in V.*

Beweis (siehe [11], S.250f)
Für $x \in \Omega$ ist

$$\begin{aligned}D^\alpha(\eta_\varepsilon * u) = D^\alpha u_\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Für ein festes $x \in \Omega_0$ ist $\varphi(y) = \eta_\varepsilon(x-y) \in C_0^\infty(\Omega)$. Folglich ist nach Definition der α-ten schwachen Ableitung

$$\int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)\mathrm{d}y,$$

und damit

$$D^\alpha(\eta_\varepsilon * u)(x) = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)\mathrm{d}y = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x).$$

Wegen $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, da $u \in W^{k,p}(\Omega)$, folgt aus Lemma 3.2, dass $D^\alpha u_\varepsilon \to D^\alpha u$ in $L^p(\Omega_0)$ für $\varepsilon \to 0$ und für $|\alpha| \le k$. Daher ist

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega_0)}^p = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega_0)}^p \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0,$$

und damit $u_\varepsilon \to u$ für $\varepsilon \to 0$.

□

Nun folgt das Hauptresultat dieses Kapitels, nämlich die Approximierbarkeit der Funktionen in $W^{k,p}(\Omega), 1 \le p < \infty$ durch Funktionen im Raum $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$. Damit übertragen sich die meisten Eigenschaften klassisch differenzierbarer Funktionen auf Sobolev-Funktionen, wie beispielsweise die Produktregel (siehe dazu Dobrowolski [7], S. 95).

Satz 3.12 *(Meyers und Serrin[5]) $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$, d.h. zu jedem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $\|u - \varphi\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$.*

Für den Beweis dieses Satzes benötige ich jedoch noch das folgende Lemma.

Lemma 3.13 *(Leibnizformel[6]) Sei $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$ und $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist $\tau u \in W^{k,p}(\Omega)$ und*

$$D^\beta(\tau u) = \sum_{\alpha \le \beta} \binom{\beta}{\alpha} D^\alpha \tau D^{\beta-\alpha} u, \qquad \binom{\beta}{\alpha} = \prod_{k=1}^n \binom{\beta_k}{\alpha_k} = \prod_{k=1}^n \frac{\beta_k!}{\alpha_k!(\beta_k - \alpha_k)!}.$$

Beweis zu Satz 3.12 (siehe [7], S.93f)
Ich wähle die offenen und beschränkten Mengen $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n, j = 0, 1 \ldots$ mit $\emptyset \subset \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \ldots \subset \Omega$ und $\bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$ so, dass $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ eine offene Überdeckung von Ω ist. Dann existiert nach Lemma 2.6 $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, eine Zerlegung der Eins, mit $\sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) = 1$ in Ω und $\operatorname{supp} \psi_j \subset \Omega_j$. Ferner sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist nach Lemma 3.13 $\psi_j u \in W^{k,p}(\Omega)$ und die Funktionen $\psi_j u$ haben kompakte Träger in Ω. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle ich nun $\varepsilon_j > 0$ so klein, dass zusammen mit Satz 3.10 gilt:

$$\|\eta_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

[5]James Serrin war ein US-amerikanischer Mathematiker (* 1. November 1926 in Chicago; † 23. August 2012 in Minneapolis), Norman George Meyers ist ebenso ein US-amerikanischer Mathematiker (* 29. Juni 1930 in Buffalo).

[6]Benannt nach dem deutschen Philosophen und Wissenschaftler Gottfried Wilhelm Leibniz (* 1. Juli 1646 in Leipzig; † 14. November 1716 in Hannover).

Die Funktion $v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_j} * (\psi_j u)(x)$ ist wohldefiniert, da aufgrund des kompakten Trägers nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sind. Daher ist $v(x) \in C^\infty(\Omega)$. Weiterhin ist $u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)u(x)$ und daher:

$$\begin{aligned} \|v-u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \|\sum_{j=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\eta_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Und wegen $v = \underbrace{v-u}_{\in W^{k,p}(\Omega)} + \underbrace{u}_{\in W^{k,p}(\Omega)}$ ist auch $v \in W^{k,p}(\Omega)$.

$\Rightarrow \forall u \in W^{k,p}(\Omega) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) : \|u-v\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon.$

$\square$

3.5. Fortsetzungen

Satz 3.14 *Für eine Funktion $u \in L^p(\Omega)$ ist die Fortsetzung von u durch Null, d.h.*

$$E(u) = \begin{cases} u & auf\ \Omega \\ 0 & sonst \end{cases}$$

ein Element aus $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\|E(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Wenn man aber eine Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen möchte, geht das nicht wie oben einfach mit einer Fortsetzung $u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, denn dann hätte diese Fortsetzung einen Sprung am Rand. Man muss also einen Weg finden, u so fortzusetzen, dass die schwachen Ableitungen am Rand von Ω erhalten bleiben.

Definition 17 *Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann besitzt Ω einen C^1-Rand, falls gilt: Für alle $x \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x und eine bijektive Funktion $\varphi : U \to V$ mit $\varphi \in C^1(U)$, so dass $\varphi^{-1} \in C^1(V)$ und*

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap U &= \{x \mid x \in U, \varphi(x) = 0\}, \\ \Omega \cap U &= \{x \mid x \in U, \varphi(x) < 0\} \\ U/\bar{\Omega} &= \{x \mid x \in U, \varphi(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Im Folgenden sei $1 \leq p \leq \infty$.

Satz 3.15 *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand gibt es zu einer offenen Menge V mit $\Omega \subset\subset V$ einen linearen Operator*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

so dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

(i) $E(u) = u$ *fast überall in* Ω,

(ii) *supp*$(E(u)) \subset V$

(iii) $\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *mit einer Konstanten* $C > 0$ *unabhängig von* u.

$E(u)$ *heißt Fortsetzung von* u *und* E *Fortsetzungsoperator.*

Beweis (siehe [11], S.254ff)
Sei $x^0 \in \partial\Omega$ beliebig aber fest. Ich betrachte die Situation vorerst in einer Umgebung von x^0. Sei dazu $B := B(x^0, r), r > 0$ die offene Kugel um x^0 mit dem Radius r.

Zunächst nehme ich an, $\partial\Omega$ sei flach, d.h. $\partial\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Weiterhin gelte für B

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{\Omega} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n/\Omega. \end{cases}$$

Da $u \in W^{1,p}(\Omega)$ durch glatte Funktionen approximiert werden kann, reicht es aus $u \in C^1(\bar{\Omega})$ zu betrachten. Durch

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{für } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}), & \text{für } x \in B^-. \end{cases} \tag{3.7}$$

definiere ich eine Spiegelung (höherer Ordnung) von B^+ auf B^-. $\tilde{u}$ ist dann nicht nur stetig, vielmehr ist $\tilde{u}$ einmal stetig differenzierbar, d.h.

$$\tilde{u} \in C^1(B). \tag{3.8}$$

Um dies zu prüfen, sei $u^- := \tilde{u}|_{B^-}$ und $u^+ := \tilde{u}|_{B^+}$. Ich weise zuerst die Stetigkeit von $\tilde{u}$ nach, d.h. ich muss zeigen, dass

$$\lim_{x_n \to 0} u^- = \lim_{x_n \to 0} u^+.$$

Es ist

$$\lim_{x_n \to 0} u^- = -3u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) + 4u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \lim_{x_n \to 0} u^+,$$

und somit ist $\tilde{u}$ stetig. Da $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ sind sowohl u^- als auch u^+ ebenfalls stetig differenzierbar. Es bleibt zu zeigen, dass die Ableitung auch stetig ist, d.h.

$$\lim_{x_n \to 0} u^-_{x_i} = \lim_{x_n \to 0} u^+_{x_i} \quad \forall i = 1, \ldots, n, \text{ wobei } u_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

Für $i = 1, \ldots, n-1$ folgt dies aus $u^- = u^+$ auf $\{x_n = 0\}$. Für $i = n$ folgt aus der Definition von $\tilde{u}(x)$,

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3\frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}),$$

und somit

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \to 0} u^-_{x_n}(x) &= 3\frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) - 2\frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \\ &= \lim_{x_n \to 0} u^+_{x_n}(x). \end{aligned}$$

Somit ist die Gültigkeit von (3.8) gezeigt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B)} &= \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_B |D^\alpha \tilde{u}|^p \mathrm{d}x \\
&= \sum_{|\alpha|\leq 1} \left(\int_{B^+} |D^\alpha \tilde{u}|^p \mathrm{d}x + \int_{B^-} |D^\alpha \tilde{u}|^p \mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{B^+} |D^\alpha \tilde{u}|^p \mathrm{d}x + \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{B^-} |D^\alpha \tilde{u}|^p \mathrm{d}x \\
&= \|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B^+)} + \|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B^-)} \\
&= \|u\|^p_{W^{1,p}(B^+)} + \|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B^-)}.
\end{aligned}$$

Zudem ist

$$\|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B^-)} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

mit einer Konstanten $c_1 > 0$. Eine ausführliche Rechnung dazu findet sich im Anhang (siehe S. 55ff). Daher gilt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B)} &= \|u\|^p_{W^{1,p}(B^+} + \|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B^-)} \\
&\leq \|u\|^p_{W^{1,p}(B^+)} + c_1 \|u\|^p_{W^{1,p}(B^+)} \\
&= (1 + c_1) \|u\|^p_{W^{1,p}(B^+)}.
\end{aligned}$$

Und somit folgt mit einer Konstanten $c_2 > 0$

$$\|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B)} \leq \underbrace{\sqrt[p]{1 + c_1}}_{=c_2} \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

für alle $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Durch (3.7) wird also eine lokale Fortsetzung $\tilde{u}$ von u auf B definiert, mit

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Bisher habe ich angenommen, dass $\partial\Omega$ flach ist. Sei nun also $\partial\Omega$ nicht notwendigerweise flach bei x^0. Da $\partial\Omega \subset C^1$, gibt es nach Definition des C^1-Randes eine Umgebung U von x^0 und ein $\varphi \in C^1(U)$ mit einer Inversen $\psi := \varphi^{-1} \in C^1(V)$, so dass auf V die flache Situation vorliegt. Es ist also $y = \varphi(x), x = \psi(y)$ und $u^*(y) = u(\psi(y))$. Mit $B = B(y^0, r), y_0 = \varphi(x_0)$ kann ich nun wie oben u^* von B^+ fortsetzten auf eine Funktion $\tilde{u}^*$ auf ganz B, so dass $\tilde{u}^* \in C^1(B)$ und folgende Abschätzung gilt

$$\|\tilde{u}^*\|_{W^{1,p}(B)} \leq c \|u^*\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Mit Rücktransformation auf die x-Variable nach Anwendung des Transformationssatzes ergibt sich mit $W := \psi(B)$ und $|\det(D\psi(y))| = 1$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}^*\|_{W^{1,p}(B)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_B |D^\alpha \tilde{u}^*(y)|^p \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_B |D^\alpha \tilde{u}(\psi(y))|^p \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\psi(B)=W} |D^\alpha \tilde{u}(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(W)}.
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\|u^*\|_{W^{1,p}(B^+)} &= \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{B^+} |D^\alpha u(\psi(y))|^p \mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Es gibt also eine Fortsetzung $\tilde{u}$ von u auf W mit

$$
\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{3.9}
$$

für eine Konstante $c > 0$.

Für $\partial\Omega$ kompakt, gibt es endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$, dazu offene Mengen W_i, so dass $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^N W_i$, d.h. $\cup_{i=1}^N W_i$ ist eine offene endliche Teilüberdeckung von $\partial\Omega$. Weiterhin gibt es Fortsetzungen $\tilde{u}_i$ von u nach W_i wie oben. Sei $W_0 \subset\subset \Omega$ so gewählt, dass $\Omega \subset \cup_{i=0}^N W_i$. Dann gibt es eine Zerlegung der Eins $(\xi_i)_{i=0}^N$ und $\tilde{u} := \sum_{i=0}^N \xi_i \tilde{u}_i$, wobei $\tilde{u}_0 = u$. Dann erhalte ich zusammen mit der Abschätzung (3.9)

$$
\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{3.10}
$$

für eine Konstante $c > 0$, welche unabhängig ist von u. Für eine ausführliche Rechnung verweise ich erneut auf den Anhang (siehe S. 58f). Außerdem gilt für den Träger von $\bar{u}$, $supp(\bar{u}) \subset V$ mit $\Omega \subset\subset V$. Es gilt somit $Eu = \bar{u}$ und die Abbildung $u \mapsto Eu$ ist linear, denn

$$
\begin{aligned}
&E(\alpha u) = v \text{ mit } v = \alpha u \text{ fast überall in } \Omega, \text{ also} \\
&E(\alpha u) = v = \alpha u = \alpha E(u)
\end{aligned}
$$

und ebenso gilt

$$
\begin{aligned}
&E(u+v) = \omega \text{ mit } \omega = u + v \text{ fast überall in } \Omega, \text{ also} \\
&E(u+v) = u + v = E(u) + E(v).
\end{aligned}
$$

Bisher habe ich angenommen, dass $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Sei nun also $u \in W^{1,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ und $u_m \in C^\infty(\Omega)$ konvergiere gegen u in $W^{1,p}(\Omega)$. Die Abschätzung (3.10) und die Linearität von E implizieren

$$
\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|E(u_m - u_l)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} =\leq c\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
$$

Daher ist $(Eu_m)_{m=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge und konvergiert somit gegen $\tilde{u} =: Eu$. Diese Fortsetzung ist unabhängig von der Wahl der konkreten Folge $(u_m)_{m=1}^\infty$, womit der Satz bewiesen ist.

□

3.6. Randwerte von Sobolev-Funktionen

Die schwachen Ableitungen und die Sobolev-Räume wurden zum Lösen partieller Differentialgleichungen entwickelt. Beim Lösen von Randwertproblemen gibt es jedoch noch ein Problem, da schwach differenzierbare Funktionen ebenso wie die L^p-Funktionen auf Nullmengen nicht definiert sind. Der Ausdruck $u|_{\partial\Omega} = v$ für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $v \in C(\partial\Omega)$ ergibt also erst einmal keinen Sinn. Abhilfe schafft hier der sogenannte Spuroperator:

Satz 3.16 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Dann gibt es einen linearen, beschränkten Operator $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ und

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit einer Konstanten c, die nur von p und Ω abhängt.

