

Diplomarbeit
im Fach Mathematik

Tomas Kuhlmann

**Die Verzerrungsenergie eines elastisch
deformierten Körpers anhand eines einfachen
Federmodells**

Betreuer: Prof. Dr. Patrizio Neff

Lehrstuhl für Nichtlineare Analysis und Modellierung
Fakultät für Mathematik, Campus Essen

Vorgelegt in der Diplomprüfung für den Diplom-Studiengang
Mathematik an der Universität Duisburg-Essen



29. Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Notation	3
2	Einleitung	5
3	Verzerrungsenergie bei homogener Deformation	7
3.1	Heuristik: 1-Dimensionale Feder	7
3.2	3-Dimensionale Verallgemeinerung	10
4	Formale Homogenisierung: Mittelung über die Einheitssphäre	20
4.1	Einige Formeln	20
4.2	Tensor-Schreibweise	30
4.3	Problematik eines nichtlinearen Beispiels	32
4.3.1	Für $X \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$	32
4.3.2	Transformation auf Diagonalgestalt	34
5	Vergleich zur linearen Elastizität isotroper Körper	36
5.1	Einführung	36
5.2	Die Cauchy-Relationen	40
6	Isotrope Tensorfunktionen	42
7	Starrkörperdrehungen und infinitesimale rigide Verschiebung	44
7.1	Starrkörperdrehungen	44
7.2	Infinitesimale rigide Verschiebungen	47
8	Erste Korn'sche Ungleichung	49
9	Ungleichung von Poincaré	52
10	Lax-Milgram in Banachräumen	56

11 Minimierung der Energie in einem beschränkten Gebiet - Euler-Lagrange Gleichungen	63
11.1 Euler-Lagrange Gleichungen	64
11.2 Existenz und Eindeutigkeit	67
A Definition der schwachen Ableitung	69
B Integrierbarkeit einer reellwertigen Funktion über eine zwei- dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3	70
B.1 Satz mit Definition	70
B.2 Erläuterung der Definition	71
B.3 Eindeutigkeit der Definition	74
C Beweis des Transformationssatzes	78

Kapitel 1

Notation

$\mathbb{M}^{3 \times 3}$: Menge aller reellen 3×3 Matrizen

$\mathrm{GL}^+(3)$: Menge aller reellen invertierbaren 3×3 Matrizen mit positiver Determinante

O^3 : Menge aller orthogonalen reellen 3×3 Matrizen

$\mathrm{SO}(3)$: Menge aller orthogonalen $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ Matrizen mit Determinante $+1$

$\mathfrak{so}(3)$: Menge aller schiefssymmetrischen $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ Matrizen

1 : Einheitsmatrix auf $\mathbb{M}^{3 \times 3}$

X, Y : reelle 3×3 Matrizen mit den Einträgen $x_{ij}, y_{ij}; i, j \in \{1, \dots, 3\}$

X^T : transponierte Matrix

$\mathrm{sym}X$: symmetrischer Anteil der Matrix X , $\mathrm{sym}X = \frac{X+X^T}{2}$

$\mathrm{skew}X$: schiefssymmetrischer Anteil der Matrix X , $\mathrm{skew}X = \frac{X-X^T}{2}$

$\mathrm{Adj}X$: adjunkte Matrix,

für $X \in \mathrm{GL}^+(3)$ gilt: $\mathrm{Adj}X = \det X \cdot X^{-1}$

$\mathrm{tr}(X)$: Spur der Matrix X

$\det(X)$: Determinante der Matrix X

$\langle a, b \rangle$: euklidisches Skalarprodukt der Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$

$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^3 x_{ij}y_{ij}$: euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{M}^{3 \times 3}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$: beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3

$\partial\Omega$: glatter Rand von Ω

$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$: Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m

$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$: Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R}^m mit kompaktem Träger in Ω

$L^p(\Omega)$: Standard Lebesgue-Räume

$L_{loc}^1(\Omega)$: Raum der lokal integrierbaren Funktionen

$(\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_K u \, dx < \infty \quad \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\})$

$W^{m,p}(\Omega)$: Standard Sobolev-Räume (alle schwachen Ableitungen bis zur m-ten Ordnung existieren und sind Elemente aus $L^p(\Omega)$)¹

$\|u\|_{m,p,\Omega}$: Norm von u auf $W^{m,p}(\Omega)$, $\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)}$

$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}} =$ Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$
in der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

$\operatorname{div}(u) = \sum_{i=1}^n \partial_i u_i$: Divergenz der Abbildung $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$\operatorname{Div}(Du)$: Spaltenvektor, dessen i-te Komponente die Divergenz der i-ten Zeile von Du ist

$$\begin{aligned} \text{im } \mathbb{R}^3 : \quad \operatorname{Div}(Du) &= \operatorname{Div} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 u_1 + \partial_2 \partial_2 u_1 + \partial_3 \partial_3 u_1 \\ \partial_1 \partial_1 u_2 + \partial_2 \partial_2 u_2 + \partial_3 \partial_3 u_2 \\ \partial_1 \partial_1 u_3 + \partial_2 \partial_2 u_3 + \partial_3 \partial_3 u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Curl}(u) = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} : \text{Curl des Vektorfelds } u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

¹siehe Anhang A

Kapitel 2

Einleitung

Die Elastizitätstheorie beschäftigt sich mit der Beziehung zwischen der Belastung eines festen Körpers und der daraus resultierenden Deformation. Ihre Anfänge gehen zurück bis in die zweite Hälfte des 17. Jahrhunderts, als Robert Hooke (1635-1703) das sogenannte Federgesetz formulierte: die Ausdehnung einer Feder ist proportional zur Kraft, mit der die Feder gedehnt wird („ut tensio, sic vis“).

Nur wenig später begann Gottfried Wilhelm Leibniz (1648-1716) die Bruchfestigkeit eines geraden Balkens zu untersuchen. Der Mathematiker Jakob Bernoulli (1655-1705) beschäftigte sich als erster mit der elastischen Formänderung eines - nicht bis zum Bruch - belasteten Balkens. Angeregt von Daniel Bernoulli (1700-1782) beschäftigte sich später auch der Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) mit diesem Thema.

Eine bedeutende Entwicklung erfuhr die Elastizitätstheorie durch einen weiteren berühmten Mathematiker, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), der die Idee des Spannungstensors etablierte (siehe Kapitel 4). Dazu ein Zitat aus dem 1822 verfassten Artikel *Recherches sur l'équilibre et le mouvement interieur des corps solides ou fluides, elastiques ou non elastiques*: „Wenn man in einem festen, elastischen oder nicht elastischen, durch beliebige Flächen begrenzten Körper ein festes Element ins Auge fasst, so erfährt dieses Element in jedem Punkte seiner Oberfläche eine [Zug- oder Druck-]Spannung. Diese Spannung ist ähnlich jener in Flüssigkeiten auftretenden, einzig mit dem Unterschied, dass der Flüssigkeitsdruck in einem Punkt stets senkrecht zu der dort beliebig orientierten Fläche steht, während die Spannung in einem gegebenen Punkte eines festen Körpers zu dem durch diesen Punkt gelegten Oberflächenelement im allgemeinen schief gerichtet und von der Stellung des Oberflächenelements abhängig sein wird. Diese Spannung lässt sich sehr leicht aus den in den drei Koordinatenebenen auftretenden Spannungen herleiten.“ [Sza79]

Die folgende Arbeit beschreibt die in deformierten Körpern gespeicherte elastische Energie indem auf ein einfaches Federmodell Bezug genommen wird. Im dritten Kapitel wird dieses Modell, nach einer Einführung der wesentlichen Größen für den eindimensionalen Fall, vorgestellt und die Beschreibung der elastischen Energie einer deformierten Kugel daraus abgeleitet.

Das vierte Kapitel leitet Formeln zur Integration über die Einheitskugel her, die im dritten Kapitel benötigt werden, um einen expliziten Ausdruck für die elastische Energie zu erhalten. Zur Herleitung dieser Formeln braucht man einen mathematischen Satz zur Integration über eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , der im Anhang B erläutert und bewiesen wird. Im Anhang C wird der Transformationssatz bewiesen, der im Beweis von Anhang B verwendet wird.

Das fünfte Kapitel behandelt allgemeine Grundlagen der linearen Elastizität isotroper Körper. Im sechsten Kapitel wird dann gezeigt, warum bei isotropem Material schon zwei Materialkonstanten ausreichen, um die Beziehung zwischen Spannungs- und Dehnungstensor zu bestimmen (sofern man von der idealisierten Vorstellung einer linearen Beziehung zwischen diesen beiden Größen ausgeht). Diese beiden Kapitel dienen der Einordnung des einfachen Federmodells, das mit einer Materialkonstanten auskommt, in die lineare isotrope Elastizitätstheorie.

Das Ziel des siebten Kapitels es, den Raum der infinitesimalen rigiden Verformungen, die den Tangentialraum an die Menge der Starrkörperdrehungen in der Stelle der Identität darstellen, vollständig zu erfassen.

In den Kapiteln acht bis zehn werden drei mathematische Sätze dargestellt: die erste Korn'sche Ungleichung, die Ungleichung von Poincaré und der Satz von Lax-Milgram in Banachräumen, die für das elfte Kapitel gebraucht werden.

Das elfte Kapitel schließlich beschreibt, aufbauend auf den Ergebnissen des dritten Kapitels, ein Verfahren zur Minimierung der elastischen Energie eines deformierten Körpers, das in einem partiellen Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mündet. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses Systems zu beweisen, wird auf die drei oben genannten mathematische Sätze zurückgegriffen.

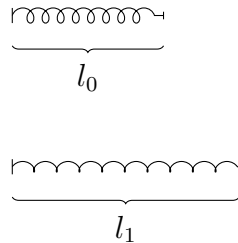
Kapitel 3

Verzerrungsenergie bei homogener Deformation

3.1 Heuristik: 1-Dimensionale Feder

Ziel dieses ersten Abschnittes ist es, anhand eines einfachen Gedankenmodells zu einem Ausdruck für die in einem beliebig deformierten Körper gespeicherte elastische Energie zu gelangen.

Zunächst betrachten wir die eindimensionale Situation der Auslenkung einer elastischen Feder.



*Oben: ungedehnte Feder mit der Länge l_0 ,
unten: gedehnte Feder mit der Länge $l_1 = l_0 + \Delta l$.*

Die relative Auslenkung e ist der relative Längenunterschied der Feder vor und nach der Auslenkung:

$$e = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1}{l_0} - 1 = \lambda - 1 ,$$

wobei $\lambda = \frac{l_1}{l_0}$ die relative Längenänderung ist.

Im Zusammenhang damit definieren wir die Funktion

$$\varphi : [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \frac{l_1}{l_0}x.$$

Damit gilt: $\varphi(l_0) = l_1$ und $\varphi'(x) = \frac{l_1}{l_0} = \lambda$.

Für eine harmonische Feder ist die Federkraft gegeben durch

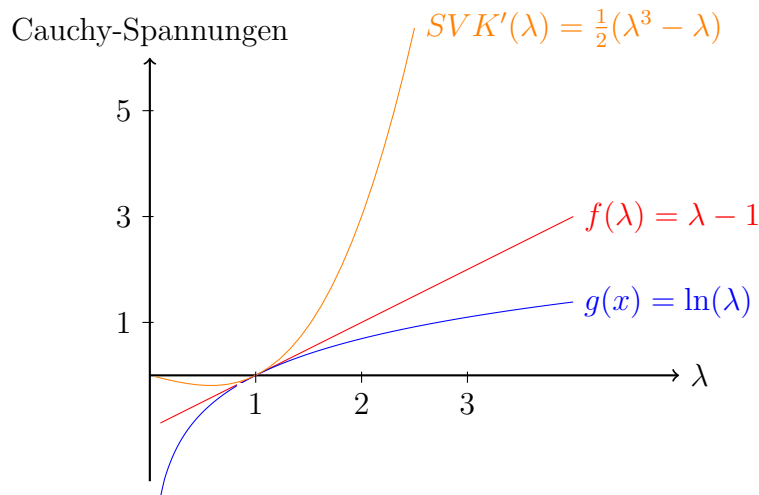
$$\sigma(e) = k \frac{\Delta l}{l_0} = ke = k(\lambda - 1),$$

mit der Federkonstanten k und der relativen Auslenkung e der Feder aus ihrem Ruhezustand, bzw. dem relativen Längenunterschied λ . Die Federkraft hängt also linear von der relativen Auslenkung $e = \lambda - 1$ ab.

Die Federkraft einer realistischen Feder wird dagegen besser durch den Zusammenhang:

$$\sigma(e) = k \cdot \ln(1 + e), \quad \text{bzw.} \quad \sigma(\lambda) = k \cdot \ln(\lambda)$$

beschrieben.¹ Bei einer realistischen Feder geht also mit zunehmender Auslenkung der lineare Zusammenhang zwischen Auslenkung und Federkraft verloren: für zunehmende Dehnung flacht die Kurve der Federkraft ab, für zunehmende Stauchung wird sie steiler:



Spannungskurven für verschiedene Federkraftmodelle.² Die SVK-Kurve ist physikalisch nur brauchbar in einer Umgebung der 1.

¹Siehe nächste Seite und S. 37/38.

² $SVK'(\lambda)$ ist die Ableitung der eindimensionalen Saint-Venant-Kirchhoff Energie:
 $SVK(\lambda) = \frac{1}{8}(\lambda^2 - 1)^2$.

Die Federenergie in diesem eindimensionalen Fall ist die über den zurückgelegten Weg integrierte Federkraft:

$$\mathcal{E} = \int_0^{\Delta l} \sigma(s) ds.$$

Für eine harmonische Feder ergibt das:

$$\mathcal{E} = \int_0^{\Delta l} k \cdot \frac{s}{l_0} ds = \frac{k}{2l_0} (\Delta l)^2 = \frac{k}{2l_0} \cdot \frac{l_0^2}{l_0^2} (l_1 - l_0)^2 = \frac{k \cdot l_0}{2} (\lambda - 1)^2, \quad (3.1)$$

die Federenergie ist hier also proportional zum Quadrat der Auslenkung. Der Vergleich mit einer aktuellen Methode, das Energiepotenzial eines deformierten Körpers zu analysieren (Stillinger-Weber Potential, Molekularmethode), hat ergeben, dass die logarithmische Energie am Besten abschneidet [DT03, S. 509]. Diese Energie ist gegeben durch:

$$\mathcal{E}(\lambda) = \frac{k \cdot l_0}{2} (\ln(\lambda))^2.$$

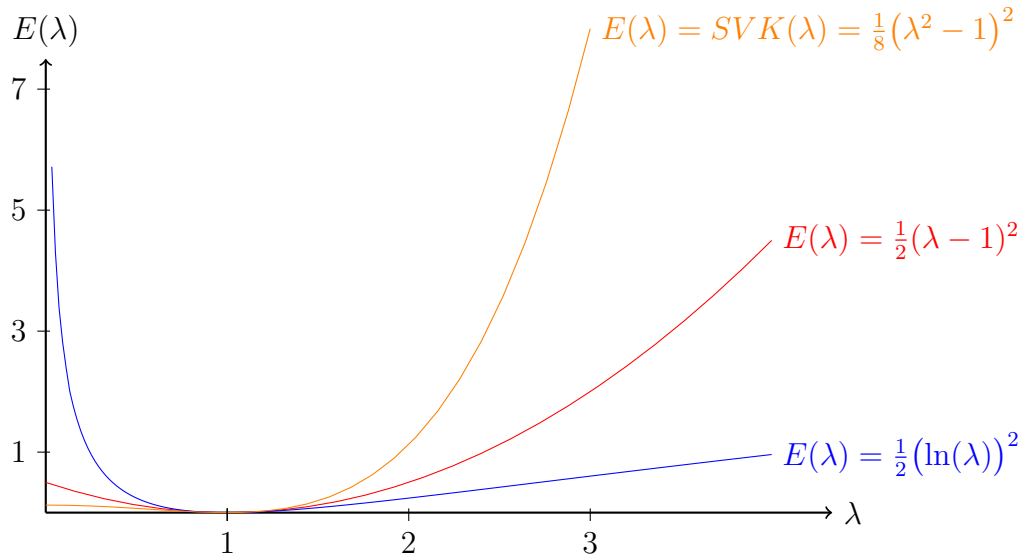
Die Federkraft, über die integriert werden muss um zu dieser Energie zu gelangen, ist die sogenannte Erste Piola-Kirchhoff-Spannung:

$$S_1(\lambda) := \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{E}(\lambda) = k \cdot \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\lambda) &= \int_0^{\Delta l} k \cdot \frac{\ln(\frac{l(s)}{l_0})}{\frac{l(s)}{l_0}} ds = \int_1^\lambda k \cdot l_0 \cdot \frac{\ln(u)}{u} du \\ &= \int_1^\lambda \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{E}(u) du = \frac{k \cdot l_0}{2} (\ln(\lambda))^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

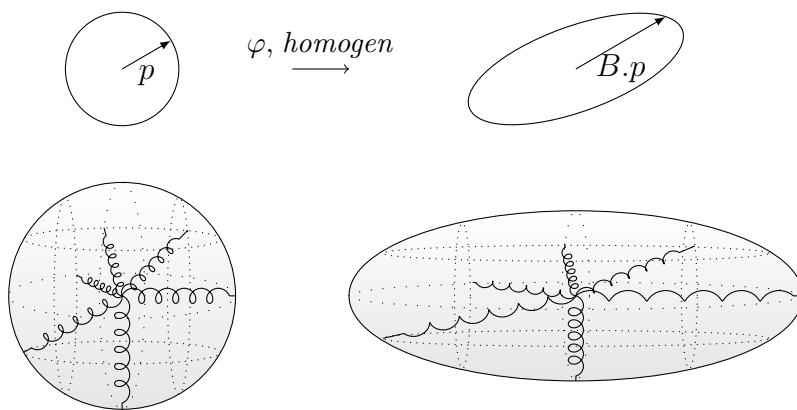
Multipliziert man die Erste Piola-Kirchhoff-Spannung mit dem Faktor λ , so erhält man in diesem eindimensionalen Fall die sogenannte Cauchy-Spannung, die oben als die Federkraft einer realistischeren Feder (im Vergleich zur harmonischen) eingeführt wurde: $\sigma(\lambda) = k \cdot \ln(\lambda)$.