Definition 18 *Der Operator T heißt Spuroperator.*

Beweis (siehe [11], S.258f)
Sei $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann betrachte ich, wie im Beweis zuvor, zunächst den Fall, dass $x^0 \in \partial\Omega$ und $\partial\Omega$ flach ist in der Nähe von x^0, d.h. $\partial\Omega \subset \{x_n = 0\}$. Ferner sei B wieder die offene Kugel mit Radius r um x^0, so dass

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{\Omega} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n/\Omega \end{cases}$$

und $\hat{B}$ die konzentrische Kugel mit Radius $\frac{r}{2}$, d.h. $\hat{B} = B^0(x^0, \frac{r}{2})$. Dazu wähle ich $\psi \in C_0^\infty(B)$ derart, dass $\psi \geq 0$ in B und $\psi \equiv 1$ in $\hat{B}$. Mit Γ bezeichne ich zudem die Menge von $\partial\Omega$ in $\hat{B}$, d.h. $\Gamma := \partial\Omega \cap \hat{B}$. Sei $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} = \{x_n = 0\}$. Dann gilt nach Anwendung der partiellen Integration:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |u|^p \mathrm{d}x' &\leq \int_{\{x_n=0\}} 1 \cdot \psi \cdot |u|^p \mathrm{d}x' \\ &= \int_{B^+} |u|^p \frac{\partial}{\partial x_n}\psi + p\,\underbrace{|u|^{p-1}}_{=:b}(\operatorname{sgn} u)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n}u}_{=:a}\,\psi \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

wobei die 1 für die n-te Komponente des äußeren Normalenvektors an Γ steht.

Youngsche Ungleichung[7]: Für $a, b \geq 0$ und $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Angewandt auf den zweiten Summanden ergibt das mit $q = \frac{p}{p-1}$ und $c > 0$:

$$\int_\Gamma |u|^p \mathrm{d}x' \leq c \int_{B^+} |u|^p + |\frac{\partial}{\partial x_n} u|^p \mathrm{d}x \leq c \int_{B^+} |u|^p + |Du|^p \mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

[7] Benannt nach dem englischen Mathematiker William Henry Young (* 20. Oktober 1863 in London; † 7. Juli 1942 in Lausanne).

Damit ist also:

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Sei nun $x^0 \in \partial\Omega$, aber $\partial\Omega$ nicht notwendigerweise flach in der Nähe von x^0. Dann kann ich wie im Beweis zuvor die Koordinaten entsprechend transformieren, so dass (3.11) für ein transformiertes u' gilt. Zusammen mit (3.11) und einer Rücktransformation erhalte ich dann

$$\int_\Gamma |u|^p \mathrm{d}S \leq C \int_\Omega |u|^p + |Du|^p \mathrm{d}x,$$

wobei Γ eine offene Teilmenge von $\partial\Omega$ bezeichnet, die x^0 enthält.
Für $\partial\Omega$ kompakt gibt es endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$ und offene Teilmengen $\Gamma_i \subset \partial\Omega$ ($i = 1, \ldots, N$), sodass $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ und

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Daher gilt für $Tu := u|_{\partial\Omega}$

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{3.12}$$

für eine geeignete Konstante c, die unabhängig ist von u.
Die Ungleichung (3.12) gilt also für alle $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Nun nehme ich an, dass $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es nach Satz 3.12 Funktionen $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$, die gegen u in $W^{1,p}(\Omega)$ konvergieren. Nach (3.12) ist dann:

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{3.13}$$

d.h. $(Tu_m)_{m=1}^\infty$ ist eine Cauchy-Folge in $L^p(\partial\Omega)$. Sei $Tu = \lim_{m\to\infty} Tu_m$ der Grenzwert in $L^p(\partial\Omega)$. Schließlich sei $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Dann ist es möglich die Funktionen $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ so zu konstruieren, dass sie gleichmäßig gegen u auf $\bar{\Omega}$ konvergieren. Daher ist $Tu = u|_{\partial\Omega}$.

□

Definition 19 *Mit $W_0^{k,p}(\Omega)$ bezeichne ich den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Das bedeutet, es ist $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ gibt, so dass $u_n \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$. $W_0^{k,p}(\Omega)$ besteht also aus allen Funktionen $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $D^\alpha u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $|\alpha| \leq k-1$.

Satz 3.17 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$.*

Beweis (siehe [11], S.259ff)
" $\Rightarrow$ " Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existieren aufgrund der Definition Funktionen $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Mit $Tu_m = 0$ auf $\partial\Omega$ ($m = 1, \ldots$) und da $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ein beschränkter und damit stetiger linearer Operator ist, ist $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$.
" $\Leftarrow$ " Die Umkehrung ist etwas schwieriger. Angenommen es ist

$$Tu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Zusammen mit Satz 2.6 (siehe S. 10) und mit "Glätten"von $\partial\Omega$ wie in den vorangegangenen Beweisen kann ich annehmen, dass

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), u \text{ besitzt kompakten Träger in } \bar{\mathbb{R}}^n_+ \\ Tu = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Hierbei ist $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ und $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} = \{x_n = 0\}$. Da $Tu = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$, gibt es Funktionen $u_m \in C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ so dass

$$u_m \to u \text{ in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \tag{3.14}$$

und

$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \text{ in } L^p(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{3.15}$$

Sei $x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \geq 0$, dann ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)| \mathrm{d}t$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' \leq c\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p \mathrm{d}x' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p \mathrm{d}x' dt\Big).$$

Für $m \to \infty$ und mit (3.14), (3.15) erhalte ich für $x_n \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p \mathrm{d}x' \leq c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}t \tag{3.16}$$

Ferner wähle ich $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ derart, dass $\psi \equiv 1$ auf $[0,1]$ und $\psi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}_+/[0,2], 0 \leq \psi \leq 1$ und schreibe

$$\begin{cases} \psi_m(x) := \psi(m x_n) \qquad (x \in \mathbb{R}^n_+) \\ \omega_m := u(x)(1 - \psi_m). \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_n}\omega_m = \frac{\partial}{\partial x_n} u(1 - \psi_m) - mu\frac{\partial}{\partial x_n}\psi \\ D_{x'}\omega_m = D_{x'}u(1 - \psi_m). \end{cases}$$

Und daher

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |D\omega_m - Du|^p \mathrm{d}x \leq c \int_{\mathbb{R}^n_+} |\psi_m|^p |Du|^p \mathrm{d}x + c m^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}t =: A + B. \tag{3.17}$$

Dann ist aber

$$A \to 0 \text{ für } m \to \infty$$

da $\psi_m \neq 0$ nur für $0 \leq x_n \leq \frac{2}{m}$.
Um den Ausdruck B abzuschätzen benutze ich die Ungleichung (3.16):

$$\begin{aligned} B &\leq c m^p \Big(\int_0^{\frac{2}{m}} t^{p-1} \mathrm{d}t\Big)\Big(\int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}x_n\Big) \\ &\leq c \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}x_n \to 0 \text{ für } m \to \infty. \end{aligned}$$

Folglich ist $D\omega_m \to Du$ in $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ und da $\omega_m \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n_+)$, gilt:

$$\omega_m \to u \text{ in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Aber es ist $\omega_m = 0$ für $1 < x_n < \frac{1}{m}$. Deshalb ist es möglich die ω_m zu glätten um Funktionen $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ zu erzeugen, mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Daher ist $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

□

3.7. Poincarè-Ungleichung

Oft ist es hilfreich, Normäquivalenzen herzustellen, bei denen die gesamte Sobolev-Norm (bestehend aus den L^p-Normen aller Ableitungen bis zu k-ten Ordnung) abgeschätzt werden kann durch die L^p-Norm nur! der k-ten Ableitungen (plus geeignete Zusatzterme).

Satz 3.18 *(Poincaré- Ungleichung[8]) Sei Ω eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine nur von Ω und p abhängige Konstante c, mit*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.18}$$

für jede Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$, wobei $(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\mathrm{d}y$ der Mittelwert von u über Ω und $|\Omega|$ das Lebesgue-Maß von Ω.

Im Beweis verwende ich das folgende Lemma:

Lemma 3.19 *(Lemma von Rellich-Kondrachov[9]) Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand. Angenommen es ist $1 \leq p < n$, dann ist für jedes $1 \leq q < p* = \frac{pn}{n-p}$:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

d.h. jede Folge in $W^{1,p}(\Omega)$ besitzt eine in $L^q(\Omega)$ konvergente Teilfolge.

Für einen ausführlichen Beweis dieses Lemmas verweise ich auf Evans (siehe [11], S. 272ff).

Beweis zu Satz 3.18 (siehe [11], S.275f)
Ich führe einen Widerspruchsbeweis. Ich nehme also an, für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ mit:

$$\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Für die normierten Funktionen $\upsilon_n := \frac{u_n - (u_n)_\Omega}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}$ gilt dann:

$$(\upsilon_n)_\Omega = 0, \quad \|\upsilon_n\|_{L^p(\Omega)} = 1 \tag{3.20}$$

[8]Benannt nach dem französischen Mathematiker Henri Poincaré (* 29. April 1854 in Nancy; † 17. Juli 1912 in Paris).

[9]Benannt nach dem deutschen Mathematiker Franz Rellich (* 14. September 1906 in Tramin; † 25. September 1955 in Göttingen) und dem russischen Mathematiker Vladimir Iosifovich Kondrashov (Geburts- und Sterbedaten unbekannt).

woraus mit (3.19) folgt:

$$\|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.21}$$

Insbesondere ist die Funktionenfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$ und besitzt daher nach Lemma 3.19 eine Teilfolge $(v_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$, die in $L^p(\Omega)$ gegen ein $v \in L^p(\Omega)$ konvergiert. Für dieses v gilt wegen (3.20)

$$(v)_\Omega = 0, \quad \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1. \tag{3.22}$$

Andererseits ist aber wegen (3.21) für alle $i \in \{1, \dots, m\}, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega v_{n_l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x = - \lim_{l\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} v_{n_l} \varphi \mathrm{d}x = 0.$$

Damit existiert die schwache Ableitung von v, d.h. $v \in W^{1,p}(\Omega)$, und ist fast überall gleich Null ($Dv = 0$). Da Ω zusammenhängend ist, ist v konstant fast überall in Ω. Wenn aber v konstant ist, muss wegen (3.22) $v \equiv 0$, und damit $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Das ist ein Widerspruch zur rechten Seite von (3.22).

□

4. Kornsche Ungleichungen

In der Elastizitätstheorie betrachtet man den Zustand von Körpern unter der Einwirkung von Kräften. Insbesondere studiert man die Verzerrungen und Spannungen, die durch Deformation erzeugt werden (vgl. Braess [2], S. 272ff). Die Kornschen Ungleichungen spielen eine wichtige Rolle in der linearen Elastizitätstheorie[1]. Aus diesem Grund möchte ich an dieser Stelle einen kurzen Einblick in die Theorie geben.

4.1. Elastizitätstheorie

Die Grundlage bildet hier die dreidimensionale Theorie. Es sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Der Abschluss $\bar{\Omega}$ von Ω beschreibt dabei gerade das Volumen eines Körpers, dass er vor der Verformung einnimmt. Man nennt $\bar{\Omega}$ aus diesem Grund auch Referenzkonfiguration. Eine Deformation der Referenzkonfiguration $\bar{\Omega}$ (vgl. Ciarlet [4], S.26ff) ist ein Vektorfeld

$$\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3,$$

das genügend glatt, injektiv (außer möglicherweise am Rand der Menge Ω) und orientierungserhaltend ist. Der Deformationsgradient $\nabla\varphi$ ist gegeben durch

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\varphi_1 & \partial_{x_2}\varphi_1 & \partial_{x_3}\varphi_1 \\ \partial_{x_1}\varphi_2 & \partial_{x_2}\varphi_2 & \partial_{x_3}\varphi_2 \\ \partial_{x_1}\varphi_3 & \partial_{x_2}\varphi_3 & \partial_{x_3}\varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Da eine Deformation orientierungserhaltend ist, gilt $\det \nabla\varphi > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$, insbesondere ist die Matrix invertierbar für alle $x \in \bar{\Omega}$. Zusammen mit der Deformation möchte ich zudem die Verschiebung u einführen. Dabei handelt es sich um das Vektorfeld

$$u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \varphi = id + u,$$

wobei id die identische Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Damit ergibt sich für den Deformationsgradienten (vgl. Ciarlet [4], S.28f)

$$\nabla\varphi = \mathbf{I} + \nabla u. \tag{4.1}$$

Aus dem Deformationsgradienten lässt sich der sogenannte rechte Cauchy-Green[2] Tensor $\mathbf{C}$ ableiten (vgl. Breass [2], S.273)

$$\mathbf{C} := \nabla\varphi^T \nabla\varphi. \tag{4.2}$$

[1]Linear bedeutet in diesem Fall, dass es nur infinitesimal kleine Verschiebungen und Verzerrungen und einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen gibt.

[2]Benannt nach dem britischen Mathematiker und Physiker George Green (* 14. Juli 1793 in Sneinton, † 31. Mai 1841 in Nottingham).

Die durch

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \tag{4.3}$$

definierte Abweichung von der Identität bezeichnet man als Verzerrung. Nach Einsetzen von (4.2) und (4.1) in (4.3) erhalte ich

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) + \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

In der linearen Elastizitätstheorie werden die quadratischen Terme vernachlässigt und ich erhalte den linearen Verzerrungstensor

$$\varepsilon(u) = \operatorname{sym} \nabla u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \in L^2_{sym}(\Omega) = \{\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in L^2(\Omega); \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \text{ in } \Omega\}.$$

Zum Beispiel ist für $n = 2, \varepsilon(u)$ gegeben durch:

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \frac{1}{2}(\partial_{x_1} u_2 + \partial_{x_2} u_1) \\ \frac{1}{2}(\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) & \partial_{x_2} u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(u) & \varepsilon_{12}(u) \\ \varepsilon_{21}(u) & \varepsilon_{22}(u) \end{pmatrix}.$$

Um eine bestimmte Deformation zu erzeugen, wird eine gewisse Kraft benötigt. Kraft pro Fläche wird als Spannung σ bezeichnet, welche abhängig von der Orientierung der Fläche ist (vgl. Hergarten [12], S.1f). Im einfachsten Fall wird die Orientierung durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ beschrieben. Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreibt demnach beispielsweise eine Fläche in der x_2x_3-Ebene. Die auf diese Fläche wirkende Spannung wird mit $\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}$ bezeichnet. Analog bezeichne ich mit $\begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix}$ die Spannung auf eine Fläche in der x_1x_3-Ebene und mit $\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$ die Spannung auf eine Fläche in der x_1x_2-Ebene. Fasse ich diese drei Vektoren zu einer Matrix zusammen erhalte ich den sogenannten Spannungstensor

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie steht man nun vor der Aufgabe, Lösungen des folgenden linearen Randwertproblems zu finden (siehe [10], S.345f bzw. [4], S. 287ff)

$$-\operatorname{div} \sigma(u) = f, \quad \forall x \in \Omega \tag{4.4}$$

$$u = 0, \quad \forall x \in \Gamma_0 = \Omega \setminus \Gamma_1 \tag{4.5}$$

$$\sigma n = g, \quad \forall x \in \Gamma_1. \tag{4.6}$$

Hierbei ist u das Verschiebungsfeld, f eine volumenbezogene Dichte der äußeren Kräfte, $n = n_i$ der äußere Normaleneinheitsvektor zu Γ und σ der Spannungstensor. Dieser ist durch das Hookesche Gesetz[3] gegeben, d.h.

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{k,l} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u).$$

Unter $\varepsilon_{ij}(u)$ sind hierbei die Komponenten des linearen Verzerrungstensor zu verstehen. Für die Koeffizienten a_{ijkl} gilt: Sie erfüllen die Symmetriebeziehnungen $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$. Durch Skalarmultiplikation der Gleichung (4.4) mit einer Testfunktion v und Integration über Ω erhält man nach Anwendung der partiellen Integration: *Finde eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ mit $u = 0$ auf Γ_0, so dass für alle $v \in H^1(\Omega)$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt:*

$$\int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\partial_{x_j} v_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x.$$

Bei der linken Seite

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\partial_{x_j} v_i \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(v) \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}\partial_{x_l} u_k \partial_{x_j} v_i \mathrm{d}x \end{aligned}$$

handelt es sich um eine stetige Bilinearform auf dem Raum $H^1(\Omega)$. Wegen der Symmetriebedingung $a_{ijkl} = a_{klij}$ ist diese Bilinearform symmetrisch, d.h. $B(u,v) = B(v,u)$. Bei der rechten Seite

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x$$

handelt es sich um eine stetige Linearform $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Das Randwertproblem (4.4) ist also äquivalent zu dem Problem:

$$\textit{Finde eine Lösung } u \in H^1(\Omega) \textit{ mit } B(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4.7}$$

Der nächste Satz besagt, unter welchen Voraussetzungen dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt. Doch zunächst folgt eine kurze Definition:

Definition 20 *Sei V ein Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|$. Eine Bilinearform $B : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt*

1. *stetig, wenn ein $c > 0$ existiert, so dass:*

$$|B(u,v)| \leq c\|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

2. *V-elliptisch, oder kurz elliptisch, wenn ein $c > 0$ existiert, so dass*

$$c\|v\|^2 \leq B(v,v) \quad \forall v \in V.$$

[3] Benannt nach dem englischen Universalgelehrten Robert Hooke (* 28. Juli 1635 in Freshwater, † 14. März 1703 in London)

Satz 4.1 *Sei $L : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Linearform und $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine elliptische Bilinearform. Dann besitzt das Problem: Finde eine Lösung $u \in V$ so dass $B(u, v) = L(v)$ für alle $v \in V$ genau eine Lösung.*

Beweis (siehe [4], S. 289) Da die Bilinearform B elliptisch und stetig ist, gilt:

$$c\|v\|^2 \leq B(v, v) \leq \|B\|\|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

Somit ist die Bilinearform B ein Skalarprodukt auf dem Raum V, und die dazugehörige Norm $v \in V \to (B(v, v))^{\frac{1}{2}}$ ist äquivalent zur gegebenen Norm. Folglich ist V zusammen mit dem Skalarprodukt ein Hilbert-Raum. Nach dem Darstellungsatz von Riesz existiert nun ein Element $l \in V$, mit:

$$L(v) = B(l, v) \quad \forall v \in V. \tag{4.8}$$

Aus (4.8) folgt, $u = l$ ist die einzige Lösung des Problems.

□

Bemerkung 4.2 *Das Problem: Finde eine Lösung $u \in V$ so dass $B(u, v) = L(v)$ für alle $v \in V$, besitzt auch dann eine Lösung, wenn die Bilinearform nicht symmetrisch ist. Das ist nämlich genau die Aussage des Lemmas von Lax-Milgram[4] (siehe dazu [11] S. 297ff).*

In diesem Zusammenhang besagen die Kornschen Ungleichungen, dass die Bilinearform aus (4.7) elliptisch ist. Und somit besitzt das Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie genau eine Lösung. Doch an dieser Stelle möchte ich es bei der bloßen Erwähnung der Tatsache belassen. Der Beweis erfolgt später. Zuvor werde ich mich mit den Kornschen Ungleichungen und deren Beweise beschäftigen.

4.2. 1. Kornsche Ungleichung

Satz 4.3 *(1. Kornsche Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt $\forall u \in H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma\}$ die folgende Ungleichung:*

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Hierbei ist $\nabla u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ und $\varepsilon(u)$ der symmetrischen Teil von ∇u.

Beweis (siehe [3], S. 25)
Es genügt zu zeigen, dass die Ungleichung (4.9) für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht ist in $H_0^1(\Omega)$ (vgl. Definition 19). Sei also $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Zusammen mit der partiellen

[4] Benannt nach dem ungarischen Mathematiker Peter David Lax (* 1. Mai 1926 in Budapest) und dem US-amerikanischen Mathematiker Arthur Milgram (* 3. Juni 1912 in Philadelphia, † 30. Januar 1961)

Integration und der Tatsache, dass u auf dem Rand von Ω verschwindet, ist dann:

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} u_j \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)^2}_{=(\operatorname{div} u)^2 \geq 0} \mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

4.3. 2. Kornsche Ungleichung

Satz 4.4 *(2. Kornsche Ungleichung) Für jedes $u \in H^1(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2 \tag{4.10}$$

mit einer Konstanten $c > 0$, welche unabhängig ist von u.

Im Unterschied zur ersten Kornschen Ungleichung ist der Beweis von (4.10) eher kompliziert und erfordert zusätzliche Voraussetzungen für Ω. In der Literatur sind aufgrund dessen viele verschiedene Beweise zu finden, in denen jeweils andere Annahmen für Ω getroffen wurden. In dieser Arbeit beschränke ich mich auf drei Fälle: Der Rand des Gebiets Ω ist (1) regulär[5], (2) ein Lipschitz-Rand (vgl. Definition 24, S.43) und (3) polygonal berandet. Ich beginne mit dem Beweis, welcher in Duvaut & Lions [9] zu finden ist. Er beruht auf der Annahme, Ω sei eine offene, beschränkte Menge mit regulärem Rand (1). Doch zunächst gebe ich einen kurzen Überblick über wichtige Notationen. Anschließend folgt ein wichtiges Lemma von J.L. Lions (Lemma 4.7, S.42), welches eine zentrale Rolle im Beweis der Kornschen Ungleichung spielt.

4.3.1. Das Lemma von J.L. Lions

Vorbereitungen

Zur Erinnerung: Für alle $k \geq 1$ werden mit $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), H^k_0(\Omega) = W^{k,2}_0(\Omega)$ die regulären Sobolev-Räume bezeichnet. Die Normen in $L^2(\Omega)$ und $H^k(\Omega)$ werden gekennzeichnet

[5] Ein Randpunkt $x \in \partial\Omega$ heißt regulär, wenn es eine Umgebung U von x und eine einmal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi'(x) \neq 0\ \forall x \in U$ gibt, so dass $\Omega \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}$. Die Menge aller regulären Punkte heißt regulärer bzw. glatter Rand von Ω.

mit $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ und sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \quad u \in L^2(\Omega)\\ \|u\|_{H^k(\Omega)} &= \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{k} \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad u \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Um das Lemma von J.L. Lions zu verstehen, muss ich zunächst ausführlich den Begriff der Distribution erklären und zudem Sobolevräume mit reellen Exponenten mit Hilfe der Fourier-Transformation definieren.

Definition 21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0^\infty(\Omega)$. Dann konvergiert die Folge ψ_k gegen $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn es eine kompakte Menge $K \subset\subset \Omega$ gibt mit $\mathrm{supp}(\psi_k), \mathrm{supp}(\psi) \subset K$ und $D^\alpha \psi_k \to D^\alpha \psi$ gleichmäßig in Ω für alle Multiindizes α gilt. $C_0^\infty(\Omega)$ ausgestattet mit diesem Konvergenzbegriff bezeichne ich mit $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Definition 22 *Eine Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ heißt Distribution, wenn T linear und stetig ist, d.h. wenn für alle Folgen $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi_k \to \psi$ im Sinne von Definition 21, auch $T(\psi_k) \to T(\psi)$ gilt. Die Menge der Distributionen bezeichne ich mit $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Beispiel 6 *(siehe [7], S.217f)*

(i) Eine Abbildung

$$T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad u \in L^1_{loc}(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

ist eine Distribution. Das bedeutet, jede Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ erzeugt eine Distribution. Solche Distributionen heißen regulär.

(ii) Für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\tilde{T}_u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \mathrm{d}x$$

eine Distribution.

Bemerkung 4.5 *Existiert die schwache Ableitung von u, so ist auch $\tilde{T}_u$ eine reguläre Distribution mit $\tilde{T}_u = T_{D^\alpha u}$, $D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Das heißt, dass sich die schwache Ableitung von der distributionellen Ableitung nur dadurch unterscheidet, dass die abgeleitete Funktion eine reguläre Distribution sein muss. Verzichtet man auf diese Forderung, so bedeutet dies, dass jede Distribution beliebig oft differenzierbar ist.*

Weiterhin spielt die Fourier-Transformation (siehe Kapitel 2.3) in dem Lemma von Lions eine große Rolle, denn mit ihrer Hilfe lassen sich auch Sobolevräume $H^s(\mathbb{R}^n)$ mit reellen Exponenten s definieren.

Definition 23 *Für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $u_s(y) = (1+|y|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(y) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit dem Skalarprodukt $\langle u, \upsilon\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{\upsilon}(\xi)}\mathrm{d}\xi$ wird $H^s(\mathbb{R}^n)$ zu einem Hilbertraum.*

Bemerkung 4.6 *Diese Definition gilt auch für $s < 0$ mit der Einschränkung, dass u eine Distribution ist. Dabei gilt $H^s(\mathbb{R}^n) \cong H^{-s}(\mathbb{R}^n)$*[6]*, wobei $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ den Dualraum von $H^s(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.*

Aus der Bemerkung 4.6 ergibt sich also:

$H^{-1}(\Omega)$ ist der Dualraum von $H_0^1(\Omega)$ ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Es ist klar, dass für eine Distribution v gilt

$$v \in L^2(\Omega) \Longrightarrow v \in H^{-1}(\Omega) \text{ und } \partial_i v \in H^{-1}(\Omega), 1 \leq i \leq n,$$ [7]

da (die Dualität zwischen $C_0^\infty(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)'$ wird mit $\langle .,. \rangle$ bezeichnet):

$$|\langle v, \varphi \rangle| = |\int_\Omega v\varphi \mathrm{d}x| \leq |v|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

$$|\langle \partial_i v, \varphi \rangle| = |-\langle v, \partial_i \varphi \rangle| = |-\int_\Omega v \partial_i \varphi \mathrm{d}x| \leq |v|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)},$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Umso bemerkenswerter, dafür aber auch umso schwieriger zu beweisen, ist die folgende Tatsache:

Lemma 4.7 *(J.L. Lions*[8]*) Sei Ω eine offene, beschränkte Menge mit regulärem Rand und u eine Distribution auf Ω. Dann gilt*

$$u \in H^{-1}(\Omega) \text{ und } \partial_i u \in H^{-1}(\Omega)\ \forall i \Longrightarrow u \in L^2(\Omega).$$

Beweis (siehe [9], S.112ff) Es sei $X(\Omega) = \{v \in H^{-1}(\Omega), \partial_i v \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall i\}$ ein Hilbertraum mit der Norm $\|v\|_{X(\Omega)} = (\|v\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i v\|^2_{H^{-1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$. Es ist zu zeigen:

$$X(\Omega) = L^2(\Omega) \tag{4.11}$$

Ich zeige den Beweis für $\Omega = \mathbb{R}^3$. Für einen ausführlicheren Beweis verweise ich auf Duvaut & Lions [9], S. 112ff:
Unter dieser Voraussetzung ist die Relation (4.11) richtig, denn aufgrund der Definition 23 ist die Annahme $v \in H^{-1}(\Omega)$ und $\partial_i v \in H^{-1}(\Omega)\ \forall i$ äquivalent dazu, dass

$$(1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \xi_i \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Da für zwei Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}^3)$ auch die Summe beider Funktionen in $L^2(\mathbb{R}^3)$ liegt, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{-1} (1 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2) |\hat{v}|^2 \mathrm{d}\xi < \infty.$$

Somit ist $v \in L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\Omega)$.

[6] Da Hilberträume zu sich selbst dual sind, gibt es einen Isomorphismus zwischen $H^s(\mathbb{R}^n)$ und $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, welcher durch $u \mapsto \mathcal{F}^{-1}\big((1 + |\xi|^2)^s \mathcal{F}(u)(\xi)\big)(x)$ gegeben ist

[7] Dies ist also kein Widerspruch zu Beispiel 4, da v hier eine Distribution ist und somit $\partial_i v$ nach Bemerkung 4.5 stets existiert.

[8] Pierre-Louis Lions ist ein französischer Mathematiker (* 11.August 1956 in Grasse).

4.3.2. Beweis 1

Nun folgt der erste Beweis der 2. Konrschen Ungleichung unter der Voraussetzung, dass der Rand von Ω stetig differenzierbar ist.

Beweis (siehe [6], S.416; [5], S. 44ff, [9], S.111)
Sei $E(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \varepsilon_{ij}(u) \in L^2(\Omega)\ \forall i,j\}$. Dann ist $E(\Omega)$ ein Hilbert-Raum mit der Norm $\|u\|_\Omega = (\|u\|_{L^2(\Omega} + \|\varepsilon_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$. Klar ist $H^1(\Omega) \subset E(\Omega)$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, sei $u \in E(\Omega)$. Dann ist $\varepsilon_{ij}(u) \in L^2(\Omega)$, und daher $\frac{\partial \varepsilon_{ij}(u)}{\partial x_k} \in H^{-1}(\Omega)\ \forall i,j,k$. Weiterhin gilt nach dem Satz von Schwarz[9] die folgende Identität:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ik}(u) + \frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(u) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jk}(u).$$

Folglich ist also

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall i,j,k.$$

Nach Anwendung von Lemma 4.7 gilt also $\partial_j u_k \in L^2(\Omega)$. Es ist also auch $E(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ und das impliziert die algebraische Identität $E(\Omega) = H^1(\Omega)$. Die identische Abbildung ι von $H^1(\Omega)$ zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ nach $E(\Omega)$ mit der Norm $\|\cdot\|_\Omega$ ist injektiv, stetig (natürlich gibt es eine Konstante c, sodass $\|v\|_\Omega \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)},\ \forall v \in H^1(\Omega)$) und wie eben bewiesen surjektiv. Da beide Räume vollständig sind, ist (nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen) die inverse Abbildung ι^{-1} ebenfalls stetig. Es gibt folglich auch eine Konstante c, so dass $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|u\|_\Omega$ und somit ist 4.10 bewiesen.