Energieplot für verschiedene Energiemodelle.

3.2 3-Dimensionale Verallgemeinerung

Wir betrachten nun die dreidimensionale Einheitskugel K und stellen uns vor, dass sie von Federn durchzogen ist, die alle vom Mittelpunkt/Ursprung zu einem Punkt auf der Oberfläche führen. Wird die Kugel homogen verformt, d.h. $\varphi(p) = B \cdot p \quad \forall p \in K$, mit $B \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$, $\det B > 0$ und $B = \text{const.}$, so ändern sich die Positionen der nach außen gerichteten Federenden wodurch die Federn gedehnt oder gestaucht werden:



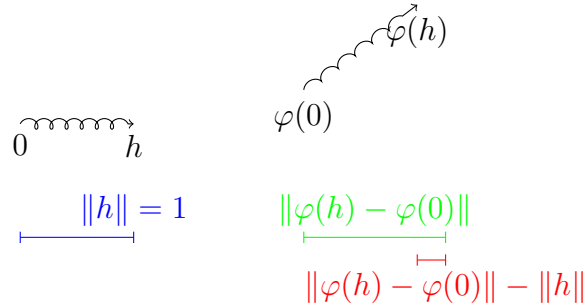
Homogene Verformung einer Kugel:
oben mit dem Vektor p , unten mit dem Federmodell.

Die Verzerrungsenergie ist in diesem einfachen Modell die Energie, die benötigt wird um alle Federn auszulenken.

Sei nun K die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 ($\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_{\mathbb{R}^3} \leq 1\}$) und $\varphi \in C^\infty(K, \mathbb{R}^3)$ eine Funktion, die jeden Punkt der Einheitskugel dem Ort zuordnet, auf dem er sich nach der (nicht notwendigerweise homogenen) Deformation befindet.

Um im Federmodell zu bleiben, stellen wir uns jeden Einheitsvektor $h \in \mathbb{S}^2$ als das Ende einer Feder vor, deren anderes Ende der Ursprung ist.

Die absolute Auslenkung Δl einer jeden solchen Feder durch die Deformation φ ist gegeben durch $\|\varphi(h) - \varphi(0)\| - \|h\|$.



Links ungedehnte Feder, rechts gedehnte Feder.

Wir gehen zunächst von harmonischen Federn aus. Die Energie der ausgelenkten Feder sei also proportional zum Quadrat der absoluten Auslenkung, also proportional zu $(\|\varphi(h) - \varphi(0)\| - \|h\|)^2$.

Haben die Federn in alle Richtungen dieselbe Federkonstante k (Isotropie-Annahme in dieser Betrachtungsweise), dann folgt daraus, dass für das Integral der Verzerrungsenergie über alle Richtungen \tilde{h} mit: $\{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2\} = \{l_0 h, h \in \mathbb{S}^2, l_0 \text{ fest}\}$

$$W(\varphi) = \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} \mathcal{E}(\tilde{h}) d\tilde{\mathbb{S}}^2 = \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} \frac{k}{2l_0} (\Delta l_{\tilde{h}})^2 d\tilde{\mathbb{S}}^2$$

gilt:

$$W(\varphi) = \frac{k}{2l_0} \cdot \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} (\|\varphi(\tilde{h}) - \varphi(0)\| - \|\tilde{h}\|)^2 d\tilde{\mathbb{S}}^2. \quad (3.3)$$

Der Ausdruck $\varphi(\tilde{h}) - \varphi(0)$ lässt sich für kleine l_0 wegen

$$\varphi(\tilde{h}) = \varphi(l_0 h) = \varphi(0) + D\varphi(0) \cdot l_0 h + \frac{1}{2} D^2 \varphi(l_0 h, l_0 h) + \dots$$

in erster Näherung durch $D\varphi(0).\tilde{h}$ annähern, wobei wir $F = D\varphi(0)$ setzen. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
W(\varphi) &= \frac{k}{2l_0} \cdot \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} (\|\varphi(\tilde{h}) - \varphi(0)\| - \|\tilde{h}\|)^2 d\tilde{\mathbb{S}}^2 \\
&\approx \frac{k}{2l_0} \cdot \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} (\|D\varphi(0).\tilde{h}\| - \|\tilde{h}\|)^2 d\tilde{\mathbb{S}}^2 = W(D\varphi) \\
&= \frac{k}{2l_0} \cdot \int_{\|y\|=l_0} (\|Fy\| - \|y\|)^2 dS(y) \\
&= \frac{k \cdot l_0}{2} \cdot \int_{\|w\|=1} (\|F(l_0w)\| - \|l_0w\|)^2 dS(w) \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{\|w\|=1} (\|Fw\| - 1)^2 dS(w) \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\sqrt{\langle Fh, Fh \rangle} - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\sqrt{\langle F^T F h, h \rangle} - 1)^2 d\mathbb{S}^2,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

da für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ und $X \in \mathbb{M}^{n \times n}$ gilt:

$$\langle y, Xh \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} h_j \right) y_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} y_i \right) h_j = \langle X^T y, h \rangle. \tag{3.5}$$

Das Integral über die Einheitssphäre \mathbb{S}^2 ist nun unabhängig von der Länge l_0 . Weiter folgt:

$$\begin{aligned}
W(D\varphi) &= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\sqrt{\langle F^T F h, h \rangle} - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\sqrt{1 + \langle F^T F h, h \rangle} - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\sqrt{1 + \langle F^T F h - h, h \rangle} - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\sqrt{1 + \langle (F^T F - \mathbf{1})h, h \rangle} - 1)^2 d\mathbb{S}^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Geht man weiter davon aus, dass: $F^T F \approx \mathbb{1}$, also: $\|F^T F - \mathbb{1}\| \ll 1$,
d.h.: F ist näherungsweise eine orthogonale Matrix, so gilt wegen:
 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \dots$ für x nahe 0, wobei x hier $\langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle$ ist:

$$\begin{aligned}
W(D\varphi) &= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|D\varphi(0) \cdot h\| - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\sqrt{1 + \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle} - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\
&\approx \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \left(1 + \frac{1}{2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle - 1\right)^2 d\mathbb{S}^2 \quad (3.7) \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \frac{1}{4} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{8} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2.
\end{aligned}$$

Die Integration über die Sphäre \mathbb{S}^2 kann für den approximierten Ausdruck nun explizit ausgeführt werden. Es folgt nach Satz 4.1.(2) im nächsten Kapitel:

$$\begin{aligned}
W(F) &\approx \frac{k \cdot l_0^3}{8} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k\pi \cdot l_0^3}{15} \left(\|\text{sym}(F^T F - \mathbb{1})\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr}(F^T F - \mathbb{1}))^2 \right) \quad (3.8) \\
&= \frac{k\pi \cdot l_0^3}{15} \left(\|F^T F - \mathbb{1}\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr}(F^T F - \mathbb{1}))^2 \right),
\end{aligned}$$

da $(F^T F - \mathbb{1})$ symmetrisch ist, denn:

$$(F^T F - \mathbb{1})^T = F^T F^{TT} - \mathbb{1}^T = F^T F - \mathbb{1}.$$

Zusammenfassend gilt nach unserem Ansatz in erster Näherung bei kleiner Deformation für das Integral der Verzerrungsenergie über alle Richtungen:

$$W(F) \approx \frac{k\pi \cdot l_0^3}{15} \left(\|F^T F - \mathbb{1}\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr}(F^T F - \mathbb{1}))^2 \right), \quad (3.9)$$

wobei k die eine und alleinige Federkonstante ist und $F = D\varphi(0)$ die homogen deformierte Kugel beschreibt.

Der Lagrange'sche Verzerrungstensor E ist definiert durch:

$$E := \frac{1}{2}(F^T F - \mathbf{1}).$$

Damit gilt:

$$W(E) \approx \frac{4k\pi \cdot l_0^3}{15} \left(\|E\|^2 + \frac{1}{2}(\text{tr}(E))^2 \right). \quad (3.10)$$

Auch wenn wir von dem realistischeren logarithmischen Energiemodell ausgehen: $\mathcal{E}(\lambda) = \frac{k \cdot l_0}{2} (\ln(\lambda))^2$, können wir über das Taylorpolynom zweiten Grades des Ausdrucks $\ln(\lambda)$ an der Stelle 1 das Integral der Verzerrungsenergie über alle Richtungen in erster Näherung explizit angeben.³

$$\begin{aligned} \frac{k \cdot l_0}{2} (\ln(\lambda))^2 &\approx \frac{k \cdot l_0}{2} \left((\lambda - 1) - \frac{(\lambda - 1)^2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{k \cdot l_0}{2} \left((\lambda - 1)^2 - (\lambda - 1)^3 + \frac{1}{4}(\lambda - 1)^4 \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wieder setzen wir W als das Integral der Verzerrungsenergien über alle Richtungen an.

Wegen:

$$\lambda = \frac{l_1}{l_0} = \frac{\|\varphi(\tilde{h}) - \varphi(0)\|}{\|\tilde{h}\|} \approx \frac{\|D\varphi(0) \cdot l_0 \cdot h\|}{\|l_0 \cdot h\|} = \|D\varphi(0) \cdot h\|$$

für kleine l_0 und $\tilde{h} = l_0 \cdot h$, mit $h \in \mathbb{S}^2$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} W(\varphi) &= \frac{k \cdot \|\tilde{h}\|}{2} \cdot \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} \left(\ln \left(\frac{\|\varphi(\tilde{h}) - \varphi(0)\|}{\|\tilde{h}\|} \right) \right)^2 d\tilde{\mathbb{S}}^2 \\ &\approx \frac{k \cdot \|\tilde{h}\|}{2} \cdot \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} \left(\ln \left\| D\varphi(0) \cdot \frac{\tilde{h}}{l_0} \right\| \right)^2 d\tilde{\mathbb{S}}^2 \\ &= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\ln \|D\varphi(0) \cdot h\|)^2 d\mathbb{S}^2 \\ &\approx \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|D\varphi(0) \cdot h\| - 1)^2 - (\|D\varphi(0) \cdot h\| - 1)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4} (\|D\varphi(0) \cdot h\| - 1)^4 d\mathbb{S}^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

³ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$

Zur Schwierigkeit, die explizite Darstellung direkt über die Funktion zu erhalten, siehe Kapitel 4.1.

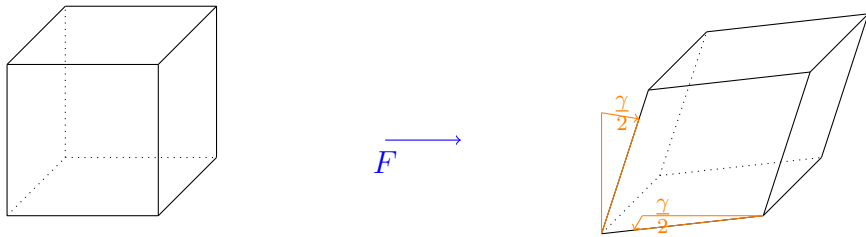
Dies ist gemäß (3.7):

$$\begin{aligned}
W(D\varphi) &\approx \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle \right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle \right)^4 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{8} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2 - \frac{k \cdot l_0^3}{16} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle^3 d\mathbb{S}^2 \\
&\quad + \frac{k \cdot l_0^3}{128} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle (F^T F - \mathbb{1})h, h \rangle^4 d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Eh, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2 - \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Eh, h \rangle^3 d\mathbb{S}^2 \\
&\quad + \frac{k \cdot l_0^3}{8} \cdot \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Eh, h \rangle^4 d\mathbb{S}^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Man beachte, dass in diesem Ausdruck nur Potenzen der Art

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle X.h, h \rangle^r d\mathbb{S}^2, \quad r \in \mathbb{N}$$

auftreten (vergl. Satz 4.4), welche wir geschlossen integrieren können.



Deformation eines Würfels durch reine Scherung.

Mit der Matrix $\frac{1}{2}(F^T F - \mathbf{1}) = E = X = (x_{ij})$ gilt also nach Satz 4.1.(2), sowie den Gleichungen (4.30) und (4.31):

$$\begin{aligned}
W(F) \approx & \frac{k \cdot l_0^3}{2} \left[\frac{8\pi}{15} (\|\text{sym} X\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr} X)^2) \right] - \\
& \frac{k \cdot l_0^3}{2} \left[\frac{4\pi}{7} \sum_{i=1}^3 x_{ii}^3 + \frac{4\pi}{35} \sum_{i \neq j} \underbrace{(x_{ii} x_{jj}^2 + x_{ij}^2 x_{jj} + x_{ij} x_{ji} x_{jj} + \dots)}_{\binom{6}{2} \text{ Summanden}} + \right. \\
& \left. \frac{4\pi}{105} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} (x_{ii} x_{jj} x_{kk} + 3 \cdot x_{ij}^2 x_{kk} + 3 \cdot x_{ij} x_{ji} x_{kk} + \underbrace{x_{ij} x_{jk} x_{ki} + \dots}_{2^3 \text{ Summanden}}) \right] + \\
& \frac{k \cdot l_0^3}{8} \left[\frac{4\pi}{9} \sum_i x_{ii}^4 + \frac{4\pi}{63} \sum_{i \neq j} \underbrace{(x_{ii} x_{jj}^3 + x_{ij}^2 x_{jj}^2 + x_{ij} x_{ji} x_{jj}^2 + \dots)}_{\binom{8}{2} \text{ Summanden}} \right. \\
& + \frac{4\pi}{315} \sum_{i \neq j} \underbrace{(x_{ii}^2 x_{jj}^2 + x_{ij}^2 x_{ji}^2 + x_{ii} x_{ji} x_{ij}^2 + x_{ii} x_{jj} x_{ij} x_{ji} + \dots)}_{\binom{8}{4} \text{ Summanden}} \\
& + \frac{4\pi}{945} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \left(\binom{4}{2} (x_{ii} x_{jj} x_{kk}^2 + x_{ij}^2 x_{kk}^2 + x_{ij} x_{ji} x_{kk}^2 + x_{ij}^2 x_{ii} x_{kk} + x_{ij}^2 x_{ik}^2 \right. \\
& \left. + x_{ij}^2 x_{ki}^2) + \underbrace{x_{kk} x_{ik} x_{jk} + \dots}_{3 \cdot 2^3 \text{ Summanden}} \right) \left. \right].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Zur Veranschaulichung wenden wir diesen Ausdruck auf eine konkrete Ma-

trix F an. Sei $F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dieser Deformationsgradient wird „reine

Scherung/pure shear“ genannt. Die Größe γ heißt Gleitung. (Siehe dazu die Abbildung links.)