□

Bemerkung 4.8 *Eine Variante des vorangehenden Beweises zeigt, dass Lemma 4.7 die Existenz einer Konstanten c impliziert, so dass*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\Big(\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\nabla v\|_{H^{-1}(\Omega)}\Big), \tag{4.12}$$

woraus erneut die Gültigkeit von (4.10) gefolgert werden kann.

4.3.3. Beweis 2

Definition 24 *Ω heißt Lipschitz-Gebiet[10], wenn sich der Rand $\partial\Omega$ lokal in einer jeweils geeigneten Richtung als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion schreiben lässt und Ω auf einer Seite des Graphen liegt.*

Als nächstes nehme ich also an, Ω sei ein beschränktes Lipschitz-Gebiet des $\mathbb{R}^n$. Der Beweis beruht vor allem auf den zwei folgenden Lemmata:

[9]Benannt nach dem deutschen Mathematiker Hermann Amandus Schwarz (* 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien; † 30. November 1921 in Berlin). Der Satz besagt, dass für mehrfach differenzierbare Funktionen die Reihenfolge der partiellen Differentiation nicht entscheidend ist für das Ergebnis.

[10]Benannt nach dem deutschen Mathematiker Rudolf Lipschitz (*14. Mai 1832 in Königsberg, † 7. Oktober 1903 in Bonn).

Lemma 4.9 *Sei $\rho(x)$ der Abstand eines Punktes x von $\partial\Omega$. Δ bezeichne den Laplace-Operator. Sei $\upsilon \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega), \rho^2\Delta\upsilon \in L^2(\Omega)$. Dann ist $\rho\nabla\upsilon \in L^2(\Omega)$ und es gilt die Ungleichung:*

$$\|\rho\nabla\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\|\upsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho^2\Delta\upsilon\|_{L^2(\Omega)}),$$

mit einer Konstanten $c > 0$, welche unabhängig ist von υ.

Beweis (siehe [16], S. 14f)
Sei Ω_δ die Menge aller Punkte aus Ω mit einem Abstand größer als $\delta = const \geq 0$ von $\partial\Omega$. Die Funktion $\rho(x)$ erfüllt die Ungleichung $|\rho(x) - \rho(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \bar{\Omega}$, denn nach der Dreiecksungleichung ist $|z-y| \leq |z-x|+|x-y|\ \forall x, y \in \bar{\Omega}, z \in \partial\Omega$. Durch Bilden des Infimums über alle $z \in \partial\Omega$ auf beiden Seiten und durch Vertauschen von x und y erhalte ich die gewünschte Ungleichung. Sei weiter z_y der Punkt von $\partial\Omega$, so dass $\rho(y) = |y - z_y|$. Dieser existiert nach dem Satz von Weierstraß[11], da $\bar{\Omega}$ beschränkt und abgeschlossen ist. Dann ist $|\rho(x) - \rho(y)| \leq |x - z_y| - |y - z_y| \leq |x - z_y - y + z_y|$. Daher ist $\rho(x)$ Lipschitz-stetig in Ω und somit besitzt $\rho(x)$ beschränkte schwache Ableitungen erster Ordnung in Ω (siehe [11], S. 279f). Unter Berücksichtigung dieser Tatsache und nach Anwendung der partiellen Integration ist:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} (\rho(x) - \delta)^2(\nabla\upsilon)^2 \mathrm{d}x &= \int_{\Omega_\delta} \underbrace{(\rho(x) - \delta)^2\nabla\upsilon}_{:=u} \cdot \nabla\upsilon \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_\delta} \nabla u \cdot \upsilon \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_\delta} 2(\rho(x) - \delta)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\nabla\upsilon \cdot \upsilon \mathrm{d}x - \int_{\Omega_\delta} (\rho(x) - \delta)^2\Delta\upsilon \cdot \upsilon \mathrm{d}x \\
&\leq c_1\Big(\|(\rho - \delta)\nabla\upsilon\|_{L^2(\Omega_\delta)}\|\upsilon\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \|(\rho - \delta)^2\Delta\upsilon\|_{L^2(\Omega_\delta)}\|\upsilon\|_{L^2(\Omega_\delta)}\Big).
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\|(\rho - \delta)\nabla\upsilon\|_{L^2(\Omega_\delta)} \leq c_2\Big(\|\upsilon\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \|(\rho - \delta)^2\Delta\upsilon\|_{L^2(\Omega_\delta)}\Big),$$

wobei c_2 eine Konstante ist, welche unabhängig ist von δ und υ. Für $\delta \to 0$ und da $\rho(x) > \delta$ in Ω_δ erhält man

$$\|\rho\nabla\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\|\upsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho^2\Delta\upsilon\|_{L^2(\Omega)}),$$

womit das Lemma bewiesen ist.

□

Lemma 4.10 *Sei $\rho(x)$ der Abstand eines Punktes x von $\partial\Omega$. Dann gilt für jede Funktion $\upsilon \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit $\rho\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_i\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ die folgende Ungleichung:*

$$\|\nabla\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\Big(\|\upsilon\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n}\|\rho\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_i\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\Big),$$

wobei $c > 0$ unabhängig von υ ist.

[11] Benannt nach dem deutschen Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (* 31. Oktober 1815 in Ostenfelde, † 19. Februar 1897 in Berlin). Der Satz besagt, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist und ihre obere und untere Schranke annimmt.

Beweis (siehe [16], S. 15ff)
Für jede skalare Funktion $f \in C^1[0,b]$ ist nach partieller Integration:

$$\int_0^\tau f^2(t)\mathrm{d}t = f^2(\tau)\tau - 2\int_0^\tau tf(t)f'(t)\mathrm{d}t$$
$$\le f^2(\tau)\tau + \varepsilon\int_0^\tau f^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau [f'(t)]^2t^2\mathrm{d}t.$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, kann ich τ so wählen, dass

$$f^2(\tau) \le \frac{2}{b}\int_{\frac{b}{2}}^b f^2(t)\mathrm{d}t, \quad \tau \in [\frac{b}{2}; b].$$

Dann ist

$$\int_0^{\frac{b}{2}} f^2(t)\mathrm{d}t \le 2\int_{\frac{b}{2}}^b f^2(t)\mathrm{d}t + \varepsilon\int_0^b f^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^b [f'(t)]^2t^2\mathrm{d}t.$$

Nach Hinzufügen von $\int_{\frac{b}{2}}^b f^2(t)\mathrm{d}t$ auf beiden Seiten der letzten Ungleichung erhalte ich:

$$\int_0^b f^2(t)dt \le 3\int_{\frac{b}{2}}^b f^2(t)\mathrm{d}t + \varepsilon\int_0^b f^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^b [f'(t)]^2t^2\mathrm{d}t.$$

Daher ist

$$(1-\varepsilon)\int_0^b f^2(t)\mathrm{d}t \le 3\int_{\frac{b}{2}}^b f^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^b [f'(t)]^2t^2\mathrm{d}t.$$

Zum Beispiel erhalte ich für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ die Ungleichung

$$\int_0^b f^2(t)\mathrm{d}t \le c_1\Big(\int_{\frac{b}{2}}^b f^2(t)\mathrm{d}t + \int_0^b t^2[f'(t)]^2\mathrm{d}t\Big) \tag{4.13}$$

mit $c_1 = 6$.
Sei nun $\Omega \subset \cup_{i=0}^N \Omega_i$ mit $\Omega_0 = \Omega_\delta$, d.h. die Menge aller Punkte $x \in \Omega$ mit einem Abstand $\rho(x)$ von $\partial\Omega$ größer als $\delta = \mathit{const} \ge 0$ und $\Omega_i = \{x \in \Omega \mid \psi_i(x') < x_{k_i} < \psi_i(x') + b_i, x' = (x_1, \ldots, x_{k_i-1}, x_{k_i+1}, \ldots, x_n)\}$, wobei die Funktionen ψ_i Lipschitz-stetig sind und $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i = \{x \mid x_{k_i} = \psi_i(x')\}$. Nach Lemma 4.9 gilt für die Funktion υ:

$$\int_{\Omega_0} |\nabla\upsilon|^2\mathrm{d}x \le k_1\Big(\int_{\Omega_0^{\delta/2}} |\upsilon|^2\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0^{\delta/2}} \sum_{i,j=1}^n |\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_i\partial x_j}|^2\mathrm{d}x\Big), \tag{4.14}$$

wobei $\Omega_0^{\delta/2}$ die $\delta/2$- Umgebung von Ω_0 ist und k_1 eine Konstante, welche nur von δ abhängt. Angenommen, Ω_i sei definiert durch die Bedingungen: $\psi(x') < x_k < \psi(x') + b_i$. Dann setzte ich $b = b_i, f = \frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}, t = x_k$ in (4.13) und erhalte, indem ich $\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}$ als Funktion von x_k betrachte:

$$\int_{\psi(x')+\varepsilon}^{\psi(x')+\varepsilon+b_i} |\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}|^2\mathrm{d}x_k \le c_1\Big[\int_{\psi(x')+\varepsilon}^{\psi(x')+\varepsilon+b_i} (\psi(x')+\varepsilon-x_k)^2|\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_j\partial x_k}|^2\mathrm{d}x_k + \int_{\psi(x')+\varepsilon+b_i/2}^{\psi(x')+\varepsilon+b_i} |\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}|^2\mathrm{d}x_k\Big] \tag{4.15}$$

Hierbei ist $\varepsilon = \mathit{const} > 0$. Da $\psi(x')$ Lipschitz-stetig ist, ist leicht zu sehen, dass $|\psi(x') + \varepsilon - x_k| \le c\rho(x)$ mit einer Konstanten c, die nur von der Lipschitz Konstanten von $\psi(x')$ abhängt. Integration über Ω_i mit $\varepsilon \to 0$ liefert:

$$\int_{\Omega_i} |\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}|^2\mathrm{d}x \le c_2\Big[\int_{\Omega_i} \rho^2(x)|\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_j\partial x_k}|^2\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} |\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}|^2\mathrm{d}x\Big], \tag{4.16}$$

vorausgesetzt, dass δ klein genug gewählt wurde. Nach Aufsummieren all dieser Ungleichungen von $1, \ldots, N$ und zusammen mit der Ungleichung (4.14) erhalte ich

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x \leq c_3 \Big[\int_\Omega \rho(x)^2 \sum_{i,j=1}^{n} |\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega_0^{\delta/2}} |v|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega_0^{\delta/2}} \sum_{i,j=1}^{n} |\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}|^2 \mathrm{d}x \Big]. \quad (4.17)$$

Daraus folgt die Gültigkeit des Lemmas für $\rho(x) \geq \delta > 0$ in $\Omega_0^{\delta/2}$.

□

Damit ist es mir jetzt möglich die 2. Kornsche Ungleichung zu beweisen.

Beweis (siehe [16], S. 17ff, [3] S. 26f)
Es reicht aus, die Ungleichung für den Fall $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ zu beweisen. Die folgende Identität ist leicht zu zeigen:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 2\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ij}(u) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jj}(u). \quad (4.18)$$

Denn für die rechte Seite von (4.18) gilt wegen der Definition der ε_{ij} und des Satzes von Schwarz:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ij}(u) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jj}(u) &= 2\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j})) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}) \\ &= \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \end{aligned}$$

Weiterhin seien die Komponenten einer vektorwertigen Funktion v folgendermaßen definiert:

$$\Delta v_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \Big(2\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ij}(u) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jj}(u)\Big) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_j^i = \operatorname{div} F^i, & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega_0 \setminus \Omega, \end{cases}$$

somit also

$$\Delta v = f = \operatorname{div} F \quad (4.19)$$

$$v = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0. \quad (4.20)$$

Sei $v \in H_0^1(\Omega^0)$ eine schwache Lösung der Poisson Gleichung[12] (4.19), d.h. $\int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\Omega_0} f v \mathrm{d}x = 0 \ \forall v \in H_0^1(\Omega_0)$, wobei Ω^0 ein glattes Gebiet ist mit $\bar{\Omega} \subset \Omega^0$. Da $H_0^1(\Omega_0)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$ und für $f \in L^2(\Omega_0)$ die Abbildung $v : H_0^1(\Omega_0) \to \mathbb{R}, v \mapsto \int_{\Omega_0} f(x)v(x)\mathrm{d}x$ ein lineares, stetiges Funktional ist, existiert diese Lösung v nach dem Darstellungssatz von Riesz (vgl. [18], S. 99f). Ein

[12] Benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker Siméon Denis Poisson (* 21. Juni 1781 in Pithiviers, † 25. April 1840 in Paris)

anderer Beweis hierzu, der den Satz von Lax Milgram verwendet, befindet sich in EVANS, S.295ff. Allgemein gilt für eine Lösung v von $\Delta v = f$

$$\|v\|_{H^{k+1}} \leq c\|f\|_{H^{k-1}}{}^{13}. \tag{4.21}$$

Für $k = 0$ ist also in diesem Fall

$$\|v\|_{H^1(\Omega^0)} \leq c_1\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = c_1\|\operatorname{div} F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.22}$$

Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\omega = u - v$ in Ω. Dann ist

(i) $\Delta\omega = 0$ in Ω, und aus dem Weylschen Lemma[14] folgt: $\omega \in C^\infty(\Omega)$,

(ii) $\Delta(\varepsilon_{ij}(\omega)) = 0$ in Ω, $\varepsilon_{ij}(\omega) \in C^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Wegen (4.22) ist dann

$$\|\varepsilon(\omega)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.23}$$

wobei die Konstante c_3 unabhängig ist von u. Zusammen mit Lemma 4.9 und (ii) ergibt sich damit

$$\|\rho\nabla\varepsilon_{ij}(\omega)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_4\|\varepsilon_{ij}(\omega)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_4\|\varepsilon(\omega)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_5\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.24}$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_p \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_p}\varepsilon_{il}(\omega) + \frac{\partial}{\partial x_l}\varepsilon_{ip}(\omega) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{lp}(\omega). \tag{4.25}$$

Denn für die rechte Seite der Gleichung gilt wieder wegen der Definition der ε_{ij} und des Satzes von Schwarz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_p}\varepsilon_{il}(\omega) + \frac{\partial}{\partial x_l}\varepsilon_{ip}(\omega) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{lp}(\omega) &= \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial x_i} + \frac{\partial\omega_i}{\partial x_l}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_p}{\partial x_i} + \frac{\partial\omega_i}{\partial x_p}\right)\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_p}{\partial x_l} + \frac{\partial\omega_l}{\partial x_p}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_l}{\partial x_p\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_p\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_p}{\partial x_l\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_l\partial x_p} \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_p}{\partial x_i\partial x_l} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_l}{\partial x_i\partial x_p} \\
&= \frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_p\partial x_l}.
\end{aligned}$$

Aus (4.24) und (4.25) folgt

$$\|\rho\sum_{i,j=1}^{n}|\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\partial x_j}|\|_{L^2(\Omega)} \leq c_6\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)},$$

[13] Diese Aussage findet sich in etwa in EVANS [11], S. 314 bzw. S. 323.