Damit folgt:

$$X = E = \frac{1}{2}(F^T F - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2}{4} & \gamma & 0 \\ \gamma & \frac{\gamma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Setzen wir dieses X in (3.14) ein, erhalten wir mit $l_0 = 1$:

$$W(\gamma) = \frac{k}{8} \left[\frac{8\pi}{15} \left(2\gamma^2 + \frac{\gamma^4}{8} + \frac{\gamma^4}{8} \right) \right] - \frac{k}{16} \left[\frac{4\pi}{7} \cdot \frac{\gamma^6}{32} + \frac{4\pi}{35} \left(\frac{3}{32} \gamma^6 + 6\gamma^4 \right) \right] \quad (3.16)$$

$$+ \frac{k}{128} \left[\frac{4\pi}{9} \cdot \frac{\gamma^8}{128} + \frac{4\pi}{63} \left(\frac{3}{128} \gamma^8 + 6\gamma^6 \right) + \frac{4\pi}{315} \left(\frac{3}{128} \gamma^8 + \frac{3}{2} \gamma^6 + 16\gamma^4 \right) \right] .$$

Also:

$$W(\gamma) = \frac{2k\pi}{15} \cdot \gamma^2 + k\pi \left(\frac{1}{60} - \frac{3}{70} + \frac{1}{2 \cdot 315} \right) \cdot \gamma^4 \quad (3.17)$$

$$+ k\pi \left(-\frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 32} - \frac{3}{4 \cdot 35 \cdot 32} + \frac{1}{16 \cdot 21} + \frac{1}{32 \cdot 105 \cdot 2} \right) \cdot \gamma^6$$

$$+ k\pi \left(\frac{1}{32 \cdot 9 \cdot 192} + \frac{1}{32 \cdot 21 \cdot 128} + \frac{1}{32 \cdot 105 \cdot 128} \right) \cdot \gamma^8 .$$

Ausgerechnet erhält man:

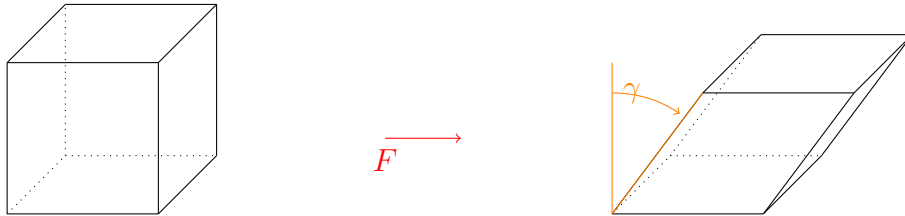
$$W(\gamma) \approx k\pi(0,13333 \cdot \gamma^2 - 0,02460 \cdot \gamma^4 + 0,00149 \cdot \gamma^6 + 0,00003 \cdot \gamma^8) . \quad (3.18)$$

Berechnen wir die Energie mit der Formel (3.9), die wir für das Modell mit den harmonischen Federn hergeleitet hatten, so erhalten wir:

$$W(\gamma) = \frac{k\pi}{15} \left(\|F^T F - \mathbb{1}\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr}(F^T F - \mathbb{1}))^2 \right) = \frac{2k\pi}{15} \cdot \gamma^2 + \frac{k\pi}{60} \cdot \gamma^4 . \quad (3.19)$$

Zum Vergleich beschreibe nun F den „einfache Scherung/simple shear“ ge-

nannten Deformationsgradienten $F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Deformation eines Würfels durch einfache Scherung.

Damit folgt:

$$X = E = \frac{1}{2}(F^T F - \mathbb{1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Setzen wir nun dieses X wieder mit $l_0 = 1$ in (3.14) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} W(\gamma) = & \frac{k}{8} \left[\frac{8\pi}{15} \left(2\gamma^2 + \gamma^4 + \frac{\gamma^4}{2} \right) \right] - \frac{k}{16} \left[\frac{4\pi}{7} \cdot \gamma^6 + \frac{4\pi}{35} \cdot 6\gamma^4 + 0 \right] \\ & + \frac{k}{128} \left[\frac{4\pi}{9} \cdot \gamma^8 + \frac{4\pi}{63} \left(12\gamma^6 + 12\gamma^6 \right) + \frac{4\pi}{315} 16\gamma^4 + 0 \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Also:

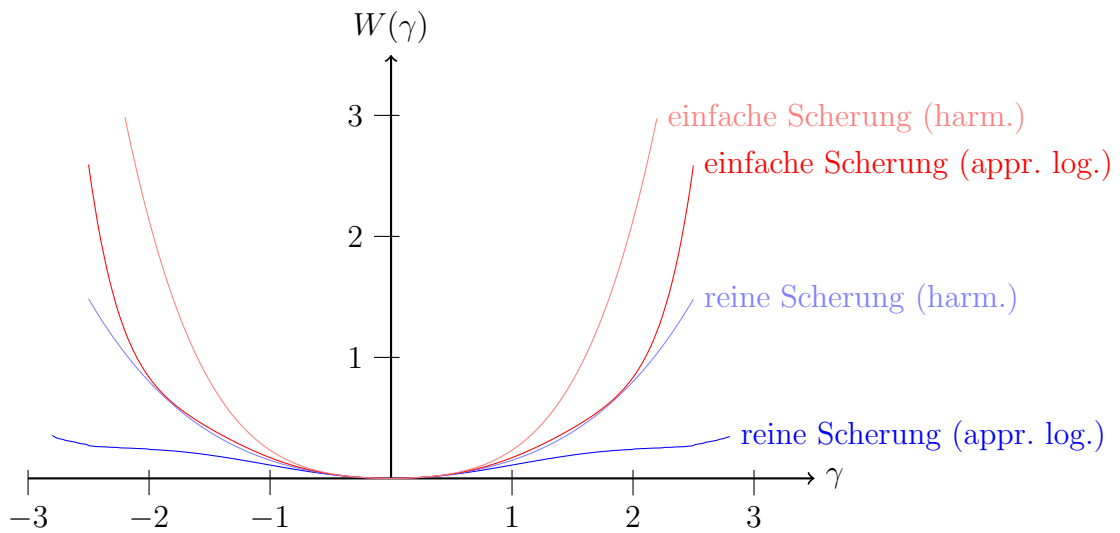
$$\begin{aligned} W(\gamma) = & \frac{2k\pi}{15} \cdot \gamma^2 + k\pi \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{70} + \frac{1}{2 \cdot 315} \right) \cdot \gamma^4 \\ & + k\pi \left(-\frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 42} \right) \cdot \gamma^6 + \frac{k\pi}{32 \cdot 9} \cdot \gamma^8. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ausgerechnet erhält man:

$$W(\gamma) \approx k\pi(0,13333 \cdot \gamma^2 + 0,05873 \cdot \gamma^4 - 0,02381 \cdot \gamma^6 + 0,00347 \cdot \gamma^8). \quad (3.23)$$

Berechnen wir nun wieder die Energie mit der Formel für das Modell mit den harmonischen Federn, so erhalten wir:

$$W(\gamma) = \frac{k\pi}{15} \left(\|F^T F - \mathbb{1}\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr}(F^T F - \mathbb{1}))^2 \right) = \frac{2k\pi}{15} \cdot \gamma^2 + \frac{k\pi}{10} \cdot \gamma^4. \quad (3.24)$$



Energiediagramm für reine und einfache Scherung mit $k = \frac{1}{\pi}$. Die blässeren Kurven beziehen sich auf das Modell mit den harmonischen Federn, die farbigeren auf das approximierte logarithmische Energiemodell

$$W(\gamma) = \alpha_1 \cdot \gamma^2 + \alpha_2 \cdot \gamma^4 + \alpha_3 \cdot \gamma^6 + \alpha_4 \cdot \gamma^8.^4$$

(W ist das Integral der Verzerrungsenergien über alle Richtungen h .)

⁴Zur Problematik, $W(\gamma)$ für das exakte logarithmische Energiemodell zu berechnen, siehe S. 32.

Kapitel 4

Formale Homogenisierung: Mittelung über die Einheitssphäre

4.1 Einige Formeln

Zunächst leite ich die beiden Formeln des folgenden Satzes her.

Satz 4.1. *Sei \mathbb{S}^2 die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 , also alle $h \in \mathbb{R}^3$ mit $\|h\|_{\mathbb{R}^3} = 1$ und X eine beliebige 3×3 Matrix $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ mit Einträgen in \mathbb{R} , dann gilt:*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{3} \operatorname{tr}(X), \\ (2) \quad & \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2 = \frac{8\pi}{15} \left(\|\operatorname{sym} X\|^2 + \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(X))^2 \right). \end{aligned}$$

(Die Matrixnorm in (2) ist die Frobeniusnorm: $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$, wobei das Matrizen-Skalarprodukt definiert ist durch: $\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} y_{ij}$.)

Diese Formeln wurden auch in [NJR09, S. 4271] zur Herleitung der Materialeigenschaften höherer Gradiententheorien benutzt.

Beweis. zu (1): für $h \in \mathbb{R}^3$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} \langle Xh, h \rangle &= \sum_{i=1}^3 h_i \sum_{j=1}^3 x_{ij} h_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} h_i h_j \\ \Rightarrow \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle d\mathbb{S}^2 &= \int_{h \in \mathbb{S}^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} h_i h_j d\mathbb{S}^2 = \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

da die x_{ij} reelle Konstanten unabhängig von der Position von h in \mathbb{S}^2 sind.

Um die auftretenden Integrale $\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2$ zu berechnen, benötige ich folgenden Satz.

Satz 4.2. *Sei U eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Parameterbereich einer homöomorphen und differenzierbaren Parametrisierung γ , für die $D\gamma(x)$ in ganz Ω Rang 2 hat. Dann heißt f genau dann über U integrierbar, wenn f bezüglich jeder Parametrisierung von U , die die obigen Bedingungen erfüllt (man nennt so eine Parametrisierung auch Einbettung), integrierbar ist.*

Der dann von der Parametrisierung unabhängige Wert

$$\int_U f dS := \int_{x \in \Omega} f(\gamma(x)) \sqrt{\det(D\gamma(x)^T D\gamma(x))} dx$$

heißt das Integral von f über U .

Der Beweis dieses Satzes befindet sich im Anhang A.

Sei nun $T := \{h \in \mathbb{S}^2 : h_1 \leq 0 \wedge h_2 = 0\}$ und $\mathbb{S}^2 \setminus T$ somit die geschlitzte Einheitssphäre.

Sei weiter $\gamma : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus T$, $(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

eine Parametrisierung der geschlitzten Einheitssphäre.

Dann ist γ bijektiv, stetig, stetig umkehrbar und differenzierbar mit der Ableitung (Jacobi-Matrix)

$$D\gamma(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Außerdem hat $D\gamma(x)$ für alle $(\varphi, \theta) \in \Omega$ Rang 2:

$$\lambda_1 \cdot D\gamma(\varphi, \theta)_{i1} + \lambda_2 \cdot D\gamma(\varphi, \theta)_{i2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot D\gamma(\varphi, \theta)_{i1} = -\lambda_2 \cdot D\gamma(\varphi, \theta)_{i2} \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \quad \text{da: } \cos \theta > 0 \quad \text{in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{da: } D\gamma(\varphi, \theta)_{i1} \neq 0 \quad \text{in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Spalten von $D\gamma(\varphi, \theta)$ sind also linear unabhängig. Damit erfüllt γ die Bedingungen für eine Einbettung.

Da T eine Nullmenge in \mathbb{S}^2 ist und die h_i beschränkt sind, gilt also:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2 &= \int_{h \in \mathbb{S}^2 \setminus T} h_i h_j d\mathbb{S}^2 = \int_{\Omega} \gamma_i(u) \gamma_j(u) \sqrt{\det(D\gamma(u)^T D\gamma(u))} du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_j \sqrt{\det \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_j |\cos \theta| d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Da $\cos \theta$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nur positive Werte annimmt, können die Betragstriche auch weggelassen werden.

Für das Paar $(i, j) = (3, 3)$ erhält man somit:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_3 h_3 d\mathbb{S}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sei nun $\sin^2 \theta = u$. Dann gilt: $\frac{du}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta$ und daher mit Substitution

$$4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 4\pi \int_0^1 u \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{4\pi}{3}.$$

Für das Paar $(i, j) = (1, 3)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_1 h_3 d\mathbb{S}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi = K \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die übrigen Kombinationen von i und j lassen sich anhand einer einfachen Überlegung auf diese beiden Spezialfälle zurückführen:

Die Zuordnung der Winkel φ und θ innerhalb der drei Einheitsvektoren e_1 , e_2 und e_3 ist willkürlich. Sie lässt sich beliebig vertauschen.

$\gamma^* : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus T^*$ wäre dann eine andere Parametrisierung nach demselben Prinzip auf eine anders geschlitzte Einheitskugel.

Da das Integral aber unabhängig von der Parametrisierung denselben Wert ergeben muss, gilt also für alle $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i^2 d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{3} \quad (4.7)$$

und für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2 = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2 &= \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \\ \Rightarrow \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2 &= \sum_{i=1}^3 x_{ii} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{tr} X. \end{aligned} \quad (4.9)$$

zu (2): für $h \in \mathbb{R}^3$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} \langle Xh, h \rangle^2 &= \left(\sum_{i,j=1}^3 x_{ij} h_i h_j \right)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^3 x_{ij} h_i h_j \right) \left(\sum_{k,l=1}^3 x_{kl} h_k h_l \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 x_{ij} x_{kl} h_i h_j h_k h_l \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2 = \sum_{i,j,k,l=1}^3 x_{ij} x_{kl} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j h_k h_l d\mathbb{S}^2. \quad (4.11)$$

Gemäß der Überlegung auf der letzten Seite zur Vertauschbarkeit der Winkel φ und ϑ , genügt es nun wieder, verschiedene Grundtypen der Indexzuordnung zu unterscheiden:

1. Fall: $i = j = k = l$
2. Fall: $i = j = k \neq l$
3. Fall: $i = j \neq k = l$

4. Fall: $i \neq j \neq k = l \neq i$

Nicht alle vier Indizes können unterschiedlich sein, da nur die Zahlen 1 bis 3 angenommen werden.

Zum 1. Fall:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_3^4 d\mathbb{S}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta = 4\pi \int_0^1 u^2 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Entsprechend folgt daraus für alle $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i^4 d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{5}. \quad (4.13)$$

Zum 2. Fall:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_1 h_3^3 d\mathbb{S}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \varphi \cos \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= K \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i^3 h_j d\mathbb{S}^2 = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } i \neq j. \quad (4.15)$$

Zum 3. Fall:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_1^2 h_3^2 d\mathbb{S}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta d\varphi = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta = 2\pi \int_0^1 u \frac{1}{2\sqrt{u}} (1-u) du \\ &= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{u} - u^{\frac{3}{2}} \right) du = \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{4\pi}{15} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i^2 h_j^2 d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{15} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } i \neq j. \quad (4.17)$$

Zum 4. Fall:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_1 h_2 h_3^2 d\mathbb{S}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \sin \varphi K d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i^2 h_j h_k d\mathbb{S}^2 = 0 \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } i \neq j \neq k \neq i.$$

Allgemein gilt also:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j h_k h_l d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.19)$$

da für $i = j = k = l$ gilt:

$$\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} = 3 \Rightarrow \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \frac{4\pi}{5}. \quad (4.20)$$

Damit erhält man endlich:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j,k,l=1}^3 x_{ij} x_{kl} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j h_k h_l d\mathbb{S}^2 \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 x_{ij} x_{kl} \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= \sum_{i=1}^3 x_{ii}^2 \frac{4\pi}{5} + \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 x_{ii} x_{kk} \frac{4\pi}{15} + \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 x_{ik}^2 \frac{4\pi}{15} + \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 x_{ik} x_{ki} \frac{4\pi}{15} \\ &= \frac{(8+4)\pi}{15} \sum_{i=1}^3 x_{ii}^2 + \frac{4\pi}{15} \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 x_{ii} x_{kk} + \frac{4\pi}{15} \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 (x_{ik}^2 + x_{ik} x_{ki}) \\ &= \frac{4\pi}{15} \sum_{i=1}^3 x_{ii} \sum_{k=1}^3 x_{kk} + \frac{8\pi}{15} \left(\sum_{i=1}^3 x_{ii}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 (x_{ik}^2 + x_{ik} x_{ki}) \right) \\ &= \frac{4\pi}{15} (\text{tr} X)^2 + \frac{8\pi}{15} \|\text{sym} X\|^2 \\ &= \frac{8\pi}{15} \left(\|\text{sym} X\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr} X)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

denn:

$$\begin{aligned}
\|\text{sym}X\|^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right)^2 = \sum_{i=1}^3 x_{ii}^2 + \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 \left(\frac{x_{ik} + x_{ki}}{2} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 x_{ii}^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,k=1, i \neq k}^3 (2x_{ik}^2 + 2x_{ik}x_{ki}) . \quad \square
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

Korollar 4.3. (*Oberfläche der Einheitskugel*)

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} 1 \, d\mathbb{S}^2 = 4\pi .$$

Beweis.

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} 1 \, d\mathbb{S}^2 = \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle h, h \rangle \, d\mathbb{S}^2 = \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle \mathbf{1}h, h \rangle \, d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{3} \text{tr} \mathbf{1} = 4\pi . \quad \square$$

Auch für größere natürliche Zahlen als eins und zwei kann man, mit einigem Aufwand, für den Ausdruck $\int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^r \, d\mathbb{S}^2$ explizite Darstellungen erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^r \, d\mathbb{S}^2 &= \int_{h \in \mathbb{S}^2} \left(\sum_{i_1, j_1=1}^3 x_{i_1 j_1} h_{i_1} h_{j_1} \right) \cdots \left(\sum_{i_r, j_r=1}^3 x_{i_r j_r} h_{i_r} h_{j_r} \right) \, d\mathbb{S}^2 \\
&= \sum_{i_1, j_1=1}^3 x_{i_1 j_1} \cdots \sum_{i_r, j_r=1}^3 x_{i_r j_r} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_{i_1} h_{j_1} \cdots h_{i_r} h_{j_r} \, d\mathbb{S}^2 \\
&= \sum_{i_1, j_1, \dots, i_r, j_r=1}^3 x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_{i_1} h_{j_1} \cdots h_{i_r} h_{j_r} \, d\mathbb{S}^2 ,
\end{aligned}
\tag{4.23}$$

also eine Summe von 3^{2r} Summanden, die sich aufgrund von Symmetriebetrachtungen wieder auf eine bestimmte Anzahl von Grundtypen reduzieren lässt.

Allgemein gilt: $h_{i_1} h_{j_1} \cdots h_{i_r} h_{j_r} = h_1^m h_2^n h_3^p$, mit $m + n + p = 2r$.

Ist eine der Zahlen m, n, p ungerade, dann gilt: $\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_1^m h_2^n h_3^p \, d\mathbb{S}^2 = 0$, denn für alle $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_1^m h_2^{2n+1} h_3^p \, d\mathbb{S}^2 = K \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} \varphi \cos^m \varphi \, d\varphi = 0 , \tag{4.24}$$

und aufgrund der Symmetriebetrachtung ist es gleichgültig, welche Komponente den ungeraden Exponenten hat.

Also bleiben nur Terme übrig, die die Form $\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i^{2m} h_j^{2n} h_k^{2p} d\mathbb{S}^2$ mit $i \neq j \neq k \neq i$ haben.

Dieser Ausdruck lässt sich aufgrund der Symmetriebetrachtung explizit berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i^{2m} h_j^{2n} h_k^{2p} d\mathbb{S}^2 &= \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_1^{2m} h_2^{2n} h_3^{2p} d\mathbb{S}^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} \varphi \sin^{2n} \varphi \cos^{2(m+n)+1} \theta \sin^{2p} \theta d\theta d\varphi \\
&= \int_0^1 \frac{u^p (1-u)^{m+n}}{\sqrt{u}} du \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin^2 \varphi)^m (\sin^2 \varphi)^n d\varphi \\
&= \int_0^1 u^{p-0,5} \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} (-u)^i du \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-\sin^2 \varphi)^i \sin^{2n} \varphi d\varphi.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Mit $m = n = 0$ ist das Ergebnis von (4.25) einfach

$$\frac{1}{p + \frac{1}{2}} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{2p + 1}. \tag{4.26}$$

Sonst kann man o. B.d. A davon ausgehen, dass $n \geq 1$ ist. Das Ergebnis von (4.25) ist dann:

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \binom{m+n}{i} u^{p+i-0,5} du \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (\sin^2 \varphi)^{n+i} d\varphi. \tag{4.27}$$

Allgemein gilt mit partieller Integration für $n \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2(n-1)} x dx = \dots = 2\pi \left(\frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i+1)}{\prod_{i=1}^n (2i)} \right). \tag{4.28}$$

Dies in das Ergebnis von (4.27) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \binom{m+n}{i} \frac{2}{2(p+i)+1} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} 2\pi \left(\frac{\prod_{j=0}^{n+i-1} (2j+1)}{\prod_{j=1}^{n+i} (2j)} \right) \\
&= 4\pi \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \frac{\binom{m+n}{i}}{2(p+i)+1} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n+i-1} (2j+1)}{\prod_{j=1}^{n+i} (2j)} \right). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Daraus folgt letztendlich:

Satz 4.4. *Sei \mathbb{S}^2 die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 , also alle $h \in \mathbb{R}^3$ mit $\|h\|_{\mathbb{R}^3} = 1$ und X eine beliebige 3×3 Matrix $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ mit Einträgen in \mathbb{R} , sowie r eine beliebige natürliche Zahl, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
& \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^r d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{2r+1} \sum_{i=1}^3 x_{ii}^r + \\
& \sum_{\substack{m+n+p=r, \text{ die drei Indizes kommen } 2m, 2n, 2p \text{ mal vor, } p, n \geq 1}} x_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r j_r} \\
& \left[4\pi \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \frac{\binom{m+n}{i}}{2(p+i)+1} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n+i-1} (2j+1)}{\prod_{j=1}^{n+i} (2j)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung dieses Resultats rechne ich den Ausdruck für $r = 3$ und $r = 4$ aus.

Exponent $r = 3$:

$$\begin{aligned}
& \int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^3 d\mathbb{S}^2 \tag{4.30} \\
&= \frac{4\pi}{7} \sum_{i=1}^3 x_{ii}^3 + 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \cdot \frac{1}{2} \sum_{p=2, m=1} x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} x_{i_3 j_3} \\
&\quad + 4\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) \sum_{m=n=p=1} x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} x_{i_3 j_3} \\
&= \frac{4\pi}{7} \sum_{i=1}^3 x_{ii}^3 + \frac{4\pi}{35} \sum_{i \neq j} \underbrace{(x_{ii} x_{jj}^2 + x_{ij}^2 x_{jj} + x_{ij} x_{ji} x_{jj} + \dots)}_{\binom{6}{2} \text{ Summanden}} \\
&\quad + \frac{4\pi}{105} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \underbrace{(x_{ii} x_{jj} x_{kk} + 3 \cdot x_{ij}^2 x_{kk} + 3 \cdot x_{ij} x_{ji} x_{kk} + x_{ij} x_{jk} x_{ki} + \dots)}_{2^3 \text{ Summanden}}.
\end{aligned}$$

Exponent $r = 4$:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^4 d\mathbb{S}^2 \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi}{9} \sum_{i=1}^3 x_{ii}^4 + 4\pi \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{2} \sum_{p=3, n=1} x_{i_1 j_1} \dots x_{i_4 j_4} \\
&\quad + 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{3}{8} \sum_{p=2, n=2} x_{i_1 j_1} \dots x_{i_4 j_4} \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) \sum_{p=2, m=n=1} x_{i_1 j_1} \dots x_{i_4 j_4} \\
&= \frac{4\pi}{9} \sum_i x_{ii}^4 + \frac{4\pi}{63} \sum_{i \neq j} \underbrace{(x_{ii} x_{jj}^3 + x_{ij}^2 x_{jj}^2 + x_{ij} x_{ji} x_{jj}^2 + \dots)}_{\binom{8}{2} \text{ Summanden}} \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{4\pi}{315} \sum_{i \neq j} \underbrace{(x_{ii}^2 x_{jj}^2 + x_{ij}^2 x_{ji}^2 + x_{ii} x_{ji} x_{ij}^2 + x_{ii} x_{jj} x_{ij} x_{ji} + \dots)}_{\binom{8}{4} \text{ Summanden}} \\
&+ \frac{4\pi}{945} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \left(\binom{4}{2} \left(x_{ii} x_{jj} x_{kk}^2 + x_{ij}^2 x_{kk}^2 + x_{ij} x_{ji} x_{kk}^2 + x_{ij}^2 x_{ii} x_{kk} + x_{ij}^2 x_{ik}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + x_{ij}^2 x_{ki}^2 \right) + \underbrace{x_{kk} x_{ik} x_{jk} + \dots}_{3 \cdot 2^3 \text{ Summanden}} \right).
\end{aligned}$$

In (3.16) und (3.21) haben wir gezeigt, wie diese Resultate zur Berechnung der realistischen logarithmischen Energie nach einer Taylorentwicklung Verwendung finden können.

4.2 Tensor-Schreibweise

In der Literatur findet man anstelle der Schreibweise $\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2$ bzw. $\int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j h_k h_l d\mathbb{S}^2$ oft die Ausdrücke: $\int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h d\mathbb{S}^2$ bzw. $\int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h \otimes h \otimes h d\mathbb{S}^2$ [Kan84] sowie [LK93].

„ h “ bezeichnet dabei einen Vektor mit seinen drei Koordinaten h_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, „ $h \otimes h$ “ ist ein Dyadenprodukt und „ $h \otimes h \otimes h \otimes h$ “ ein vierstufiges Tensorprodukt.

Der Vorteil dieser Schreibweise ist, dass sie alle Kombinationen von i und j , bzw. von i, j, k und l in einem Ausdruck zusammenfasst.

In dieser Schreibweise gilt dann [E⁺03]:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{3} I, \quad (4.34)$$

wobei $I = [I]_{ij} = \delta_{ij}$ der Einheitstensor zweiter Ordnung ist, sowie

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h \otimes h \otimes h d\mathbb{S}^2 = \frac{4\pi}{3} (I_{\text{vol}} + \frac{2}{5} I_{\text{dev}}^{\text{sym}}), \quad (4.35)$$

mit den vierstufigen Tensoren:

$I_{\text{vol}} = \frac{1}{3} I \otimes I = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}$ und $I_{\text{dev}}^{\text{sym}} = I^{\text{sym}} - I_{\text{vol}}$,
wobei I^{sym} gegeben ist durch: $I^{\text{sym}} = [I^{\text{sym}}]_{ijkl} := \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h \otimes h \otimes h d\mathbb{S}^2 &= \frac{4\pi}{3} \left(I_{\text{vol}} + \frac{2}{5} (I^{\text{sym}} - I_{\text{vol}}) \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3}{5} I_{\text{vol}} + \frac{2}{5} I^{\text{sym}} \right) = \frac{4\pi}{5} \left(\frac{1}{3} I \otimes I \right) + \frac{8\pi}{15} I^{\text{sym}} \\ &= \frac{4\pi}{5} \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= \frac{4\pi}{15} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{4\pi}{15} (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

In dieser Schreibweise lassen sich die beiden Formeln des Satzes 3.1. so herleiten:

$$\begin{aligned}
\int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle d\mathbb{S}^2 &= \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j d\mathbb{S}^2 = \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h d\mathbb{S}^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} \frac{4\pi}{3} I = \sum_{i,j=1}^3 \frac{4\pi}{3} x_{ij} \delta_{ij} = \frac{4\pi}{3} \operatorname{tr} X,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{h \in \mathbb{S}^2} \langle Xh, h \rangle^2 d\mathbb{S}^2 &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 x_{ij} x_{kl} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h_i h_j h_k h_l d\mathbb{S}^2 \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^3 x_{ij} x_{kl} \int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h \otimes h \otimes h d\mathbb{S}^2 \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^3 x_{ij} x_{kl} \frac{4\pi}{3} (I_{\text{vol}} + \frac{2}{5} I_{\text{dev}}^{\text{sym}}) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \frac{4\pi}{15} x_{ij} x_{kl} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
&= \frac{8\pi}{15} \left(\|\operatorname{sym} X\|^2 + \frac{1}{2} (\operatorname{tr} X)^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.38}$$

wobei wir (4.21) und (4.22) benutzt haben.

Der Ausdruck $\operatorname{dev}(h \otimes h)$ ist definiert durch:

$$\operatorname{dev}(h \otimes h) = h \otimes h - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(h \otimes h) \cdot \mathbb{1}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{h \in \mathbb{S}^2} \operatorname{dev}(h \otimes h) d\mathbb{S}^2 &= \int_{h \in \mathbb{S}^2} h \otimes h - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(h \otimes h) \cdot \mathbb{1} d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{4\pi}{3} I - \frac{1}{3} \int_{h \in \mathbb{S}^2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \cdot \mathbb{1} d\mathbb{S}^2
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi}{3} I - \frac{1}{3} \int_{h \in \mathbb{S}^2} \begin{pmatrix} h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \end{pmatrix} d\mathbb{S}^2 \\
&= \frac{4\pi}{3} I - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{4\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot \frac{4\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4\pi}{3} I - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{4\pi}{3} I = 0.
\end{aligned}$$

4.3 Problematik eines nichtlinearen Beispiels

In (3.11) und (3.12) wird die Approximation zweiten Grades an die Funktion $g(x) = \ln(1+x)$ benutzt um einen expliziten Ausdruck für Verzerrungsenergie über alle Richtungen in dem Modell der realistischen Federn zu erhalten. Es wäre natürlich gut, wenn sich der Ausdruck

$$W(\varphi) \approx \frac{k \cdot l_0^3}{2} \cdot \int_{\tilde{h} \in \tilde{\mathbb{S}}^2} (\ln(\|F\tilde{h}\|))^2 d\mathbb{S}^2$$

ohne Umweg über die Approximation berechnen ließe. Hierbei treten allerdings Probleme auf, die ich an folgendem Beispiel verdeutlichen möchte. Die Aufgabenstellung ist dort eine andere, aber die Problematik dieselbe.

4.3.1 Für $X \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$

Wir betrachten die Verzerrungsenergie aus (3.6).

$$\begin{aligned}
&\int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|Xh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\
&= \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|Xh\|^2 - 2\|Xh\| + 1) d\mathbb{S}^2 \\
&= \int_{h \in \mathbb{S}^2} \left(\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij} h_j \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij} h_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) d\mathbb{S}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{h \in \mathbb{S}^2} \left(\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij} h_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 x_{ik} h_k \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij} h_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 x_{ik} h_k \right) \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) d\mathbb{S}^2 \quad (4.40) \\
&= \int_{h \in \mathbb{S}^2} \left(\sum_{i,j,k=1}^3 (x_{ij} x_{ik} h_j h_k) - 2 \left(\sum_{i,j,k=1}^3 (x_{ij} x_{ik} h_j h_k) \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) d\mathbb{S}^2.
\end{aligned}$$

Wählt man nun für die h_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, die Parametrisierung wie oben, so lassen sich die linearen Terme des Integranden wie gezeigt ohne Probleme integrieren. Dagegen sehe ich keine Möglichkeit, für den Wurzelterm eine Stammfunktion zu finden. Konkret sieht das Integral dafür in der parametrisierten Version so aus:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(K_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + K_2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta + K_3 \cos \varphi \cos \theta \sin \theta + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. K_4 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + K_5 \sin \varphi \cos \theta \sin \theta + K_6 \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right) d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

mit Konstanten K_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, die von den Einträgen der Matrix X abhängen.