[14] Benannt nach dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Klaus Hugo Weyl (* 9. November 1885 in Elmshorn, † 8. Dezember 1955 in Zürich). Das Weylsche Lemma besagt u.a., dass eine distributionelle Lösung ω der homogenen Gleichung $\Delta\omega = 0$ zu $C^\infty(\Omega)$ gehört.

und zusammen mit Lemma 4.10 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\omega\|_{L^2(\Omega)} &\le c_7\Big[\|\rho\sum_{i,j=1}^{n}|\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\partial x_j}|\|_{L^2(\Omega)}+\|\omega\|_{L^2(\Omega)}\Big]\\
&\le c_8\Big[\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}+\|\omega\|_{L^2(\Omega)}\Big].
\end{aligned}
$$

Da $\omega = u - \upsilon$ folgt aus der obigen Abschätzung und (4.22):

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\le c_9\Big[\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}+\underbrace{\|\nabla\upsilon\|_{L^2(\Omega)}+\|\upsilon\|_{L^2(\Omega)}}_{=\|\upsilon\|_{H^1(\Omega)}}\Big]\\
&= c_9\Big[\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}+\underbrace{\|\upsilon\|_{H^1(\Omega)}}_{\le k\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}}\Big].
\end{aligned}
$$

Und nach Addieren von $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ auf beiden Seiten, erhalte ich

$$
\underbrace{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}}_{=\|u\|^2_{H^1(\Omega)}} \le c\Big(\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2, \tag{4.26}
$$

womit die 2. Kornsche Ungleichung bewiesen ist.

□

4.3.4. Beweis 3

Der dritte und letzte Beweis beruht auf der Annahme, Ω sei ein polygonal berandetes Gebiet.

Definition 25

Die Hauptaufgabe des Beweises besteht darin einen Fortsetzungsoperator $E : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ zu konstruieren, welcher spannungserhaltend ist, so dass z.B. die folgende Ungleichung gilt

$$
\|(Eu)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \le c(\|\varepsilon(u)\|_{H^1(\Omega)}+\|u\|_{H^1(\Omega)}).
$$

Beweis (siehe Nitsche [15], S. 224ff) Der Einfachheit halber nehme ich an, dass die Dimension $n = 2$ ist. Die Variable wird dann bezeichnet mit $x = (x_1, x_2)$ und der Verschiebungsvektor mit $u = (u_1, u_2)$. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten: Zunächst konstruiere ich einen spannungserhaltenden Fortsetzungsoperator $\hat{E}$ von Ω^+ nach $\mathbb{R}^2_+$ und anschließend werde ich mit Hilfe des Lemmas A.1 zum allgemeinen Fall übergehen.

Lemma 4.11 *Sei $u = (u_1, u_2)$ definiert in dem folgenden Gebiet mit $\gamma \in \mathbb{R}$*

$$
\Omega^+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0 \wedge x_2 > \gamma x_1\}.
$$

Dann gibt es eine Fortsetzung $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, definiert in

$$
\Omega^- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0 \wedge x_2 < \gamma x_1\},
$$

so dass für den Fortsetzungsoperator $\hat{E}$, welcher gegeben ist durch:

$$\hat{E}(u_1, u_2) = \begin{cases} (u_1, u_2) \text{ in } \Omega^+ \\ (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \text{ in } \Omega^-, \end{cases} \tag{4.27}$$

gilt:

(i) $\hat{E}$ *bildet* $C^0(\bar{\Omega}^+)$ *ab in* $C^0(\mathbb{R}^2_+)$ *mit* $\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$

(ii) $\hat{E}$ *bildet* $\dot{H}_1(\Omega^+)$ *ab in* $\dot{H}_1(\mathbb{R}^2_+)$*, so dass*

$$\|\hat{E}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} = \|\hat{E}(u_1, u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \leq c\|\varepsilon(u_1, u_2)\|_{L^2(\Omega^+)} = \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega^+)}. \tag{4.28}$$

Bemerkung 4.12 *Hierbei bezeichnet* $\dot{H}_1(\Omega^+)$ *den Raum aller Funktionen* $u \in H^1(\Omega^+)$*, welche außerhalb einer Kugel (mit endlichem Radius) verschwinden.*

Beweis (Lemma 4.11) Es sei also

$$\begin{cases} \Omega^+ := \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0 \wedge x_2 > \gamma x_1\} \\ \Omega^- := \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0 \wedge x_2 < \gamma x_1\} \end{cases}$$

Ich verwende eine spezielle Spiegelung parallel zur y-Achse, d.h. es sei

$$\hat{E}(u) = \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{cases} u = (u_1, u_2), & \text{für } x \in \Omega^+ \\ (pu_1^\lambda + qu_1^\mu + \rho u_2^\lambda + \sigma u_2^\mu, ru_2^\lambda + su_2^\mu), & \text{für } x \in \Omega^-. \end{cases}$$

In diesem Fall besagt der obere Index λ (und ebenso μ) für eine Funktion w

$$w^\lambda = w(x_1, \gamma x_1 + \lambda(\gamma x_1 - x_2)).$$

Dann ist $\hat{E}(u) \in C^0(\mathbb{R}^2_+)$ genau dann, wenn der linksseitige Grenzwert von $\hat{E}(u)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt, d.h. wenn also

$$(u_1, u_2)^- \to (u_1, u_2)^+ \text{ für } \gamma x_1 \to x_2.$$

Hierbei ist $(u_1, u_2)^- = \hat{E}(u)|_{\Omega^-}$ und ebenso $(u_1, u_2)^+ = \hat{E}(u)|_{\Omega^+}$. Es ist:

$$\lim_{\gamma x_1 \to x_2} (u_1, u_2)^+ = (u_1, u_2). \tag{4.29}$$

Für den Grenzwert von $(u_1, u_2)^-$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma x_1 \to x_2} (u_1, u_2)^- &= \lim_{\gamma x_1 \to x_2} (pu_1^\lambda + qu_1^\mu + \rho u_2^\lambda + \sigma u_2^\mu, ru_2^\lambda + su_2^\mu) \\
&= \lim_{\gamma x_1 \to x_2} \Big(pu_1(x_1, \gamma x_1 + \lambda(\gamma x_1 - x_2)) + qu_1(x_1, \gamma x_1 + \mu(\gamma x_1 - x_2)) \\
&\quad + \rho u_2(x_1, \gamma x_1 + \lambda(\gamma x_1 - x_2)) + \sigma u_2(x_1, \gamma x_1 + \mu(\gamma x_1 - x_2)), \\
&\quad ru_2(x_1, \gamma x_1 + \lambda(\gamma x_1 - x_2)) + su_2(x_1, \gamma x_1 + \mu(\gamma x_1 - x_2)) \Big) \\
&= \Big(pu_1(x_1, x_2) + qu_1(x_1, x_2) + \rho u_2(x_1, x_2) + \sigma u_2(x_1, x_2), \\
&\quad ru_2(x_1, x_2) + su_2(x_1, x_2) \Big) \\
&= \Big((p + q)u_1(x_1, x_2) + (\rho + \sigma)u_2(x_1, x_2), (r + s)u_2(x_1, x_2) \Big).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Die beiden Grenzwerte in (4.29) und (4.30) stimmen genau dann überein, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$p + q = 1, \quad r + s = 1, \quad \rho + \sigma = 0. \tag{4.31}$$

Damit sind dann auch (i) und die erste Aussage von (ii) erfüllt.
Zur Erinnerung: Es ist

$$\varepsilon(\hat{E}(u)) = \operatorname{sym} \nabla(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\tilde{u}_1 & \frac{1}{2}(\partial_{x_1}\tilde{u}_2 + \partial_{x_2}\tilde{u}_1) \\ \frac{1}{2}(\partial_{x_1}\tilde{u}_1 + \partial_{x_2}\tilde{u}_2) & \partial_{x_2}\tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\tilde{u}) & \varepsilon_{12}(\tilde{u}) \\ \varepsilon_{21}(\tilde{u}) & \varepsilon_{22}(\tilde{u}) \end{pmatrix}.$$

Demnach ist also $\varepsilon_{11}(\tilde{u})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\tilde{u}) = \partial_{x_1}(\tilde{u}_1(x_1, x_2)) &= \partial_{x_1}\Big(pu_1^\lambda(x_1, x_2) + qu_1^\mu(x_1, x_2) + \rho u_2^\lambda(x_1, x_2) + \sigma u_2^\mu(x_1, x_2)\Big) \\ &= p(\partial_{x_1}u_1 + \gamma(1+\lambda)\partial_{x_2}u_1)^\lambda + q(\partial_{x_1}u_1 + \gamma(1+\mu)\partial_{x_2}u_1)^\mu \\ &\quad + \rho(\partial_{x_1}u_2 + \gamma(1+\lambda)\partial_{x_2}u_2)^\lambda + \sigma(\partial_{x_1}u_2 + \gamma(1+\mu)\partial_{x_2}u_2)^\mu, \end{aligned} \tag{4.32}$$

da für $\omega^\lambda(x_1, x_2) = \omega(x_1, \gamma x_1 + \lambda(\gamma x_1 - x_2))$ die Ableitung gegeben ist durch

$$\partial_{x_1}\omega^\lambda(x_1, x_2) = (\partial_{x_1}\omega \cdot 1 + \partial_{x_2}\omega \cdot (\gamma + \lambda\gamma))^\lambda,$$

wobei ich die Kettenregel verwendet habe. Mein Ziel ist es, die Parameter so zu wählen, dass die rechte Seite eine Linearkombination von $\varepsilon_{ik}(u)^\lambda$ und $\varepsilon_{ik}(u)^\mu$ ist. Aus (4.32) folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\tilde{u}) = &\underbrace{p\partial_{x_1}u_1^\lambda}_{p\varepsilon_{11}(u)^\lambda} + p\gamma(1+\lambda)\partial_{x_2}u_1^\lambda + \underbrace{q\partial_{x_1}u_1^\mu}_{q\varepsilon_{11}(u)^\mu} + q\gamma(1+\mu)\partial_{x_2}u_1^\mu + \rho\partial_{x_1}u_2^\lambda \\ &+ \underbrace{\rho\gamma(1+\lambda)\partial_{x_2}u_2^\lambda}_{\rho\gamma(1+\lambda)\varepsilon_{22}(u)^\lambda} + \sigma\partial_{x_1}u_2^\mu + \underbrace{\sigma\gamma(1+\mu)\partial_{x_2}u_2^\mu}_{\sigma\gamma(1+\mu)\varepsilon_{22}(u)^\mu}. \end{aligned}$$

Für

$$\rho = p\gamma(1+\lambda), \text{ und } \sigma = q\gamma(1+\mu) \tag{4.33}$$

ist dies erfüllt, denn dann gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\tilde{u}) &= p\varepsilon_{11}(u)^\lambda + \rho\partial_{x_2}u_1^\mu + q\varepsilon_{11}(u)^\mu + \sigma\partial_{x_2}u_1^\mu + \rho\partial_{x_1}u_2^\lambda \\ &\quad + \rho\gamma(1+\lambda)\varepsilon_{22}(u)^\lambda + \sigma\partial_{x_1}u_2^\mu + \sigma\gamma(1+\mu)\varepsilon_{22}(u)^\mu \\ &= p\varepsilon_{11}(u)^\lambda + \underbrace{\rho(\partial_{x_2}u_1^\lambda + \partial_{x_1}u_2^\lambda)}_{2\rho\varepsilon_{12}(u)^\lambda} + q\varepsilon_{11}(u) + \underbrace{\sigma(\partial_{x_2}u_1^\mu + \partial_{x_1}u_2^\mu)}_{2\sigma\varepsilon_{12}(u)^\mu} \\ &\quad + \rho\gamma(1+\lambda)\varepsilon_{22}(u)^\lambda + \sigma\gamma(1+\mu)\varepsilon_{22}(u)^\mu. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\tilde{u}) = p\varepsilon_{11}(u)^\lambda + 2\rho\varepsilon_{12}(u)^\lambda + q\varepsilon_{11}(u)^\mu + 2\sigma\varepsilon_{12}(u)^\mu + \rho\gamma(1+\lambda)\varepsilon_{22}(u)^\lambda \\ + \sigma\gamma(1+\mu)\varepsilon_{22}(u)^\mu. \end{aligned} \tag{4.34}$$

In gleicher Weise erhalte ich für $\varepsilon_{12}(\tilde{u})$:

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon_{12}(\tilde{u}) &= \partial_{x_1}\tilde{u}_2 + \partial_{x_2}\tilde{u}_1 \\
&= r(\partial_{x_1}u_2 + \partial_{x_2}u_1(\gamma+\lambda\gamma))^\lambda + s(\partial_{x_1}u_2 + \partial_{x_2}u_2(\gamma+\mu\gamma))^\mu + p(\partial_{x_2}u_1\cdot(-\lambda))^\lambda \\
&\quad + q(\partial_{x_2}u_1\cdot(-\mu))^\mu + \rho(\partial_{x_2}u_2\cdot(-\lambda))^\lambda + \sigma(\partial_{x_2}u_2\cdot(-\mu))^\mu \\
&= -\lambda(p\partial_{x_2}u_1 + \rho\partial_{x_2}u_2)^\lambda - \mu(q\partial_{x_2}u_1 + \sigma\partial_{x_2}u_2)^\mu + r(\partial_{x_1}u_2 + \gamma(1+\lambda)\partial_{x_2}u_2)^\lambda \\
&\quad + s(\partial_{x_1}u_2 + \gamma(1+\mu)\partial_{x_2}u_2)^\mu \\
&= -\lambda p\partial_{x_2}u_1^\lambda - \underbrace{\lambda p\partial_{x_2}u_2^\lambda}_{\lambda p\varepsilon_{22}(u)^\lambda} - \mu q\partial_{x_2}u_1^\mu - \underbrace{\mu\sigma\partial_{x_2}u_2^\mu}_{\mu\sigma\varepsilon_{22}(u)^\mu} + r\partial_{x_1}u_2^\lambda + \underbrace{r\gamma(1+\lambda)\partial_{x_2}u_2^\lambda}_{r\gamma(1+\lambda)\varepsilon_{22}(u)^\lambda} + s\partial_{x_1}u_2^\mu \\
&\quad + \underbrace{s\gamma(1+\mu)\partial_{x_2}u_2^\mu}_{s\gamma(1+\mu)\varepsilon_{22}(u)^\mu}.
\end{aligned}
$$