Reduziert man die Rechnung zur Veranschaulichung auf den \mathbb{R}^2 , dann erhält man:

$$\begin{aligned}
&\int_{h \in \mathbb{S}^1} (\|Xh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^1 = \int_{h \in \mathbb{S}^1} (\|Xh\|^2 - 2\|Xh\| + 1) d\mathbb{S}^1 \\
&= \int_{h \in \mathbb{S}^1} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 x_{ij} h_j \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 x_{ij} h_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) d\mathbb{S}^1 \quad (4.41) \\
&= \int_{h \in \mathbb{S}^1} \left(\sum_{i,j,k=1}^2 (x_{ij} x_{ik} h_j h_k) - 2 \left(\sum_{i,j,k=1}^2 (x_{ij} x_{ik} h_j h_k) \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) d\mathbb{S}^1.
\end{aligned}$$

Mit der Parametrisierung des Einheitskreises: $\gamma : (0; 2\pi) \rightarrow S^1$, $\varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ und dem Zusammenhang:

$$d\mathbb{S}^1 = \sqrt{\det(D\gamma^T D\gamma)} d\varphi = \sqrt{(-\sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} d\varphi = 1 d\varphi \quad (4.42)$$

erhält man also für den Wurzelterm:

$$\begin{aligned}
& \int_{h \in \mathbb{S}^1} \left(\sum_{i,j,k=1}^2 (x_{ij}x_{ik}h_jh_k) \right)^{\frac{1}{2}} d\mathbb{S}^1 \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^2 (x_{i1}^2 \cos^2 \varphi + x_{i1}x_{i2} \cos \varphi \sin \varphi \right. \\
&\quad \left. + x_{i2}x_{i1} \sin \varphi \cos \varphi + x_{i2}^2 \sin^2 \varphi) \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \cos \varphi \sin \varphi + K_3 \sin^2 \varphi} d\varphi,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

mit den Konstanten:

$K_1 = x_{11}^2 + x_{21}^2$, $K_2 = 2(x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22})$ und $K_3 = x_{12}^2 + x_{22}^2$.
 Gilt nun: $K_1 = K_3$ und $K_2 = 0$, dann lässt sich das Integral einfach berechnen, ansonsten steht man wieder vor dem Problem, eine geeignete Stammfunktion zu finden. Die Bedingung: $K_1 = K_3$ und $K_2 = 0$ ist genau für Matrizen der Art $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig, erfüllt.

Das Ergebnis für den Wurzelterm ist dann: $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

Insgesamt erhält man für diesen Fall:

$$\begin{aligned}
& \int_{h \in \mathbb{S}^1} (\|Xh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^1 \\
&= \int_{h \in \mathbb{S}^1} \left(\sum_{i,j,k=1}^2 (x_{ij}x_{ik}h_jh_k) - 2 \left(\sum_{i,j,k=1}^2 (x_{ij}x_{ik}h_jh_k) \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) d\mathbb{S}^1 \tag{4.44} \\
&= 2\pi(a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2} + 1) = 2\pi(\sqrt{a^2 + b^2} - 1)^2.
\end{aligned}$$

Für $b = 0$ ist dies: $2\pi(|a| - 1)^2$.

4.3.2 Transformation auf Diagonalgestalt

Ist X eine symmetrische Matrix, so lässt sich die Berechnung von $\int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|Xh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^2$ durch folgende Überlegung vereinfachen: Für jede symmetrische Matrix X gilt: $X = Q^T D Q$, mit D ist Diagonal- und Q Orthogonalmatrix. Weiter ist jede symmetrische Matrix selbstadjungiert. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\|Xh\|^2 &= \langle Xh, Xh \rangle = \langle Q^T D Q h, Q^T D Q h \rangle \\
&= \langle D Q h, D Q h \rangle = \|D Q h\|^2
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\Rightarrow \|Xh\| = \|DQh\|.$$

Da Q eine Drehung oder Spiegelung beschreibt, und wir das Integral über die Einheitssphäre betrachten, ändert sich dessen Wert nicht, wenn man Q weglässt. Also gilt:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|Xh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^2 = \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|Dh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^2, \quad (4.46)$$

mit einer Diagonalmatrix D , die aus den Eigenwerten λ_i der Abbildung besteht, die durch X beschrieben wird. Diese Eigenwerte lassen sich durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von X errechnen und sind immer reell falls X symmetrisch ist.

Der problematische Wurzelterm reduziert sich dann auf:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathbb{S}^2} \|Dh\| d\mathbb{S}^2 &= \int_{h \in \mathbb{S}^2} \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 h_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mathbb{S}^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \varphi \cos^4 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \varphi \cos^4 \theta + \lambda_3^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Gilt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, so lässt sich dies weiter vereinfachen:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \lambda^2 h_i^2} d\mathbb{S}^2 = \int_{h \in \mathbb{S}^2} |\lambda| d\mathbb{S}^2 = 4\pi|\lambda|. \quad (4.48)$$

In diesem Fall wäre:

$$\begin{aligned} &\int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|Xh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^2 \\ &= \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\|Dh\|^2 - 2\|Dh\| + 1) d\mathbb{S}^2 \\ &= \int_{h \in \mathbb{S}^2} (\lambda^2 - 2|\lambda| + 1) d\mathbb{S}^2 \\ &= 4\pi(\lambda^2 - 2|\lambda| + 1) = 4\pi(|\lambda| - 1)^2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Im \mathbb{R}^2 ergeben sich für symmetrische Matrizen die entsprechenden Vereinfachungen:

$$\int_{h \in \mathbb{S}^1} \|Xh\| d\mathbb{S}^1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \varphi + \lambda_2^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (4.50)$$

und für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

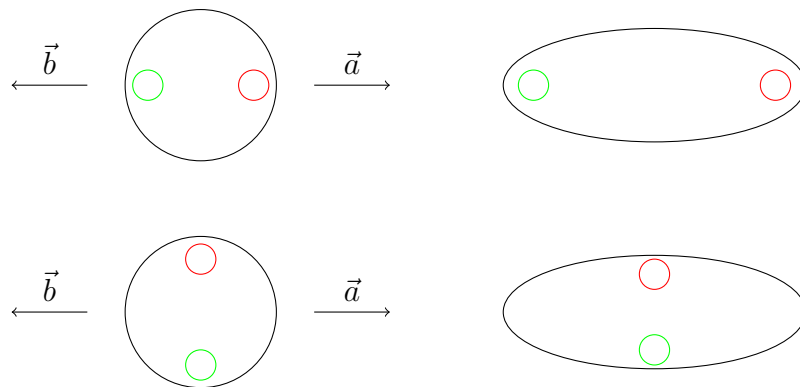
$$\int_{h \in \mathbb{S}^1} (\|Xh\| - 1)^2 d\mathbb{S}^1 = 2\pi(\lambda^2 - 2|\lambda| + 1) = 2\pi(|\lambda| - 1)^2. \quad (4.51)$$

Kapitel 5

Vergleich zur linearen Elastizität isotroper Körper

5.1 Einführung

Isotropie stellt eine lokale Materialeigenschaft dar. Betrachtet man beispielsweise einen kugelförmigen Ausschnitt innerhalb eines festen, homogenen isotropen Körpers, der von außen belastet und dadurch deformiert wird, so wird diese Kugel, unabhängig von ihrer anfänglichen Ausrichtung, immer gleich deformiert.



Oben: Kugel im Ausgangszustand, unten: um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn nach oben gedreht. Die farbigen Kreise sind eingefügt um die unterschiedliche Ausrichtung der Deformation zu zeigen.

Bei anisotropem Material bewirkt dagegen die Materialbeschaffenheit, dass, je nachdem in welcher Richtung der Körper einer Belastung ausgesetzt wird, unterschiedliche Deformationen auftreten. Beispielsweise verursacht bei Holz

die Faserung des Materials eine Richtungsabhängigkeit. Allgemein gilt jedoch auch für anisotropes Material, dass die Effekte der Anisotropie um so weniger ins Gewicht fallen, je größer das betrachtete Volumenelement im Vergleich zur Mikrostruktur des Materials ist.

Bei isotropem Material ist der Zusammenhang zwischen Belastung und Deformation im Rahmen der linearen Approximation schon vollständig durch zwei Materialkonstanten bestimmt (die mathematische Begründung dafür liefert das nächste Kapitel „Isotrope Tensorfunktionen“).

Der Anschaulichkeit halber beschränken wir uns zunächst auf die eindimensionale Betrachtungsweise:

Die Belastung wird durch den Spannungstensor σ dargestellt, der im eindimensionalen Fall einfach eine reelle Zahl ist. Bei Zug ist die Zahl positiv, bei Druck negativ.

Die Deformation wird durch den Dehnungstensor ϵ dargestellt. Im eindimensionalen Fall ist das wieder nur eine reelle Zahl, die bei Dehnung positiv ist und bei Stauchung negativ.

Die erste Materialkonstante ist der Elastizitätsmodul E . Er beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen σ und ϵ :

$$\sigma = E \cdot \epsilon.$$

Für kleine Dehnungen bzw. Stauchungen gibt es näherungsweise einen linearen Zusammenhang zwischen Zugspannung und Dehnung, bzw. zwischen Druckspannung und Stauchung. Insgesamt spielt sich die von uns betrachtete Theorie im Bereich kleiner Deformationen ab. E ist also eine materialabhängige Konstante.

Tatsächlich ändert sich der Elastizitätsmodul auch bei beliebig kleinen Deformationen approximativ gemäß der Formel: $E = E_0 - c \cdot \sigma$, mit einer positiven Konstanten c . Siehe dazu schon [Grü07, S. 844]. Dies deckt sich qualitativ mit dem im ersten Kapitel eingeführten realistischen Federkraftmodell $\sigma(e) = k \ln(1 + e)$. Die relative Auslenkung e der Feder wird nun durch die (eindimensionale) Dehnung ϵ bezeichnet. Damit gilt:

$$\sigma(\epsilon) = k \ln(1 + \epsilon) \approx k\epsilon - \frac{k\epsilon^2}{2} = \left(k - \frac{k\epsilon}{2}\right)\epsilon. \quad (5.1)$$

Im eindimensionalen Fall ist E_0 einfach k . Wegen $\sigma(\epsilon) = E\epsilon$, gilt also:

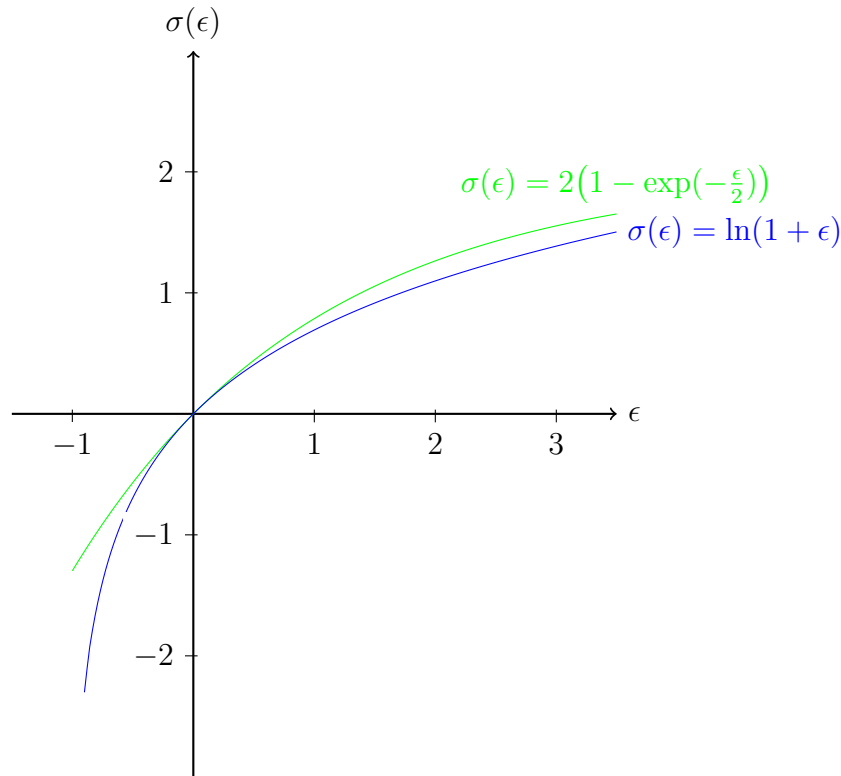
$$E \approx \left(k - \frac{k\epsilon}{2}\right) = E_0 - \frac{E_0 \cdot \epsilon}{2} \approx E_0 - \frac{\sigma}{2}. \quad (5.2)$$

Hier ist c also gleich $\frac{1}{2}$, tatsächlich hängt c aber vom Material ab. Betrachtet man die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\sigma'(\epsilon) = E = E_0 - c \cdot \sigma(\epsilon),$$

so lautet die exakte Lösung dafür:

$$\sigma(\epsilon) = \frac{E_0}{c} (1 - \exp(-c \cdot \epsilon)) . \quad (5.3)$$



*Spannungskurven in Abhängigkeit der Dehnung ϵ .
 $2(1 - \exp(-\frac{\epsilon}{2}))$ ist die exakte Lösung der DGL
 $\sigma'(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sigma(\epsilon)$, [Grü07, S. 844].*

Um die zweite Materialkonstante zu beschreiben, müssen wir jetzt allerdings wieder in den realen dreidimensionalen Raum zurückkehren. Dort stelle man sich nun einen elastischen runden Stab vor mit Länge l und Radius r . Wird der Stab gedehnt, so vergrößert sich die Länge und der Radius verkleinert sich. Wird er gestaucht, verhält es sich umgekehrt.

Die zweite Materialkonstante, die Poisson-Konstante ν , bezeichnet den negativen Proportionalitätsfaktor zwischen Längenänderung und Radiusänderung:

$$\Delta r = -\nu \cdot \Delta l .$$

Anstatt E und ν werden auch oft die sogenannten Lamé'schen Konstanten μ und λ verwendet. Diese sind folgendermaßen definiert [Som54, S. 59 ff.]:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} , \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} .$$

Sowohl σ als auch ϵ werden im realen dreidimensionalen Raum als zweistufige symmetrische Tensoren notiert.

σ_{ii} beschreibt die Zug/Druckspannung in Richtung der i -ten Koordinatenachse. Die Nebendiagonalelemente σ_{ij} , mit $i \neq j$, werden Schubspannungen genannt und erhalten auch oft den Buchstaben τ . Anschaulich ist σ_{ij} die Spannung, die aus der Ebene, deren Normalenvektor die i -te Koordinatenachse ist, heraus, in Richtung der j -ten Koordinatenachse auf das Körperelement einwirkt.

Die Schubspannung σ_{ij} hat als Deformation die Gleitung γ zur Folge. So ist im Dehnungstensor ϵ der Eintrag ϵ_{ij} , mit $i \neq j$, definiert als $\frac{\gamma}{2}$.

Analog zum Spannungstensor, gibt beim Dehnungstensor der erste Index die Koordinatenachse an, die der Normalenvektor zur Betrachtungsebene ist, und der zweite Index die Koordinatenachse, in deren Richtung die Dehnung festgestellt wird.

Den linearen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Dehnungstensor in der infinitesimalen Theorie beschreibt ein 4-stufiger Tensor, der sogenannte Elastizitätstensor \mathbb{C}_{ijkl} :

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}.$$

Sowohl der Spannungs- als auch der Dehnungstensor sind in diesem Ansatz symmetrisch. Man kann sie daher auch jeweils als Vektoren mit sechs Einträgen aufschreiben: $\sigma_{ij} \rightarrow \hat{\sigma}_m = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$, $\epsilon_{ij} \rightarrow \hat{\epsilon}_n$ entsprechend.

Deshalb reicht eine 6×6 -Matrix aus, um den Elastizitätstensor \mathbb{C}_{ijkl} zu beschreiben. Im Falle isotropen Materials hat diese die folgende Form:

$$\hat{\mathbb{C}}_{mn} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Damit gilt also: $\hat{\sigma}_m = \hat{\mathbb{C}}_{mn} \cdot \hat{\epsilon}_n$.

Die Matrix $\hat{\mathbb{C}}_{mn}$ verdeutlicht auch, warum oft anstatt der anschaulichen Materialkonstanten E und ν die Lamé'schen Konstanten μ und λ verwendet werden.

Betrachten wir nun wieder den eindimensionalen linearen Fall: $\sigma = E \cdot \epsilon$, dieses Mal unter dem Aspekt, welche Verzerrungsenergie W der Dehnung ϵ entspricht. Gemäß den Gesetzen der Physik ist Energie das Integral der Kraft

über den Weg. Angewendet auf unsere Fragestellung ergibt sich:

$$W(\epsilon) = \int_0^\epsilon E \cdot s \, ds = E \cdot \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \epsilon. \quad (5.5)$$

Derselbe Zusammenhang gilt bei Zug/Druckspannung auch im dreidimensionalen Fall. So erhält man bei einer einfachen Dehnung entlang einer der Koordinatenachsen:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ii} \cdot \epsilon_{ii}. \quad (5.6)$$

Bei Schubspannung gilt der Zusammenhang bezogen auf die Gleitung γ . Im Fall einer einfachen Schubspannung σ_{ij} erhält man somit:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \gamma_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}. \quad (5.7)$$

In einer heuristischen Betrachtungsweise lässt sich die gesamte Verzerrungsenergie über alle Richtungen als die Summe der Verzerrungsenergien über die verschiedenen Tensorkomponenten auffassen:

$$W(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ii} \cdot \epsilon_{ii} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}. \quad (5.8)$$

Im isotropen Fall lässt sich diese einfach feststellen:

$$W(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ii} \cdot \epsilon_{ii} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (2\mu\epsilon_{ii} + \lambda \sum_{j=1}^3 \epsilon_{jj}) \epsilon_{ii} + \sum_{i \neq j} \mu \epsilon_{ij}^2 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} &= \mu \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \epsilon_{jj} \right)^2 = \mu \|\epsilon\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}(\epsilon))^2 \\ &= \mu \|\text{sym } \epsilon\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}(\text{sym } \epsilon))^2. \end{aligned}$$

5.2 Die Cauchy-Relationen

Cauchy ging in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts davon aus, dass der Elastizitätstensor \mathbb{C}_{ijkl} eine bestimmte Symmetrieeigenschaft besitzt:

$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{ikjl}$ [Cau28]. Man nennt dies die Cauchy'schen Relationen. Es hätte

z.B. zur Folge, dass $\mathbb{C}_{1122} = \mathbb{C}_{1212}$. Im isotropen Fall ist das gleichbedeutend mit $\mu = \lambda$ (siehe 5.4), bzw.:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow \frac{1-2\nu}{2} = \nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{4}. \quad (5.10)$$

Mit anderen Worten: Die Cauchy'schen Relationen implizieren, dass isotrope Stoffe nur **eine** materialabhängige Konstante haben. Es zeigte sich jedoch bald, dass diese Annahmen nur unter sehr eng umrissenen Voraussetzungen Bestand haben, die in der Praxis fast nie erfüllt sind (siehe dazu [B⁺06]). Geht man dennoch von diesen Voraussetzungen aus, und nimmt also an, dass $\mu = \lambda$ gilt und setzt dies in (5.9) ein, so erhält man für W :

$$W(\epsilon) = \mu \|\epsilon\|^2 + \frac{\mu}{2} (\text{tr}(\epsilon))^2. \quad (5.11)$$

Unsere Herleitung der Verzerrungsenergie einer homogen deformierten dreidimensionalen Einheitskugel in (3.9) liefert genau diese, sogenannte „uniconstant-Theorie“, indem wir identifizieren: $\mu = \frac{k\pi}{15}$. Das lässt sich dadurch erklären, dass wir dort auch nur von einer materialabhängigen Konstanten ausgegangen waren, der Federkonstanten k , und Isotropie durch Mittelung über alle Richtungen sichergestellt hatten.

Dem Dehnungstensor ϵ entspricht dort der Lagrange'sche Verzerrungstensor $E := \frac{1}{2}(D\varphi(0)^T D\varphi(0) - \mathbb{1})$:

Schreibt man φ als: $\varphi = \text{id} + u$, dann gilt:

$$\begin{aligned} D\varphi(0)^T D\varphi(0) - \mathbb{1} &= \mathbb{1} + Du(0) + Du(0)^T + Du(0)^T \cdot Du(0) - \mathbb{1} \\ &= 2 \cdot \text{sym} Du(0) + Du(0)^T Du(0) = 2 \cdot \epsilon + Du(0)^T Du(0). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Daher ist ϵ die linearisierte Approximation an $\frac{1}{2}(D\varphi(0)^T D\varphi(0) - \mathbb{1}) = \frac{1}{2}(F^T F - \mathbb{1}) = E$.

Kapitel 6

Isotrope Tensorfunktionen

Eine isotrope Tensorfunktion $G : \mathbb{M}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{M}^{3 \times 3}$ erfüllt folgende Bedingung:

$$G(Q^T X Q) = Q^T G(X) Q \quad \forall X \in \mathbb{M}^{3 \times 3} \quad \forall Q \in \text{SO}(3). \quad (6.1)$$

Nach [Ogd97, S. 194] ist eine auf symmetrischen zweistufigen Tensoren definierte Funktion G genau dann eine isotrope Tensorfunktion, wenn G die Form hat:

$$G(A) = \alpha_0 \cdot \mathbb{1} + \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot A^2, \quad \text{wobei} \quad (6.2)$$

α_0, α_1 und α_2 skalare Funktionen der skalarwertigen Invarianten von A sind.

Für eine skalarwertige Invariante von A gilt folgende Bedingung:

$$I(Q^T A Q) = I(A) \quad \forall Q \in \text{SO}(3). \quad (6.3)$$

Da jede symmetrische Matrix sich zu einer Diagonalmatrix transformieren lässt, darf ψ nur von den Eigenwerten λ_1, λ_2 und λ_3 von A abhängen.

Weiter lässt sich gemäß [Ogd97, S. 191] jede Invariante von A als Funktion der drei Hauptinvarianten I_1, I_2 und I_3 von A beschreiben. Diese sind definiert als:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(A), \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = \text{tr}(\text{Adj} A), \\ I_3 &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det(A). \end{aligned}$$

Das sind gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$:

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = -\lambda^3 + \text{tr}(A) \cdot \lambda^2 - \text{tr}(\text{Adj} A) \cdot \lambda + \det(A) \cdot 1.$$

Die Bedingung (6.3) lässt sich beispielsweise für I_1 folgendermaßen zeigen:

$$\text{tr}(Q^T A Q) = \langle Q^T A Q, \mathbb{1} \rangle = \langle A, Q \mathbb{1} Q^T \rangle = \langle A, \mathbb{1} \rangle = \text{tr}(A). \quad (6.4)$$

Im letzten Kapitel wurde Isotropie dadurch definiert, dass eine Deformation in einem kugelförmigen isotropen Volumenelement unabhängig von dessen Ausrichtung ist. Ob also das Volumenelement zuerst gedreht wird und dann deformiert, oder umgekehrt, spielt in diesem Fall für das Ergebnis keine Rolle. Sei nun $F = D\varphi(0)$ wie auf S. 12 der Deformationsgradient an der Stelle 0, dann lässt sich eine Drehung des Volumenelements mathematisch durch eine Drehung der Orthonormalbasis in Gegenrichtung beschreiben: $F \rightarrow FQ$, mit $Q \in \text{SO}(3)$.

Der Lagrange'sche Verzerrungstensor $E = \frac{1}{2}(F^T F - \mathbb{1})$ geht nach Drehung über in:

$$E(FQ) = \frac{1}{2}(Q^T F^T F Q - \mathbb{1}) = Q^T E(F) Q. \quad (6.5)$$

Wenn die Abbildung $G : E \rightarrow \sigma(E)$ eine isotrope Tensorfunktion ist, dann gilt:

$$\sigma(Q^T E Q) = Q \sigma(E) Q^T.$$

Der Ausdruck $Q \sigma(E) Q^T$ beschreibt, dass das betreffende Volumenelement zuerst deformiert wird (der Spannungstensor σ ergibt sich direkt aus dieser Deformation) und danach gedreht wird. Damit ist die im letzten Kapitel eingeführte Isotropiebedingung genau dann erfüllt, wenn G eine isotrope Tensorfunktion ist und somit auch die in (6.2) beschriebenen Eigenschaften hat. G ist, idealisiert betrachtet,¹ eine lineare Abbildung mit dem konstanten vierstufigen Elastizitätstensor \mathbb{C} als Ableitung.

Daraus folgt in der Darstellungsformel (6.2): $\alpha_2 = 0$, und $\alpha_1 = k_1$ (Konstante).

Von den drei Hauptinvarianten ist I_1 als einzige linear in $\mathbb{M}^{3 \times 3}$. Also gilt: $\alpha_0 = k_2 \cdot I_1(E) = k_2 \cdot \text{tr}(E)$, wobei k_2 eine Konstante ist.

Zusammenfassend lässt sich σ bis auf zwei frei zu wählende Konstanten k_1 und k_2 bestimmen;

$$\sigma(E) = k_1 \cdot E + k_2 \cdot \text{tr}(E) \cdot \mathbb{1}. \quad (6.6)$$

Der Dehnungstensor ϵ ist, wie auf S. 41 erläutert, die lineare Approximation an den Lagrange'schen Verzerrungstensor $E = \frac{1}{2}(F^T F - \mathbb{1})$.

Der Elastizitätstensor \mathbb{C} , der die linearisierte Beziehung zwischen dem Dehnungstensor ϵ und dem Spannungstensor σ beschreibt, ist also bei Isotropie durch zwei Materialkonstanten eindeutig bestimmt.

¹siehe S. 35.

Kapitel 7

Starrkörperdrehungen und infinitesimale rigide Verschiebung

7.1 Starrkörperdrehungen

Logischerweise sind Starrkörperdrehungen (diese haben die Form: $\varphi(x) = Q(x), Q \in SO(3)$) und Translationen ($\varphi(x) = x + b$) genau die Abbildungen, bei denen keine Verzerrungsenergie anfällt. Für unsere Betrachtungen können wir davon ausgehen, dass keine Translation stattfindet. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist der folgende Zusammenhang:

Satz 7.1. Für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, mit $\varphi(0) = 0$ gilt:

$$D\varphi^T D\varphi = \mathbb{1} \iff \varphi \text{ hat die Form: } \varphi(x) = Rx,$$

mit einer konstanten orthogonalen Matrix R .

Zum folgenden Beweis siehe [Cia88, S. 44 ff].

Beweis. “ \Leftarrow ” :

$$\varphi(x) = Rx, \text{ mit: } R \in O^3 \Rightarrow D\varphi = R \Rightarrow D\varphi^T D\varphi = \mathbb{1}$$

“ \Rightarrow ” : Zuerst zeigen wir, dass φ lokal eine Isometrie (längenerhaltende Abbildung) ist, dass es also für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung V um x_0 gibt, in der gilt:

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| = \|y - x\| \quad \forall x, y \in V. \quad (7.1)$$

Die Norm für den \mathbb{R}^3 , die wir hier benutzen ist die euklidische Abstandsnorm. In diesem Fall ist die Matrixnorm einer beliebigen quadratischen Matrix die

Spektralnorm. Diese ist definiert durch:

$$\|A\| := \max_i \{\lambda_i(A^T A)\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.2)$$

Ohne Einschränkung können wir davon ausgehen, dass V konvex ist, dass also für alle x und y aus V auch immer die ganze Verbindungsstrecke in V liegt. Damit, und mit der Voraussetzung $D\varphi^T D\varphi = \mathbf{1}$, gilt nun für alle $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(y) - \varphi(x)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial s}(sy + (1-s)x) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 D\varphi(sy + (1-s)x)(y-x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D\varphi(sy + (1-s)x)\| \|y-x\| ds \\ &\leq \sup_{z \in V} \|D\varphi(z)\| \cdot \|y-x\| \\ &= \sup_{z \in V} \max_i \{\lambda_i(D\varphi(z)^T D\varphi(z))\}^{\frac{1}{2}} \cdot \|y-x\| \\ &= \max_i \{\lambda_i(\mathbf{1})\}^{\frac{1}{2}} \cdot \|y-x\| = \|y-x\|. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Weiter gilt aufgrund $D\varphi^T D\varphi = \mathbf{1}$, dass $D\varphi$ in ganz \mathbb{R}^3 invertierbar ist. Mit dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es also für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung V um x_0 , für die $\varphi|_V : V \rightarrow \varphi(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Sei nun ψ die Umkehrabbildung von $\varphi(V)$ auf V . Ohne Einschränkung können wir wieder davon ausgehen, dass $\varphi(V)$ konvex ist, ansonsten schränken wir ψ auf eine konvexe Menge $W \subset \varphi(V)$ ein. Für die Ableitung von ψ gilt mit dem Satz über die Umkehrabbildung:

$$D\psi(\varphi(x)) = (D\varphi(x))^{-1} \quad \forall x \in V \quad (7.4)$$

Da die Inverse von $D\varphi$ wegen $D\varphi^T D\varphi = \mathbf{1}$ gerade gleich $D\varphi^T$ ist, ist also auch $D\psi(\varphi(x))$ für alle x in V eine orthogonale Matrix. Damit erhält man für alle x und y aus V , bzw. aus $\varphi^{-1}(W)$:

$$\begin{aligned} \|y-x\| &= \|\psi(\varphi(y)) - \psi(\varphi(x))\| \\ &\leq \sup_{z \in V} \|D\psi(\varphi(z))\| \cdot \|\varphi(y) - \varphi(x)\| = \|\varphi(y) - \varphi(x)\| \end{aligned} \quad (7.5)$$

Aus den beiden Ungleichungen (7.3) und (7.5) ergibt sich, dass φ lokal eine Isometrie ist (7.1).

Als nächstes zeigen wir, dass die Matrix $D\varphi$ lokal konstant ist, dass es also

für jedes x_0 eine Umgebung V um x_0 gibt, in der $D\varphi(x)$ unabhängig von x für alle x aus V ist.

Um dies zu zeigen, schreiben wir (7.1) anders auf:

$$F(x, y) := \sum_{k=1}^3 (\varphi_k(y) - \varphi_k(x))^2 - (y_k - x_k)^2 = 0 \quad \forall x, y \in V \quad (7.6)$$

F ist nach y_i differenzierbar:

$$\begin{aligned} G_i(x, y) &:= \frac{\partial F}{\partial y_i}(x, y) \\ &= \sum_{k=1}^3 2(\varphi_k(y) - \varphi_k(x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}(y) - 2(y_k - x_k) \delta_{ik} = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Für alle i ist G_i nach x_j differenzierbar:

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x, y) = \sum_{k=1}^3 -2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) + 2 \delta_{ik} = 0 \quad (7.8)$$

$$\Rightarrow (D\varphi(y))^T D\varphi(x) = \mathbb{1} \quad \forall x, y \in V \quad (7.9)$$

$$\Rightarrow (D\varphi(x_0))^T D\varphi(x) = (D\varphi(x_0))^{-1} D\varphi(x) = \mathbb{1} \quad \forall x \in V \quad (7.10)$$

$$\Rightarrow D\varphi(x) = D\varphi(x_0) \quad \forall x \in V \quad (7.11)$$

Da $D\varphi$ also lokal konstant ist, verschwinden die zweiten Ableitungen von φ in ganz \mathbb{R}^3 . $\varphi(0)$ ist Null nach Voraussetzung und der Raum \mathbb{R}^3 ist zusammenhängend. Daraus folgt, dass φ notwendigerweise die Form hat:

$$\varphi(x) = Qx, \quad Q \in \mathbb{M}^{3 \times 3} \quad (7.12)$$

Q ist also $D\varphi$ und damit eine orthogonale Matrix nach Voraussetzung. \square

Ein alternativer kürzerer Beweis für den Satz beruht auf folgendem Zusammenhang, der erstmals in [NM08] gezeigt wird:

$$\forall R \in C^1(\mathbb{R}^3, \text{SO}(3)) : \quad \|\text{Curl}(R) \cdot R^T\|_{\mathbb{M}^{3 \times 3}}^2 \geq \frac{1}{2} \|DR\|_{\mathbb{R}^{27}}^2, \quad (7.13)$$

hierbei bezeichnet DR die Matrix aller partiellen Ableitungen im Ort von R . Da nach Voraussetzung gilt: $D\varphi^T D\varphi = \mathbb{1}$, ist $D\varphi(x)$ also für alle $x \in \mathbb{R}^3$

eine orthogonale Matrix.