Für

$$r = -\lambda p, \quad s = -\mu q,$$

ist auch $\varepsilon_{12}(\tilde{u})$ darstellbar als Linearkombination von $\varepsilon_{ik}(u)^\lambda$ und $\varepsilon_{ik}(u)^\mu$, denn dann ist

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon_{12}(\tilde{u}) &= r\partial_{x_2}u_1^\lambda - \lambda p\varepsilon_{22}(u)^\lambda + s\partial_{x_2}u_1^\mu - \mu s\varepsilon_{22}(u)^\mu + r\partial_{x_1}u_2^\lambda + r\gamma(1+\lambda)\varepsilon_{22}(u)^\lambda \\
&\quad + s\partial_{x_1}u_2^\mu + s\gamma(1+\mu)\varepsilon_{22}(u)^\mu \\
&= \underbrace{r(\partial_{x_2}u_1^\lambda + \partial_{x_1}u_2^\lambda)}_{2r\varepsilon_{12}(u)^\lambda} + \underbrace{s(\partial_{x_2}u_1^\mu + \partial_{x_1}u_2^\mu)}_{2s\varepsilon_{12}(u)^\mu} + (r\gamma(1+\lambda) - \lambda\rho)\varepsilon_{22}(u)^\lambda \\
&\quad + (s\gamma(1+\mu) - \mu\sigma)\varepsilon_{22}(u)^\mu \\
&= 2r\varepsilon_{12}(u)^\lambda + 2s\varepsilon_{12}(u)^\mu + (r\gamma(1+\lambda) - \lambda\rho)\varepsilon_{22}(u)^\lambda \\
&\quad + (s\gamma(1+\mu) - \mu\sigma)\varepsilon_{22}(u)^\mu.
\end{aligned}
$$

Für $\lambda \neq \mu$ sind die Parameter p, q, r, s eindeutig definiert. Seien ρ, σ definiert wie in Gleichung (4.33), dann ist die dritte Gleichung von (4.31) automatisch gültig. Da die $\varepsilon_{ik}(\tilde{u})$, wie eben gesehen, also Linearkombinationen von $\varepsilon_{ik}(u)^\lambda$ bzw. $\varepsilon_{ik}(u)^\mu$ sind, erhalte ich [siehe Anhang, S. 60]

$$\|\varepsilon(\hat{E}(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} = \|\mathrm{sym}\,\nabla\hat{E}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \leq c\|\mathrm{sym}\,\nabla u\|_{L^2(\Omega_+)} = c\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega_+)},$$

was den Beweis von Lemma 4.11 abschließt.

□

Nun aber weiter im Beweis der Kornschen Ungleichung. Ω sei also ein polygonal berandetes Gebiet. Sei ferner für $x_i^0 \in \partial\Omega$, $K_i := B(x_i^0, r_i)$ der Kreis um x_i^0 mit dem Radius $r_i > 0$, so dass $\Omega_i = \Omega \cap K_i$ entweder ein Halbkreis ist oder ein eckiges Gebiet, welches von einem Kreis geschnitten wird, und $\{K_i\}_{i=1\ldots N}$ eine endliche Überdeckung von $\partial\Omega$. Weiterhin sei $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, so dass $\Omega \subset \cup_{i=0}^N \Omega_i$. Dann existieren Funktionen ξ_i mit $\xi_i \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathrm{supp}(\xi_i) \subset \Omega_i$ und $\sum_{i=0}^N \xi_i = 1$. Ich verwende die Zerlegung:

$$u = \sum_{i=0}^N u_i \text{ mit } u_i = \xi_i u. \tag{4.35}$$

Dann ist u_i auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert und hat Nullrand. Sei ferner $\hat{E}(u) = \tilde{u}$ die Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n_+$ (siehe (4.27)) und $E(\tilde{u}) = E(\hat{E}(u))$ die Fortsetzung von $\tilde{u}$ auf den Ganzraum $\mathbb{R}^n$ (siehe (A.23)), d.h. zur Erinnerung:

(i) $\|\operatorname{sym}\nabla\hat{E}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \|\varepsilon(\hat{E}(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq c\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega^+)} = c\|\operatorname{sym}\nabla u\|_{L^2(\Omega^+)}$,

(ii) $\|\operatorname{sym}\nabla E(\tilde{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\varepsilon(E(\tilde{u}))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\varepsilon(\tilde{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = c\|\operatorname{sym}\nabla\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$.

$E(\hat{E}(u_i))$ hat dann kompakten Träger und es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq \|\nabla E(\hat{E}(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\nabla E(\hat{E}(\sum_{i=0}^n u_i))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{i=0}^n \|\nabla E(\hat{E}(u_i))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq k\|\nabla E(\hat{E}(u_i))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{\text{Korn I}}{\leq} c_1\|\operatorname{sym}\nabla E(\hat{E}(u_i))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(ii)}{\leq} c_2\|\operatorname{sym}\nabla\hat{E}(u_i)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \\
&\overset{(i)}{\leq} c_3\|\operatorname{sym}\nabla u_i\|_{L^2(\Omega_+)} \\
&= c_3\|\operatorname{sym}\nabla(\xi_i u)\|_{L^2(\Omega_+)} \\
&= c_3\|\operatorname{sym}(\nabla u)\xi_i + \underbrace{\operatorname{sym}(\nabla\xi_i)}_{\leq c_4} u\|_{L^2(\Omega_+)} \\
&\leq c_3 \underbrace{\xi_i}_{\leq 1} \|\operatorname{sym}\nabla u\|_{L^2(\Omega_+)} + c_4\|u\|_{L^2(\Omega_+)} \\
&\leq c_5(\|\operatorname{sym}\nabla u\|_{L^2(\Omega_+)} + \|u\|_{L^2(\Omega_+)}).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1(\Omega_+)} &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_+)} + \|u\|_{L^2(\Omega_+)} \\
&\leq c_5(\|\operatorname{sym}\nabla u\|_{L^2(\Omega_+)} + \|u\|_{L^2(\Omega_+)}) + \|u\|_{L^2(\Omega_+)} \\
&\leq c(\|\operatorname{sym}\nabla u\|_{L^2(\Omega_+)} + \|u\|_{L^2(\Omega_+)})^2,
\end{aligned}$$

was den Beweis der 2. Kornschen Ungleichung abschließt.

□

5. Zusammenfassung

Im Laufe dieser Arbeit habe ich gezeigt, welche unterschiedliche Herangehensweisen es gibt, die Kornschen Ungleichungen zu beweisen. Viele Mathematiker haben sich damit befasst; siehe insbesondere FRIEDRICHS [1947], GOBERT [1962], HLAVÁČEK & NEČAS [1970a,1970b], FICHERA [1972a], NEČAS & HLAVÁČEK [1981], in TEMANN [1983] wurde die Kornsche Ungleichung im Raum $W^{1,p}(\Omega), 1 < p < \infty$ bewiesen. Die in dieser Arbeit aufgeführten drei Beweise der 2. Kornschen Ungleichung sind also nur eine Auswahl davon. Dies deutet darauf hin, wie wichtig diese Ungleichungen sind. Zum Abschluss möchte in nun auf die Rolle der Kornschen Ungleichungen in der linearen Elastizitätstheorie eingehen. Wie ich bereits zu Beginn von Kapitel 4 erwähnt habe, besagen die Kornschen Ungleichungen, dass die Bilinearform aus (4.7) (siehe S. 38) elliptisch ist. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 5.1 *Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$, $V := \{\upsilon \in H^1(\Omega) : \upsilon = 0 \text{ d}A \text{ f.ü. auf } \Gamma_0\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$ und Γ_0 eine dA-messbare Teilmenge von $\Gamma = \partial\Omega$ mit $\int_{\Gamma_0} \text{d}A > 0$, dann existiert eine Konstante $c > 0$, so dass:*

$$c^{-1}\|\upsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq |\varepsilon(\upsilon)|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\upsilon\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \upsilon \in V,$$

d.h. auf dem Raum V ist die Halbnorm $\upsilon \to |\varepsilon(\upsilon)|_{L^2(\Omega)}$ eine Norm äquivalent zu der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Beweis (siehe [4], S.292ff)
(i) Zunächst zeige ich, dass die Halbnorm $\upsilon \to |\varepsilon(\upsilon)|_{L^2(\Omega)}$ eine Norm auf V ist, d.h.: Für $\upsilon \in V$ und $|\varepsilon(\upsilon)|_{L^2(\Omega)} = 0$ gilt $\upsilon = 0$:
Es ist

$$|\varepsilon(\upsilon)|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \varepsilon(\upsilon)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Weiterhin: $|\varepsilon(\upsilon)|_{L^2(\Omega)} = 0 \to \varepsilon(\upsilon) = 0$ in $\Omega \to \partial_{ij}\upsilon_k = 0$ in Ω. Daher ist jede Funktion υ_i ein Polynom vom Grad ≤ 1 in den Variablen x_i, d.h. also von der Form

$$\upsilon_i(x) = a_i + b_{ij}x_j.$$

Da der symmetrische Teil des Gradienten von υ in Ω verschwindet, genauer $\varepsilon_{ij}(\upsilon) = 0$, ist b antisymmetrisch, d.h. $b_{ij} = b_{ji}$. Es gibt folglich Konstanten a_i, b_i, so dass:

$$\begin{aligned}\upsilon_1(x) &= a_1 + b_2x_3 - b_3x_2\\ \upsilon_2(x) &= a_2 + b_3x_1 - b_1x_3\\ \upsilon_3(x) &= a_3 + b_2x_1 - b_1x_2.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent mit: Es gibt Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$, so dass:

$$\upsilon(x) = a + b \times x.$$

Hierbei bezeichnet $b \times x$ das Vektorprodukt von $b \in \mathbb{R}^3$ mit $x \in \mathbb{R}^3$. Die Menge aller Punkte für die $v(x) = 0$ ist also entweder eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ oder die leere Menge, je nachdem, ob die Gleichung $a + b \times x = 0$ Lösungen besitzt oder nicht. Da $\int_{\Gamma_0} \mathrm{d}A > 0$ impliziert die Randwertbedingung $v = 0$ auf Γ_0, dass $a = b = 0$ bzw. mit anderen Worten, dass $v = 0$.

(ii) Die Ungleichung $|\varepsilon(v)|_{L^2(\Omega)} \le c\|v\|_{H^1(\Omega)}$ gilt für alle $v \in V$ (sie gilt sogar für alle $v \in H^1(\Omega)$). Angenommen die andere Ungleichung $c^{-1}\|v\|_{H^1(\Omega)} \le |\varepsilon(v)|_{L^2(\Omega)}$ sei falsch, dann gäbe es eine Folge $(v_n) \in V$, so dass

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \forall n, \text{ und } \lim_{n\to\infty} |\varepsilon(v_n)|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Da die Folge (v_n) also beschränkt ist in $H^1(\Omega)$, existiert nach dem Lemma von Rellich-Kondrachov (vgl. Lemma 3.19) eine Teilfolge $\{v_{n'}\}$, welche in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Da die Teilfolge $(\varepsilon(v_{n'}))$ ebenfalls in $L^2(\Omega)$ konvergiert (gegen 0, aber diese Tatsache wird erst später benötigt), ist $(v_{n'})$ eine Cauchy Folge bezüglich der Norm $v \to \left(|v|^2_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon(v)|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Die Kornsche Ungleichung (siehe Satz 4.10) besagt nun, dass diese Norm äquivalent ist zu der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ in $H^1(\Omega)$. Daher konvergiert die Cauchy Folge gegen ein Element $v \in V$, da der Raum V als abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$ vollständig ist. Für ihren Grenzwert gilt dann: $|\varepsilon(v)|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n'\to\infty} |\varepsilon(v_{n'})|_{L^2(\Omega)} = 0$, und daher $v = 0$ (siehe (i)). Doch dies ist ein Widerspruch zu $\|v_{n'}\|_{H^1(\Omega)} = 1$ für alle n'.

(iii) Für den Beweis, dass V ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$ ist verweise ich auf Ciarlet ([4], S.292f).

□

Bemerkung 5.2 *Zu (i): Ein Vekotrfeld $v \in C_0^\infty(\Omega)$ erfüllt $\varepsilon(v) = 0$ nur dann, wenn es zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $v(x) = a + b \times x \quad \forall x \in \Omega$. Ein solches Vektorfeld heißt* infinitesimal rigid displacement*.*

In Kapitel 4.1. habe ich gezeigt, dass das Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie (4.7):

$$\textit{Finde eine Lösung } u \in H^1(\Omega) \textit{ mit } B(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

für elliptische Bilinearformen $B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ijkl} \partial_{x_l} u_k \partial_{x_j} v_i \mathrm{d}x$ eindeutig lösbar ist. Zur Erinnerung $L(v) = \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x$ ist hierbei eine stetige Linearform $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Wie eben gesehen ist es nun mit Hilfe der Kornschen Ungleichungen möglich zu zeigen, dass diese Bilinarform $B(u,v)$ elliptisch ist. Damit ergibt sich also, dass das Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie eine eindeutige Lösung besitzt.

A. Anhang

Ausführliche Rechnungen

Hier möchte ich einige Rechnungen genauer ausführen, die aufgrund ihrer Länge den Lesefluss in meiner Arbeit gestört hätten.