Jede Zeile von $D\varphi(x)$ ist ein Gradienten-Vektor $\nabla\varphi_i(x)$.

Der Curl eines Gradienten-Vektors ist immer Null, da mit dem Satz von Schwarz für alle $j, k \in \{1, 2, 3\}$ gilt: $\partial_j\partial_k\varphi_i(x) - \partial_k\partial_j\varphi_i(x) = 0$.

Wendet man nun zeilenweise den Curl auf $D\varphi(x)$ an, so ist das Ergebnis jeweils Null. Mit der oben zitierten Aussage aus [NM08] und $R = D\varphi$ gilt dann:

$$\|D^2\varphi(x)\|_{\mathbb{R}^{27}}^2 \leq 2\|\text{Curl}(D\varphi(x)) \cdot (D\varphi(x))^T\|_{\mathbb{M}^{3 \times 3}}^2 = 0. \quad (7.14)$$

Da die zweiten Ableitungen von φ verschwinden, hat φ also die Form: $\varphi(x) = Rx + b$, mit einer konstanten orthogonalen Matrix R .

7.2 Infinitesimale rigide Verschiebungen

Wir können φ immer schreiben als $\varphi(x) = x + u(x)$, wobei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Verschiebung (engl. displacement) genannt wird. Wir gehen von einem sehr kleinen Verschiebungsgradienten aus und schreiben dafür $\|Du\| \ll 1$. Dann gilt für den Deformationsgradienten: $D\varphi = \mathbb{1} + Du$ und den Lagrange'schen Verzerrungstensor $E = \frac{1}{2}((D\varphi)^T(D\varphi) - \mathbb{1})$:

$$\begin{aligned} \|E\|^2 &= \frac{1}{4}\|(D\varphi)^T(D\varphi) - \mathbb{1}\|^2 = \frac{1}{4}\|(\mathbb{1} + Du)^T(\mathbb{1} + Du) - \mathbb{1}\|^2 \quad (7.15) \\ &= \frac{1}{4}\|Du^T + Du + Du^T Du\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|Du^T + Du\|^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\langle Du^T + Du, Du^T Du \rangle + \frac{1}{4}\|Du^T Du\|^2}_{\text{Terme höherer Ordnung}} \\ &\approx \left\| \frac{Du^T + Du}{2} \right\|^2. \end{aligned}$$

Daran schließt sich folgender Satz an:

Satz 7.2. (*infinitesimale rigide Verformung*) Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dann gilt:

$$\|Du^T + Du\|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(x) = Wx + b,$$

mit einer konstanten schiefsymmetrischen Matrix $W \in \mathfrak{so}(3)$ und einer konstanten Translation $b \in \mathbb{R}^3$.

Beweis. Zuerst zeige ich:

$$\|Du^T + Du\|^2 = 0 \iff \begin{cases} D_h D_j u_i = 0 & \forall i, j, h \in \{1, 2, 3\} \\ \text{und } Du \in \mathfrak{so}(3) \end{cases} \quad (7.16)$$

Klar ist:

$$\|Du^T + Du\|^2 = 0 \iff Du \in \mathfrak{so}(3). \quad (7.17)$$

Deswegen muss nur noch der folgende Zusammenhang erläutert werden:

$$\|Du^T + Du\|^2 = 0 \implies D_h D_j u_i = 0 \quad \forall i, j, h \in \{1, 2, 3\}. \quad (7.18)$$

Seien $i, h, j \in \{1, 2, 3\}$ beliebig gewählt, dann gilt:

$$D_h D_j u_i = D_h (-D_i u_j) = -D_h D_i u_j. \quad (7.19)$$

Außerdem gilt mit dem Satz von Schwarz:

$$D_i D_j u_h = -D_i D_h u_j = -D_h D_i u_j. \quad (7.20)$$

Aus (7.19) und (7.20) folgt:

$$D_h D_j u_i = D_i D_j u_h. \quad (7.21)$$

Die Reihe lässt sich fortsetzen:

$$\begin{aligned} D_h D_j u_i &= D_i D_j u_h = D_j D_i u_h = -D_j D_h u_i = -D_h D_j u_i \\ &\implies D_h D_j u_i = 0 \quad \forall i, j, h \in \{1, \dots, 3\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Da die zweiten partiellen Ableitungen also alle verschwinden, muss u die Form haben:

$$u(x) = Bx + c, \quad \text{mit } B \in \mathbb{M}^{3 \times 3} \text{ und } c \text{ konstant.} \quad (7.23)$$

Außerdem gilt auch:

$$B \in \mathfrak{so}(3), \text{ da } B = Du \in \mathfrak{so}(3) \quad (7.24)$$

Die Rückrichtung des Satzes ist trivial:

Wenn u die Form hat: $u(x) = Wx + b$, $W \in \mathfrak{so}(3)$, dann ist $Du = W \in \mathfrak{so}(3)$ also gilt auch: $\|Du^T + Du\|^2 = 0$. \square

$u(x) = Wx + b$ ist die **infinitesimale rigide Verschiebung**.

Die Menge der Funktionen $\{\varphi : \varphi(x) = x + Wx, W \in \mathfrak{so}(3)\}$ stellt den Tangentialraum an die Menge der Starrkörperdrehungen in der Stelle der Identität dar.

Kapitel 8

Erste Korn'sche Ungleichung

Die Kapitel 8 und 10 folgen in der Systematik der Beweisführung dem dritten Kapitel von [Val88].

Satz 8.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, dann gilt:*

$$\int_{\Omega} \|Du\|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} \|\text{sym} Du\|^2 dx.$$

Allgemein kann diese Abschätzung nicht für beliebige Matrizen gelten, da sonst jede schiefsymmetrische Matrix die Nullmatrix wäre.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Ungleichung für alle $u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt, da $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ liegt. Im ersten Schritt wird folgende Gleichheit gezeigt:

$$\|\text{sym} Du\|^2 - \|\text{skew} Du\|^2 = \langle Du, Du^T \rangle. \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \|\text{sym} Du\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{4} \left((D_i u_j)^2 + 2 D_i u_j D_j u_i + (D_j u_i)^2 \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \|\text{skew} Du\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{1}{2} (D_i u_j - D_j u_i) \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{4} \left((D_i u_j)^2 - 2 D_i u_j D_j u_i + (D_j u_i)^2 \right) \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\Rightarrow \|\text{sym} Du\|^2 - \|\text{skew} Du\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot D_i u_j D_j u_i = \langle Du, Du^T \rangle.$$

Als nächstes muss gezeigt werden:

$$\langle Du, Du^T \rangle = \text{div} \left((Du)u - (\text{div} u)u \right) + (\text{div} u)^2. \quad (8.4)$$

Klar ist:

$$(\text{div} u)^2 = \left(\sum_{i=1}^n D_i u_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n (D_i u_i)(D_j u_j). \quad (8.5)$$

Weiterhin gilt:

$$\text{div} \left((Du)u - (\text{div} u)u \right) = \sum_{i=1}^n D_i \left(\left(\sum_{j=1}^n D_j u_i \cdot u_j \right) - \left(\sum_{j=1}^n D_j u_j \right) u_i \right) \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left((D_i D_j u_i) u_j + (D_j u_i)(D_i u_j) \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{j=1}^n (D_i D_j u_j) u_i \right) - \left(\sum_{j=1}^n D_j u_j \right) (D_i u_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left((D_i D_j u_i) u_j + (D_j u_i)(D_i u_j) \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{j=1}^n (D_j D_i u_j) u_i \right) - \left(\sum_{j=1}^n D_j u_j \right) (D_i u_i) \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j=1}^n (D_i D_j u_i) u_j - \sum_{i,j=1}^n (D_j D_i u_j) u_i}_{=0} + \sum_{i,j=1}^n (D_j u_i)(D_i u_j) - \sum_{i,j=1}^n (D_j u_j)(D_i u_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad &\text{div} \left((Du)u - (\text{div} u)u \right) + (\text{div} u)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n (D_j u_i)(D_i u_j) = \langle Du, Du^T \rangle. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Nach (8.4) und (8.7) gilt also:

$$\|\text{sym}Du\|^2 - \|\text{skew}Du\|^2 = \text{div}\left((Du)u - (\text{div}u)u\right) + (\text{div}u)^2. \quad (8.8)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \|\text{sym}Du\|^2 - \|\text{skew}Du\|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \text{div}\left((Du)u - (\text{div}u)u\right) + (\text{div}u)^2 \, dx \\ &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left((Du)u - (\text{div}u)u\right) \vec{n} \, dS}_{=0, \text{ da } u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)} + \int_{\Omega} (\text{div}u)^2 \, dx \geq 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \|\text{skew}Du\|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} \|\text{sym}Du\|^2 \, dx. \quad (8.10)$$

Da mit dem Satz von Pythagoras außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \|Du\|^2 &= \|\text{sym}Du + \text{skew}Du\|^2 \\ &= \|\text{sym}Du\|^2 + 2 \underbrace{\langle \text{sym}Du, \text{skew}Du \rangle}_{=0} + \|\text{skew}Du\|^2 \\ &= \|\text{sym}Du\|^2 + \|\text{skew}Du\|^2, \end{aligned} \quad (8.11)$$

folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \forall u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) : \int_{\Omega} \|Du\|^2 \, dx &= \int_{\Omega} \|\text{sym}Du\|^2 + \|\text{skew}Du\|^2 \, dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \|\text{sym}Du\|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Kapitel 9

Ungleichung von Poincaré

Die Beweisführung in diesem Kapitel folgt weitgehend [Eva98, S. 263 ff].

Satz 9.1. (*Ungleichung von Poincaré*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für ein $p \in [1, n)$, dann gilt:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für jedes $q \in [1, \frac{np}{n-p}]$, mit einer Konstanten $C > 0$, die nur von p, n, q und Ω abhängt.

Der Satz wird durch Anwendung der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung bewiesen.

Satz 9.2. (*Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung*)

Sei $p \in (1, n)$, $p^* = \frac{np}{n-p}$, dann gibt eine Konstante $C > 0$, die nur von p und n abhängt, so dass:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Da u kompakten Träger hat, gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_{x_i} u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i. \quad (9.1)$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist unabhängig von i . Daraus folgt:

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (9.2)$$

Nun integrieren wir diese Ungleichung über x_1 :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}},
\end{aligned} \tag{9.3}$$

wobei das Gleichheitszeichen in der zweiten Zeile daraus resultiert, dass im ersten Faktor des Produkt schon einmal über die erste Variable integriert wurde, deswegen hängt dieser Faktor bei der nochmaligen Integration über die erste Variable nicht mehr von dieser ab, und ist somit eine Konstante, die vor das Integral gezogen werden darf. Die Ungleichung in der letzten Zeile ist eine Folge der verallgemeinerten Hölderungleichung: Für $f_j \in L^{n-1}(\mathbb{R})$ ist $\prod_{j=1}^{n-1} f_j \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \prod_{j=1}^{n-1} f_j(x) \right| dx \leq \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_j(x)|^{n-1} dx \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Nun integrieren wir die erhaltene Ungleichung über x_2 und wenden dabei dieselbe Überlegung an, wobei f_1 dieses Mal der Faktor ist, der bei der vorigen Integration als Konstante vor das Integral gezogen wurde, insgesamt erhält man also wieder $n-1$ Faktoren für die verallgemeinerte Hölderungleichung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 & \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\quad \left(\prod_{i=3}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Setzt man dasselbe Prinzip fort für die restlichen Variablen x_3, \dots, x_n erhält man schließlich folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Das ist die Aussage des Satzes für $p = 1$, da dann gilt: $p^* = \frac{np}{n-p} = \frac{n}{n-1}$. Also braucht man nur noch die Ungleichung mit $\frac{n-1}{n}$ zu potenzieren und erhält damit die Aussage mit der Konstanten $C = 1$. Die Integrierbarkeit ist überall gegeben, da u stetig differenzierbar ist und kompakten Träger hat. Um die Ungleichung für $p \in (1, n)$ zu zeigen, wenden wir den Fall $p = 1$ auf $|u|^\gamma$ an mit $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$. Das ergibt:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} D(|u|^\gamma) dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

wobei wir für die letzte Ungleichung die Hölderungleichung mit $\frac{p}{p-1}$ und p angewendet haben. Nun gilt: Damit erhalten wir:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (9.7)$$

mit $C = \gamma$. □

Damit lässt sich nun die Ungleichung von Poincaré beweisen:

Beweis. Jedes $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ lässt sich durch eine Folge $(u_j) \subset C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $W^{1,p}(\Omega)$ -Norm approximieren.

Sei nun \tilde{u}_j die stetige Fortsetzung von u_j auf \mathbb{R}^n mit $\tilde{u}_j \equiv 0$ außerhalb von Ω , dann ist \tilde{u}_j ein Element aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Also gilt mit der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|u_j - u_k\|_{L^{p^*}(\Omega)} &= \|\tilde{u}_j - \tilde{u}_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D\tilde{u}_j - D\tilde{u}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|u_j - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } j, k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Damit ist (u_j) eine Cauchyfolge in $L^{p^*}(\Omega)$ und u_j konvergiert gegen u in $L^{p^*}(\Omega)$. Insgesamt folgt nun:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_j\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \lim_{j \rightarrow \infty} \|D\tilde{u}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad (9.9)$$

mit $C = \gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$.

Für $q \in [1, p^*)$ definieren wir α so, dass $q\alpha = p^* = \frac{np}{n-p}$. Damit ist $\alpha > 1$ gegeben.

Nun definieren wir α' so, dass $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$, also:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{p^*}{q(\frac{p^*}{q}-1)} = \frac{p^*}{p^*-q}.$$

Jetzt wenden wir auf $\|u\|_{L^q(\Omega)}$ die Hölderungleichung mit α und α' an:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{q\alpha} dx \right)^{\frac{1}{q\alpha}} \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{\frac{1}{q\alpha'}}. \quad (9.10)$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \cdot |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \|Du\|_{L^p(\Omega)} . \quad \square \quad (9.11)$$

Kapitel 10

Lax-Milgram in Banachräumen

Der Satz von Lax-Milgram lautet folgendermaßen:

Satz 10.1. *Sei H ein Hilbertraum und $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine bilineare, beschränkte, nicht notwendigerweise symmetrische Abbildung, für die gilt: $a(x, x) \geq c \cdot \|x\|^2$ für alle $x \in H$ mit $c > 0$ (diese Eigenschaft nennt man gleichmäßig positiv), dann existiert eine Abbildung $A \in L(H, H)$ mit: $a(x, y) = \langle x, Ay \rangle_H$ für alle $x, y \in H$.*

In diesem Kapitel wollen wir die Verallgemeinerung dieses Satzes auf Banachräume beweisen.

Satz 10.2. *Sei X normierter, reflexiver, reeller Banachraum und b stetige Bilinearform auf $X \times X$, so dass $|b(x, x)| \geq c\|x\|^2 \quad \forall x \in X$, mit $c > 0$. Dann gilt:*

*$\forall x' \in X'$ gibt es zwei eindeutig bestimmte $x_1, x_2 \in X$,
so dass $x'(x) = b(x_1, x) = b(x, x_2)$.*

(X' ist der Dualraum von X , also alle linear beschränkten Abbildungen von X nach \mathbb{R} .)