Zum Beweis zu Satz 3.15

In dem Beweis verwende ich die beiden Ungleichungen (A.1) und (A.2). An dieser Stelle zeige ich die Gültigkeit dieser Ungleichungen, genauer

$$\|\tilde{u}\|^p_{W^{1,p}(B^-)} \leq c\|u\|^p_{W^{1,p}(B^+)}, \tag{A.1}$$

sowie

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{A.2}$$

Ich beginne mit der Ungleichung (A.1) für den Fall $p = 2$, d.h.

$$\|\tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(B^-)} \leq c\|u\|^2_{W^{1,2}(B^+)}, \text{ dabei ist } \|\tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(B^-)} = \|\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)}.$$

Die beiden Normen $\|\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)}$ und $\|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)}$ schätze ich nun getrennt voneinander ab. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)} &= \|u^-\|^2_{L^2(B^-)} \\
&= \int_{B^-} |-3u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n) + 4u(x_1,\dots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{*}{\leq} \int_{B^-} 2\cdot|3u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)|^2 + 2\cdot|4u(x_1,\dots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B^-} 18\cdot|u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)|^2 + 32\cdot|u(x_1,\dots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq c_1\cdot\Big(\underbrace{\int_{B^-}|u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)|^2\mathrm{d}x}_{\Phi} + \underbrace{\int_{B^-}|u(x_1,\dots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})|^2\mathrm{d}x}_{\Psi}\Big)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

für eine geeignete Konstante $c_1 > 0$. Hierbei habe ich in Schritt $*$ die folgende Ungleichung verwendet: $|a+b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Nun verwende ich im ersten Integral (Φ) die folgende Variablentransformation:

$$\varphi : B^+ \to B^-;\ \varphi(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\xi_n) = (x_1,\dots,x_{n-1},-x_n).$$

Dann gilt:

$$\nabla\varphi(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $|\det \nabla\varphi(\xi)| = |-1| = 1$ und somit folgt aus der Transformationsformel:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_{B^-} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)|^2 \mathrm{d}x &= \int_{B^+} |u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \cdot 1 \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{B^+} |u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Für das zweite Integral verwende ich die folgende Transformation:

$$\psi : B^+ \to B^-;\ \psi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}).$$

In diesem Fall ist

$$\nabla\psi(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $|\det \nabla\psi(x)| = \frac{1}{2}$. Erneut wende ich die Transformationsformel an und erhalte

$$\begin{aligned} \Psi = \int_{B^-} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x &= \int_{B^+} |u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{B^+} |u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Somit folgt aus den Abschätzungen (A.3)-(A.5), dass:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)} &\leq c_1 \cdot \left(\int_{B^-} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)|^2 \mathrm{d}x + \int_{B^-} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x \right) \\ &= c_1 \cdot \left(\int_{B^+} |u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2} \int_{B^+} |u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi \right) \\ &\leq c_2 \cdot \left(\int_{B^+} |u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi \right) \\ &= c_2 \|u\|^2_{L^2(B^+)} \end{aligned} \tag{A.6}$$

für eine geeignete Konstante $c_2 > 0$. Als nächstes folgt die Abschätzung für $\|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)}$. Es ist

$$\begin{aligned} \|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)} &= \int_{B^-} |\nabla\tilde{u}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{B^-} |\nabla u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{B^-} |\frac{\partial u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_1}|^2 \mathrm{d}x + \dots + \int_{B^-} |\frac{\partial u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_n}|^2 \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\int_{B^-} |\frac{\partial u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_i}|^2 \mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{\int_{B^-} |\frac{u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_n}|^2 \mathrm{d}x}_{(2)}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Ich zeige zunächst die Abschätzung für (1) für den Fall $i = 1$:

$$\begin{aligned}
(1) &= \int_{B^-} |\frac{\partial u^-(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{B^-} |-3\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)}{\partial x_1} + 4\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})}{\partial x_1}|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{*}{\leq} \int_{B^-} 2 \cdot |3\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)}{\partial x_1}|^2 + 2 \cdot |4\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})}{\partial x_1}|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{B^-} |\underbrace{3\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)}{\partial x_1}}_{\upsilon_1(x_1,\ldots,x_{n-1}-x_n)}|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{B^-} |\underbrace{4\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})}{\partial x_1}}_{\omega_1(x_1,\ldots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})}|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{B^-} |\upsilon_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{B^-} |\omega_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x, \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}$$

wobei ich in Schritt $*$ erneut die Ungleichung $|a + b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ angewendet habe. Für das erste Integral ergibt sich mit derselben Transformation $\varphi : B^+ \to B^-$ wie oben

$$\begin{aligned}
2\int_{B^-} |\upsilon_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)|^2 \mathrm{d}x &= \int_{B^+} |\upsilon_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 2 \cdot 3^2 \int_{B^+} |\frac{\partial u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)}{\partial \xi_1}|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq c_1 \int_{B^+} |\nabla u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi. \\
&= c_1 \|\nabla u\|_{L^2(B^+)} \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Ebenso schätze ich das 2. Integral mit Hilfe der Transformation $\psi : B^+ \to B^-$ ab. Dann ist

$$\begin{aligned}
2\int_{B^-} |\omega_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x &= 4\int_{B^+} |\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 4 \cdot 4^2 \int_{B^+} |\frac{\partial u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)}{\partial \xi_n}|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq c_2 \int_{B^+} |\nabla u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= c_2 \|\nabla u\|_{L^2(B^+)} \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante $c_2 > 0$. Somit ergibt sich aus (A.8)-(A.10) mit einer Konstanten $c_3 > 0$

$$\begin{aligned}
(1) = \int_{B^-} |\frac{\partial u^-(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}|^2 \mathrm{d}x &\leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2(B^+)} + c_2 \|\nabla u\|_{L^2(B^+)} \\
&= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=:c_3} \|\nabla u\|_{L^2(B^+)} \\
&= c_3 \|\nabla u\|^2_{L^2(B^+)}. \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

Für das Integral (2) gilt:

$$
\begin{aligned}
(2) &= \int_{B^-} |\frac{\partial u^-(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)}{\partial x_n}|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{B^-} |3\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)}{\partial x_n} - 2\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})}{\partial x_n}|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{*}{\leq} \int_{B^-} 2\cdot|3\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)}{\partial x_n}|^2 + 2\cdot|2\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})}{\partial x_n}|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{B^-} |\underbrace{3\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)}{\partial x_n}}_{\upsilon_n(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)}|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{B^-} |\underbrace{2\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})}{\partial x_n}}_{\omega_n(x_1,\ldots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})}|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{B^-} |\upsilon_n(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{B^-} |\omega_n(x_1,\ldots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2})|^2 \mathrm{d}x. \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der obigen Transformationen φ und ψ schätze ich auch diese beiden Integrale ab und erhalte damit:

$$
\begin{aligned}
(2) = \int_{B^-} |\frac{\partial u^-(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)}{\partial x_n}|^2 \mathrm{d}x &\leq k_1\|\nabla u\|_{L^2(B^+)} + k_2\|\nabla u\|_{L^2(B^+)} \\
&\leq k_3\|\nabla u\|^2_{L^2(B^+)}. \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

Mit (A.11) und (A.13) ergibt sich für die Norm von $\nabla\tilde{u}$:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)} &\leq c_3\|\nabla u\|^2_{L^2(B^+)} + k_3\|\nabla u\|^2_{L^2(B^+)} \\
&\leq k\|\nabla u\|^2_{L^2(B^+)}. \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, es ist zusammen mit (A.6) und (A.14)

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(B^-)} &= \|\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(B^-)} \\
&\leq c_2\|u\|^2_{L^2(B^+)} + k\|\nabla u\|^2_{L^2(B^+)} \\
&\leq c\|u\|^2_{W^{1,2}(B^+)}.
\end{aligned}
$$

□

Nun komme ich zum Beweis der zweiten Ungleichung, zur Erinnerung: $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Ich zeige die Ungleichung erneut für den Fall $p=2$, d.h.

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \text{ mit } \|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Wie eben schätze ich die beiden Normen getrennt voneinander ab. Mit $\tilde{u} = \sum_{i=0}^{N} \xi_i \tilde{u}_i$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\sum_{i=0}^{N} \xi_i(x)\tilde{u}_i(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \|\underbrace{\xi_i(x)}_{\leq 1} \tilde{u}_i(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \|\tilde{u}_i(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \|\tilde{u}_i(x)\|_{L^2(W_i)} \\
&\leq \underbrace{c_1 \cdot N}_{=:c_2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&= c_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

für eine geeignete Konstante $c_2 > 0$. Außerdem habe ich verwendet, dass $\tilde{u}_i|_\Omega = u$. Für die Abschätzung des Gradienten von $\tilde{u}$ gilt mit $\nabla\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{N} \nabla\tilde{u}_i(x)\xi_i(x) + \tilde{u}_i(x)\nabla\xi_i(x)$:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{u}|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\sum_{i=0}^{N} \nabla\tilde{u}_i(x)\xi_i(x) + \tilde{u}_i(x)\nabla\xi_i(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{*}{\leq} 2\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=0}^{N} |\nabla\tilde{u}_i(x) \underbrace{\xi_i(x)}_{\leq 1}|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_i(x) \underbrace{\nabla\xi_i(x)}_{|\nabla\xi_i(x) \leq k_1|}|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{N} |\nabla\tilde{u}_i(x)|^2 \mathrm{d}x + k_2 \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_i(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{W_i} \sum_{i=1}^{N} |\nabla\tilde{u}_i(x)|^2 \mathrm{d}x + k_2 \int_{W_i} |\tilde{u}_i(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \underbrace{2 \cdot N}_{=:c_1} \|\tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(W_i)} + k_2 \|\tilde{u}_i\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= c_1 \|\tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(W_i)} + k_2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c_2 \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + k_2 \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{(A.16)} \\
&= \underbrace{(c_2 + k_2)}_{=:c_3} \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&= c_3 \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}, \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}
$$

d.h. es ist $\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{\sqrt{c_3}}_{=:c_4} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. Damit ergibt sich nun

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} &= \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq c_2 \|u\|_{L^2(\Omega)} + c_4 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&\leq c \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

□

Zum Beweis von Nitsche, S.48ff

An einem einfacheren Beispiel möchte ich an dieser Stelle zeigen, dass die Ungleichung (4.28) gilt, wenn $\varepsilon(\tilde{u_1}, \tilde{u_2})$ Linearkombinationen von $\varepsilon(u_1, u_2)^\lambda$ bzw. $\varepsilon(u_1, u_2)^\mu$ sind (siehe [15], S. 239f). Sei wieder $n = 2$ und für $u = (u_1, u_2)$ und $x = (x_1, x_2)$ sei die Fortsetzung $E(u)$ gegeben durch:

$$E(u) = \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{cases} u = (u_1, u_2), & \text{für } x \in \mathbb{R}^2_+ \\ (pu_1^\lambda + qu_1^\mu, ru_2^\lambda + su_2^\mu), & \text{für } x \in \mathbb{R}^2_-, \end{cases} \tag{A.18}$$

wobei der obere Index λ bzw. μ für eine Funktion υ bedeutet:

$$\upsilon^\lambda = \upsilon(x_1, -\lambda x_2) \text{ bzw. } \upsilon^\mu = \upsilon(x_1, -\mu x_2).$$

E bildet $C^0(\mathbb{R}^2_+)$ ab in $C^0(\mathbb{R}^2)$ genau dann, wenn der linksseitige Grenzwert von $E(u)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt, d.h. wenn

$$\lim_{x \to 0}(u_1, u_2)^- = \lim_{x \to 0}(u_1, u_2)^+.$$

Hierbei ist $u^- = (u_1, u_2)^- = E(u)|_{\mathbb{R}^2_-}$ bzw. $u^+ = (u_1, u_2)^+ = E(u)|_{\mathbb{R}^2_+}$. Die Grenzwerte sind genau dann gleich, wenn

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0}(u_1, u_2)^+ = (u_1(0,0), u_2(0,0)) &= \lim_{x \to 0}(u_1, u_2)^- \\ &= \lim_{x \to 0}(pu_1^\lambda + qu_1^\mu, ru_2^\lambda + su_2^\mu) \\ &= \Big(pu_1(0,0) + qu_1(0,0), ru_2(0,0) + su_2(0,0)\Big) \\ &= \Big(\underbrace{(p+q)}_{=1} u_1(0,0), \underbrace{(r+s)}_{=1} u_2(0,0)\Big) \\ &= (u_1(0,0), u_2(0,0)), \end{aligned}$$

d.h. wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$p + q = 1, \quad r + s = 1.$$

Es gilt

$$\varepsilon(E(u)) = \varepsilon(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\tilde{u}_1 & \frac{1}{2}(\partial_{x_1}\tilde{u}_2 + \partial_{x_2}\tilde{u}_1) \\ \frac{1}{2}(\partial_{x_1}\tilde{u}_1 + \partial_{x_2}\tilde{u}_2) & \partial_{x_2}\tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) & \varepsilon_{12}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \\ \varepsilon_{21}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) & \varepsilon_{22}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \end{pmatrix}.$$

Für $\varepsilon_{ij}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\tilde{u}) &= \partial_{x_1}\tilde{u}_1 \\ &= \partial_{x_1}(pu_1^\lambda + qu_1^\mu) \\ &= p\partial_{x_1}u_1^\lambda + q\partial_{x_1}u_1^\mu \\ &= p\varepsilon_{11}(u)^\lambda + q\varepsilon_{11}(u)^\mu. \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22}(\tilde{u}) &= \partial_{x_2}\tilde{u}_2 \\
&= \partial_{x_2}(ru_2^\lambda + su_2^\mu) \\
&= -\lambda r \underbrace{\partial_{x_2}u_2^\lambda}_{\varepsilon_{22}(u)^\lambda} - \mu s \underbrace{\partial_{x_2}u_2^\mu}_{\varepsilon_{22}(u)^\mu} \\
&= -\lambda r \varepsilon_{22}(u)^\lambda - \mu s \varepsilon_{22}(u)^\mu.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Sowie

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{12}(\tilde{u}) &= \partial_{x_1}\tilde{u}_2 + \partial_{x_2}\tilde{u}_1 \\
&= \partial_{x_1}(ru_2^\lambda + su_2^\mu) + \partial_{x_2}(pu_1^\lambda + qu_1^\mu) \\
&= r\partial_{x_1}u_2^\lambda + s\partial_{x_1}u_2^\mu - \underbrace{\lambda p}_{=r}\,\partial_{x_2}u_1^\lambda - \underbrace{\mu q}_{=s}\,\partial_{x_2}u_1^\mu \\
&= r(\underbrace{\partial_{x_1}u_2^\lambda + \partial_{x_2}u_1^\lambda}_{2\varepsilon_{12}(u)^\lambda}) + s(\underbrace{\partial_{x_1}u_2^\mu + \partial_{x_2}u_1^\mu}_{2\varepsilon_{12}(u)^\mu}) \\
&= 2r\varepsilon_{12}(u)^\lambda + 2s\varepsilon_{12}(u)^\mu.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Und folglich ist

$$\varepsilon_{12}(\tilde{u}) = r\varepsilon_{12}(u)^\lambda + s\varepsilon_{12}(u)^\mu. \tag{A.22}$$

Damit sind also alle $\varepsilon_{ij}(\tilde{u})$ Linearkombinationen von $\varepsilon_{ij}(u)^\lambda$ und $\varepsilon_{ij}(u)^\mu$. Ich möchte zeigen, dass dann

Lemma A.1

$$\|\mathrm{sym}\,\nabla E(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\varepsilon(E(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c_4\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} = \|\mathrm{sym}\,\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}. \tag{A.23}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(\tilde{u})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^n}|\varepsilon(\tilde{u})|^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^2_+}|\varepsilon(u^+)|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2_-}|\varepsilon(u^-)|^2\mathrm{d}x \\
&= \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2_-}|\varepsilon(u^-)|^2\mathrm{d}x}_{(*)}\,.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Für das Integral $(*)$ gilt:

$$\begin{aligned}
(*) = \int_{\mathbb{R}^2_-}|\varepsilon(u^-)|^2\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2_-}\|\varepsilon(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\|^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^2_-}|\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\Big]^2|\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2_-}|\varepsilon_{11}(\tilde{u})^2 + 2\varepsilon_{12}(\tilde{u})^2 + \varepsilon_{22}(\tilde{u})^2|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2_-}|\varepsilon_{11}(\tilde{u})|^2\mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{2\int_{\mathbb{R}^2_-}|\varepsilon_{12}(\tilde{u})|^2\mathrm{d}x}_{(2)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2_-}|\varepsilon_{22}(\tilde{u})|^2\mathrm{d}x}_{(3)}\Big).
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Weiterhin gilt für das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{11}(u)^\lambda|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2_-} \underbrace{|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, -\lambda x_2)|}_{\upsilon_1(x_1, -\lambda x_2)}{}^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^2_-} |\upsilon_1(x_1, -\lambda x_2)|^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

mit der Transformation

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_-, \; \varphi_\lambda(\xi_1, \xi_2) = (x_1, -\lambda x_2), \tag{A.26}$$

$$\nabla\varphi_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \text{ also } |\det \nabla\varphi_\lambda| = |-\lambda| = \lambda,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{11}(u)^\lambda|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2_+} \lambda |\upsilon_1(\xi_1, \xi_2)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2_+} \lambda |\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\xi_1, \xi_2)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \lambda \|\varepsilon_{11}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Ebenso ergibt sich mit der Transformation

$$\varphi_\mu : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_-, \; \varphi_\mu(\xi_1, \xi_2) = (x_1, -\mu x_2), \tag{A.28}$$

$$\nabla\varphi_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}, \text{ d.h. } |\det \nabla\varphi_\mu| = |-\mu| = \mu,$$

und damit also

$$\int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{11}(u_1)^\mu|^2 \mathrm{d}x = \mu \|\varepsilon_{11}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}. \tag{A.29}$$

Folglich gilt zusammen mit (A.27) und (A.29) für das erste Integral in (A.25):

$$\begin{aligned}
(1) = \int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{11}(\tilde{u})|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2_-} |p\varepsilon_{11}(u)^\lambda + q\varepsilon_{11}(u)^\mu|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{\leq} 2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |p\varepsilon_{11}(u)^\lambda|^2 \mathrm{d}x + 2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |q\varepsilon_{11}(u)^\mu|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2p^2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{11}(u)^\lambda|^2 \mathrm{d}x + 2q^2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{11}(u)^\mu|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2p^2\lambda \|\varepsilon_{11}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} + 2q^2\mu \|\varepsilon_{11}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \\
&= (2p^2\lambda + 2q^2\mu) \|\varepsilon_{11}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \\
&\leq c_1 \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Für das zweite Integral ergibt sich mit denselben Transformationen φ_λ bzw. φ_μ aus (A.26) und (A.28):

$$\begin{aligned}
(2) = 2\int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{12}(\tilde{u})|^2 \mathrm{d}x &= 2\int_{\mathbb{R}^2_-} |r\varepsilon_{12}(u)^\lambda + s\varepsilon_{12}(u)^\mu|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{\leq} 4\int_{\mathbb{R}^2_-} |r\varepsilon_{12}(u)^\lambda|^2 \mathrm{d}x + 4\int_{\mathbb{R}^2_-} |s\varepsilon_{12}(u)^\mu|^2 \mathrm{d}x \\
&= 4r^2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |\underbrace{\varepsilon_{12}(u(x_1, -\lambda x_2))}_{=:\nu_1(x_1,-\lambda x_2)}|^2 \mathrm{d}x + 4s^2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |\underbrace{\varepsilon_{12}(u(x_1, -\mu x_2))}_{=:\nu_2(x_1,-\mu x_2)}|^2 \mathrm{d}x \\
&= 4r^2\lambda \int_{\mathbb{R}^2_+} |\nu_1(\xi_1, \xi_2)|^2 \mathrm{d}\xi + 4s^2\mu \int_{\mathbb{R}^2_+} |\nu_2(\xi_1, \xi_2)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 4r^2\lambda \int_{\mathbb{R}^2_+} |\varepsilon_{12}(u(\xi_1, \xi_2))|^2 \mathrm{d}\xi + 4s^2\mu \int_{\mathbb{R}^2_+} |\varepsilon_{12}(u(\xi_1, \xi_2))|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \underbrace{(4r^2\lambda + 4s^2\mu)}_{=:c_2} \int_{\mathbb{R}^2_+} |\varepsilon_{12}(u(\xi_1, \xi_2))|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= c_2 \|\varepsilon_{12}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \\
&\leq c_2 \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Zuletzt ergibt sich für das dritte Integral erneut mit Hilfe der Transformationen φ_λ und φ_μ [(A.26),(A.28)]:

$$\begin{aligned}
(3) = \int_{\mathbb{R}^2_-} |\varepsilon_{22}(\tilde{u})|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2_-} |-\lambda r\varepsilon_{22}(u)^\lambda - \mu s\varepsilon_{22}(u)^\mu|^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{\leq} 2\lambda^2 r^2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |\underbrace{\varepsilon_{22}(u(x_1, -\lambda x_2))}_{\omega_1(x_1,-\lambda x_2)}|^2 \mathrm{d}x + 2\mu^2 s^2 \int_{\mathbb{R}^2_-} |\underbrace{\varepsilon_{22}(u(x_1, -\mu x_2))}_{\omega_2(x_1,-\mu x_2)}|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\lambda^2 r^2 \int_{\mathbb{R}^2_+} \lambda |\omega_1(\xi_1, \xi_2)|^2 \mathrm{d}\xi + 2\mu^2 s^2 \int_{\mathbb{R}^2_+} \mu |\omega_2(\xi_1, \xi_2)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 2\lambda^3 r^2 \int_{\mathbb{R}^2_+} |\varepsilon_{22}(u(\xi_1, \xi_2))|^2 \mathrm{d}\xi + 2\mu^3 s^2 \int_{\mathbb{R}^2_+} |\varepsilon_{22}(u(\xi_1, \xi_2)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \underbrace{(2\lambda^3 r^2 + 2\mu^3 s^2)}_{=:c_3} \|\varepsilon_{22}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \\
&\leq c_3 \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Insgesamt folgt mit Hilfe der Ungleichungen (A.30)-(A.32), sowie (A.25), für die Gleichung (A.24):

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(\tilde{u})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} + \frac{1}{4}\Big(c_1 \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} + c_2 \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} + c_3 \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}\Big) \\
&= (1 + \frac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3)) \|\varepsilon(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich also für die L^2-Norm von $\varepsilon(\tilde{u})$:

$$\|\varepsilon(\tilde{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \underbrace{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3))}}_{=:c_4} \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}, \tag{A.33}$$

womit (A.23) bewiesen ist.

□

Das war der Beweis für $n = 2$. Ich möchte jetzt noch kurz den Beweis für $n = N$ skizzieren (siehe [15], S. 240). Es sei wieder:

$$E(u) = \begin{cases} u & \text{für } x \in \mathbb{R}^N_+ \\ \tilde{u} & \text{für } x \in \mathbb{R}^N_-. \end{cases} \tag{A.34}$$

Ich möchte zeigen, dass dann die folgenden Propositionen erfüllt sind:

Proposition 5 *E bildet $C^0(\mathbb{R}^N_+)$ ab in $C^0(\mathbb{R}^N)$.*

Proposition 6 *E bildet $\dot{H}_1(\mathbb{R}^N_+)$ ab in $\dot{H}_1(\mathbb{R}^N)$, so dass*

$$\|\varepsilon(E(u))\|_{\mathbb{R}^N} \leq c_4 \|\varepsilon(u)\|_{\mathbb{R}^N_+}. \tag{A.35}$$

Dabei verwende ich die Zerlegung $x = (\xi, \xi')$ mit $\xi = (x_1, \ldots, x_{N-1})$ und $\xi' = x_N$. Ferner seien α, β Indizes der Länge $(1, \ldots, N-1)$. Dann definiere ich

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\alpha &= p u^\lambda_\alpha + q u^\mu_\alpha \\ \tilde{u}_N &= r u^\lambda_N + s u^\mu_N. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet der obere Index λ bzw. μ für eine Funktion υ:

$$\begin{aligned} \upsilon^\lambda &= \upsilon(\xi, -\lambda\xi'), \\ \upsilon^\mu &= \upsilon(\xi, -\mu\xi'). \end{aligned}$$

Die Bedingungen

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0$$

garantieren, dass $\tilde{u}_i$ wohldefiniert ist für $x \in \mathbb{R}^N_-$. Für

$$\begin{aligned} p + q &= 1, \\ r + s &= 1, \end{aligned}$$

sind Proposition 5 und der erste Teil von Proposition 6 erfüllt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}) &= p\varepsilon_{\alpha\beta}(u)^\lambda + q\varepsilon_{\alpha\beta}(u)^\mu, \\ \varepsilon_{NN}(\tilde{u}) &= -\lambda r \varepsilon_{NN}(u)^\lambda - \mu s \varepsilon_{NN}(u)^\mu, \end{aligned}$$

sowie

$$2\varepsilon_{\alpha N}(\tilde{u}) = -\lambda p \partial_N u^\lambda_\alpha - \mu q \partial_N u^\mu_\alpha + r\partial_\alpha u^\lambda_N + s\partial_\alpha u^\mu_N.$$

Für

$$r = -\lambda p, \quad s = -\mu q$$

ist auch $\varepsilon_{\alpha N}(\tilde{u})$ Linearkombination von $\varepsilon(u)^\lambda$ bzw. $\varepsilon(u)^\mu$, nämlich

$$\varepsilon_{\alpha N}(\tilde{u}) = r\varepsilon_{\alpha N}(u)^\lambda + s\varepsilon_{\alpha N}(u)^\mu.$$

Für $\lambda \neq \mu$ sind die Parameter p, q, r, s eindeutig bestimmt. Eine mögliche Wahl ist $\lambda = 2, \mu = 1, p = -2, q = 3, r = 4, s = -3$. Da also $\varepsilon(\tilde{u})$ Linearkombinationen von $\varepsilon(u)^\lambda$ bzw. $\varepsilon(u)^\mu$ sind, kann ich wie eben zeigen, dass auch der 2. Teil von Proposition 6 erfüllt ist.

$\square$

Bemerkung A.2 *Aus der 1. Kornschen Ungleichung (4.9) und der Abschätzung (A.23) ergibt sich dann:*

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &\leq \|\nabla(\tilde{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sqrt{2}\|\varepsilon(\tilde{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sqrt{2}c_4\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}.\end{aligned}$$

Addiert man auf beiden Seiten $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ hinzu, so erhält man die 2. Kornsche Ungleichung im Raum $\dot{H}_1(\mathbb{R}^n_+)$, denn

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &\leq \sqrt{2}c_4\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \\ &\leq c\Big(\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\Big).\end{aligned}$$

B. Literaturverzeichnis

[1] R. A. Adams und J. F. Fournier (2006): Sobolev Spaces, 2. Neuauflage, Academic Press

[2] D. Braess (2007): Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie, 4. Auflage, Springer- Verlag Berlin Heidelberg

[3] G. A. Chechkin, A. L. Piatnitsky und A. S. Shamaev (2007): Homogenization: Methods and Applications, American Mathematical Society

[4] P. G. Ciarlet (2005): Mathematical Elasticity.Volume I: Three dimensional elasticity, 2. Auflage, Elsevier

[5] P.G. Ciarlet (2000): Mathematical Elasticity.Volume III: Theory of Shells, Elsevier

[6] R. Dautrey und J.L. Lions (1988): Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Functional and Variational Methods, Springer- Verlag Berlin Heidelberg

[7] M. Dobrowolksi (2010): Angewandte Funktionalanalysis, 2. Auflage, Springer- Verlag Berlin Heidelberg

[8] M. Dubenhöfer (2007): L^2-Theorie und Plancherel- Theorem, http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/hs2007/harm-analysis/th6.pdf, (27.09.2012)

[9] G. Duvaut und J.L. Lions (1976): Ineqalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag

[10] C. Eck, H. Garcke und P. Knaber (2011): Mathematische Modellierung, 2. Auflage, Springer- Verlag Berlin Heidelberg

[11] L. C. Evans (2002): Partial Differential Equations, American Mathematical Society

[12] S. Hergarten (2007/2008): Der Spannungstensor, http://geol43.uni-graz.at/07W/GEO332/spannungstensor.pdf, (6.02.2013)

[13] K. Königsberger (2004): Analysis II, 4. Auflage, Springer- Verlag Berlin Heidelberg

[14] D. Lorenz (2010): Fouriertransformation und Distributionen, https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/iaa/ftdskript.pdf, (27.09.2012)

[15] J. A. Nitsche (1981): On Korn's second Inequality, R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis

[16] O. A. Olejnik, A. S. Shamaev und G. A. Iosifjan (1992): Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization, North Holland

[17] B. Schellenberg und J. Bo, Die L^1 und L^2- Theorie der Fourier- Analysis, http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/hs2007/harm-analysis/FT2.pdf, (27.09.2012)

[18] G. Sweers (2009): Partielle Differentialgleichungen, http://www.mi.uni-koeln.de/Vorlesung_Sweers/PDGL09/Skript/PDGL09.pdf, (13.02.2013)

[19] (freie Enzyklopädie) Wikipedia, http://www.wikipedia.de, (3.12.2012)