Im Vergleich zum Satz von Lax-Milgram ist das eine Verallgemeinerung von beschränkten Bilinearformen über reellen Hilberträumen auf stetige Bilinearformen über reellen Banachräumen. Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Hilfsmittel.

Definition 10.3. *Seien X, Y Banachräume, sowie $f \in L(X, Y)$, dann ist die Adjungierte von f , f^T gegeben durch:*

$$f^T : Y' \longrightarrow X', \quad y' \longmapsto y' \circ f.$$

Wie man leicht erkennen kann ist f^T linear und beschränkt:

$$\begin{aligned} f^T(\alpha \cdot g + \beta \cdot h) &= (\alpha \cdot g + \beta \cdot h) \circ f = \alpha \cdot g \circ f + \beta \cdot h \circ f = \alpha \cdot f^T(g) + \beta \cdot f^T(h), \\ f^T(g) &= g \circ f \leq \|g\|_{Y'} \|f\|_{L(X, Y)}. \end{aligned}$$

Bemerkung 10.4. Seien f und f^T wie oben, dann gilt:

$$f(X) \text{ ist dicht in } Y \iff f^T \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. „ \Rightarrow “:

$$\text{Ker } f^T = \{y' \in Y' : y' \circ f = 0 \in X'\} \quad (10.1)$$

Sei $y' \in Y'$, so dass $y' \circ f = 0 \in X'$

$$\Rightarrow y' \text{ verschwindet auf einer in } Y \text{ dichten Teilmenge von } Y, \quad (10.2)$$

da $f(X)$ dicht in Y ist.

$$\text{Mit der Stetigkeit von } y' \text{ folgt, dass } y' \text{ in ganz } Y \text{ verschwindet.} \quad (10.3)$$

Also gilt $y' = 0$ und damit: $\text{Ker } f^T = 0$.

$$\text{Daraus folgt, dass } f^T \text{ injektiv ist.} \quad (10.4)$$

„ \Leftarrow “:

$$\begin{aligned} &f^T \text{ ist injektiv} \\ \Rightarrow &\text{nur die Nullabbildung in } Y' \text{ bewirkt, dass } y' \circ f = 0 \in X'. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Annahme: $f(X)$ ist nicht dicht in Y .

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\exists y \in Y, r > 0, \text{ so dass } U_r(y) \cap f(X) = \emptyset \\ \Rightarrow &\inf_{m \in f(X)} d(m, y) \geq r. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Da $f(X)$ ein linearer Unterraum von Y ist, ergibt sich daraus mit einer Folgerung des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach [Wer00, S. 98]:

$$\begin{aligned} \exists g \in Y' : &g = 0 \text{ auf } f(X) \text{ und } g(y) \neq 0 \\ \Rightarrow &g \in Y' \text{ und } g \neq 0, \text{ aber } g \circ f = 0 \in X' \\ \Rightarrow &0 \neq g \in \text{Ker } f^T \Rightarrow f^T \text{ ist nicht injektiv.} \end{aligned} \quad (10.7)$$

Bemerkung 10.5. Seien f und f^T wie oben, dann gilt:

$$f \in L(X, Y) \text{ ist stetig invertierbar} \Rightarrow f^T : Y' \rightarrow X' \text{ ist stetig invertierbar.}$$

Beweis. Da X' und Y' aufgrund der Vollständigkeit von \mathbb{R} Banachräume sind, bleibt mit dem Satz von Banach zu zeigen, dass f^T bijektiv ist: f ist stetig invertierbar, also insbesondere auch surjektiv. Daraus folgt mit Bemerkung 10.4, dass f^T injektiv ist.

Sei nun $x' \in X'$ beliebig und $y' := x' \circ f^{-1}$. Dann ist $y' \in Y'$ und $f^T(y') = y' \circ f = x' \circ f^{-1} \circ f = x'$. Also ist f^T auch surjektiv.

Bemerkung 10.6. Seien X, Y normierte, reelle Banachräume und b eine stetige Bilinearform auf $X \times Y$, dann gilt:

$$\exists c > 0 \text{ mit } |b(x, y)| \leq c \|x\| \|y\| \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Beweis. $b(\cdot, y)$ ist eine stetige Linearform auf X für alle $y \in Y$, und $b(x, \cdot)$ eine stetige Linearform auf Y für alle $x \in X$:

$$\Rightarrow \forall x \in X \exists c > 0 \text{ mit } |b(x, y)| \leq c \|y\| \quad \forall y \in Y \quad (10.8)$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \exists c > 0 \text{ mit } |b(x, y)| \leq c < \infty \quad \forall y \in Y \text{ mit } \|y\| = 1$$

Daraus folgt mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit [Wer00, S. 141]:

$$\|b(\cdot, y)\|_{X'} \leq k < \infty \quad \forall y \in Y \text{ mit } \|y\| = 1 \quad (10.9)$$

$$\Rightarrow \forall y \in Y, \forall x \in X : |b(x, y)| = \|y\| |b(x, \frac{y}{\|y\|})| \leq \|y\| k \|x\|. \quad (10.10)$$

Im wesentlichen wird die obige Erweiterung des Satzes von Lax-Milgram auf stetige Bilinearformen über Banachräumen durch den folgenden Satz bewiesen:

Satz 10.7. Seien X, Y normierte, reflexive, reelle Banachräume und b eine stetige Bilinearform auf $X \times Y$, dann sind äquivalent:

$$\begin{aligned} i) \quad \exists c > 0 : \quad & \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X} \geq c \|y\|_Y \quad \forall y \in Y \\ & \sup_{0 \neq y \in Y} \frac{|b(x, y)|}{\|y\|_Y} \geq c \|x\|_X \quad \forall x \in X \\ ii) \quad \forall y' \in Y' \quad & \exists! x \in X, \text{ so dass } y'(y) = b(x, y) \quad \forall y \in Y \\ iii) \quad \forall x' \in X' \quad & \exists! y \in Y, \text{ so dass } x'(x) = b(x, y) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Beweis. Vorüberlegungen zum Beweis von Satz 10.7:

Die auf $X \times Y$ stetige Bilinearform b kann man auch als stetige Linearform auf X mit festem y , bzw. auf Y mit festem x betrachten. Deren Normen sind durch die beiden Suprema aus Satz 10.7.i, gegeben:

$$\sup_{0 \neq x \in X} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X} = \|b(\cdot, y)\|_{X'} \quad \text{und} \quad \sup_{0 \neq y \in Y} \frac{|b(x, y)|}{\|y\|_Y} = \|b(x, \cdot)\|_{Y'}. \quad (10.11)$$

Sei nun \tilde{y} die biduale Abbildung: $Y' \rightarrow K$, $y' \mapsto y'(y)$.

Bekannterweise gilt für die Y'' -Norm von \tilde{y} : $\|\tilde{y}\|_{Y''} = \|y\|$.

Da Y reflexiv ist, ist die Abbildung: $y \mapsto \tilde{y}$ eine surjektive, lineare Isometrie von Y nach Y'' .

Sei schließlich für alle $x \in X$ $f_{(x)}(\cdot) := b(x, \cdot) \in Y'$,

und $f : X \rightarrow Y'$, $x \mapsto f_{(x)}(\cdot) = b(x, \cdot)$.

$$\Rightarrow \exists c > 0 \text{ mit } \|f(x)\|_{Y'} = \|b(x, \cdot)\|_{Y'} \leq c\|x\| \text{ wegen Bemerkung 10.6} \quad (10.12)$$

$$\Rightarrow f \in L(X, Y')$$

Gemäß Definition 10.3 ist die Adjungierte $f^T : Y'' \rightarrow X'$, $\tilde{y} \mapsto \tilde{y} \circ f$ also wohldefiniert. Das Bild von \tilde{y} unter f^T ist eine Abbildung, die an x folgende Verkettung von Abbildungen vornimmt:

$$x \rightarrow f_{(x)}(\cdot) = b(x, \cdot) \in Y' \rightarrow \tilde{y} \circ b(x, \cdot) = b(x, \cdot)(y) = b(x, y) = f_{(x)}(y) \quad (10.13)$$

$$\text{oder kurz: } f^T(\tilde{y}) = f_{(\cdot)}(y) = b(\cdot, y)$$

$$\Rightarrow \|f^T(\tilde{y})\|_{X'} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|f^T(\tilde{y})(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X}. \quad (10.14)$$

Damit lässt sich die erste Ungleichung in Satz 10.7.i auch so schreiben:

$$\exists c > 0 : \|f^T(\tilde{y})\|_{X'} \geq c\|y\|_Y = c\|\tilde{y}\|_{Y''} \quad \forall y \in Y. \quad (10.15)$$

Da $f_{(x)}(\cdot) = b(x, \cdot)$, lässt sich die zweite Ungleichung in Satz 10.7.i ebenfalls anders schreiben:

$$\exists c > 0 : \|f_{(x)}(\cdot)\|_{Y'} \geq c\|x\|_X \quad \forall x \in X. \quad (10.16)$$

Mit all diesen Hilfsmitteln lässt sich nun der Satz bequem beweisen.

Beweis von Satz 10.7:

Wir beweisen zunächst die Äquivalenz von *ii* und *iii*, danach, dass aus *ii* zusammen mit *iii* auch *i* folgt, und zuletzt die Richtung: $i \Rightarrow ii$.

$$\begin{aligned} ii \Rightarrow f : X \rightarrow Y', \quad x \mapsto f_{(x)}(\cdot) &= b(x, \cdot) \text{ ist bijektiv} \\ \Rightarrow f \text{ ist stetig invertierbar} &\quad (\text{Satz von Banach}). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Daraus folgt mit Bemerkung 10.5, dass auch f^T stetig invertierbar ist, also insbesondere auch bijektiv.

Also gibt es für jedes Element $x' \in X'$ genau ein Element $\tilde{y} \in Y''$ und somit, aufgrund der Reflexivität von Y , genau ein Element $y \in Y$ mit der Eigenschaft $f^T(\tilde{y}) = x'$

$f^T(\tilde{y})$ ist aber $b(\cdot, y) \Rightarrow iii$

$$\begin{aligned} iii \Rightarrow f^T : Y'' \rightarrow X', \quad \tilde{y} \mapsto b(\cdot, y) &\text{ ist bijektiv} \\ \Rightarrow f^T \text{ ist stetig invertierbar} &. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Also folgt wieder mit Bemerkung 10.5, dass auch $f : X \rightarrow Y'$ als Adjungierte von f^T stetig invertierbar und insbesondere bijektiv ist.

$$\begin{aligned} \text{Für jedes } y' \in Y' \text{ gibt es also genau ein } x \in X \text{ mit} \\ y' = f(x) = f_{(x)}(\cdot) = b(x, \cdot) &\Rightarrow ii. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Damit ist $ii \Leftrightarrow iii$ bewiesen.

$$\begin{aligned} ii \Rightarrow f : \quad x \mapsto f_{(x)}(\cdot) &= b(x, \cdot) \text{ ist injektiv} \\ \Rightarrow \|f_{(x)}(\cdot)\|_{Y'} &\geq c\|x\|_X \quad \forall x \in X \quad \text{mit } c > 0. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Dies ist die umgeschriebene zweite Ungleichung aus Satz 10.7.i.

$$\begin{aligned} iii \Rightarrow f^T : \quad \tilde{y} \mapsto \tilde{y} \circ f &= f_{(\cdot)}(y) = b(\cdot, y) \text{ ist injektiv} \\ \Rightarrow \|f_{(\cdot)}(y)\|_{X'} &\geq c\|\tilde{y}\|_{Y''} \quad \forall \tilde{y} \in Y'' \quad \text{mit } c > 0 \\ \Rightarrow \|f_{(\cdot)}(y)\|_{X'} &\geq c\|y\|_Y \quad \forall y \in Y \quad \text{mit } c > 0. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Dies ist die umgeschriebene erste Ungleichung aus Satz 10.7.i.

Damit ist bewiesen, dass aus *ii* zusammen mit *iii* auch *i* folgt.

$$\begin{aligned} i \Rightarrow \exists c > 0 : \|f_{(x)}(\cdot)\|_{Y'} &\geq c\|x\|_X \quad \forall x \in X \\ \Rightarrow f : X \rightarrow Y', \quad x \mapsto b(x, \cdot) &\text{ ist injektiv} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Außerdem ist $f(X)$ abgeschlossen in Y' wegen:

$$\exists c > 0 : \|f_{(x)}(\cdot)\|_{Y'} \geq c\|x\|_X \quad \forall x \in X \quad \text{und} \quad X \text{ ist abgeschlossen} \quad (10.23)$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} i &\Rightarrow \exists c > 0 : \|f^T(\tilde{y})\|_{X'} \geq c\|y\|_Y = c\|\tilde{y}\|_{Y''} \quad \forall y \in Y \\ &\Rightarrow f^T \text{ ist injektiv.} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Daraus folgt mit Bemerkung 10.4, dass $f(X)$ dicht in Y' ist. Zusammen mit der Abgeschlossenheit von $f(X)$ ergibt sich: $f(X) = Y' \Rightarrow f$ ist surjektiv.

$$\Rightarrow \forall y' \in Y' \exists! x \in X, \text{ so dass } y' = f(x) = f_{(x)}(\cdot) = b(x, \cdot) \quad \forall y \in Y \quad (10.25)$$

$$\Rightarrow ii \quad \square$$

Der Satz zur Erweiterung des Satzes von Lax-Milgram auf stetige Bilinearformen über Banachräumen ist nun nichts anderes als der eben bewiesene Satz in dem speziellen Fall, dass X und Y derselbe Banachraum sind.

Für den Fall, dass X der \mathbb{R}^n ist, lässt sich Satz 10.2 einfacher beweisen: Für jedes $x' \in X'$ existiert nach dem Riesz'schen Darstellungssatz genau ein $y \in \mathbb{R}^n$, so dass:

$$x'(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (10.26)$$

Gemäß den Gesetzen der linearen Algebra existiert für jede bilineare, stetige und gleichmäßig positive Abbildung $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine invertierbare Matrix M , so dass:

$$b(x, y) = \langle x, My \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (10.27)$$

(Daraus, dass b gleichmäßig positiv ist, folgt, dass der Kern der Abbildung $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a(x) = Mx$, nur die Null $\in \mathbb{R}^n$ ist. Das ergibt die Invertierbarkeit von M .)

Für das y aus (10.26) gibt es also genau ein $z \in \mathbb{R}^n$, so dass: $y = Mz$. Damit gilt nun:

$$x'(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, Mz \rangle = b(x, z) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (10.28)$$

Für die zweite Gleichung stellen wir zunächst fest, dass mit M auch M^T invertierbar ist. Nun gilt wieder:

$$\exists! y : x'(x) = \langle y, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (10.29)$$

$$\exists! z : y = M^T z \quad \Rightarrow$$

$$x'(x) = \langle y, x \rangle = \langle M^T z, x \rangle = \text{siehe (3.5)} \langle z, Mx \rangle = b(z, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Legt man in Satz 10.7 X auf den \mathbb{R}^n fest und Y auf den \mathbb{R}^m , so stellt man fest, dass für $m \neq n$ nicht beide Ungleichungen in *ii* zusammen erfüllt sein können: Die Bilinearform b hätte dann die folgende Form:

$$b(x, y) = \langle x, By \rangle_{\mathbb{R}^n}, \text{ mit } B \in \mathbb{M}^{n \times m}.$$

Der Kern der Abbildung: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto By$ hätte beispielsweise für $m > n$ mindestens die Dimension Eins. Also kann die erste Ungleichung in Satz 10.7.i:

$$\exists c > 0 : \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = \|\langle \cdot, By \rangle\|_{\mathbb{R}^n} \geq c \|y\|_{\mathbb{R}^m} \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (10.30)$$

nicht erfüllt sein, da für ein $y \neq 0$, für das $By = 0$ ist, gilt:

$$\|\langle \cdot, By \rangle\|_{\mathbb{R}^n} = 0 < \|y\|_{\mathbb{R}^m}. \quad (10.31)$$

Analog dazu kann für $n > m$ die zweite Ungleichung nicht erfüllt sein. Für $n = m$ verläuft der Beweis wie oben über den Riesz'schen Darstellungssatz.

Kapitel 11

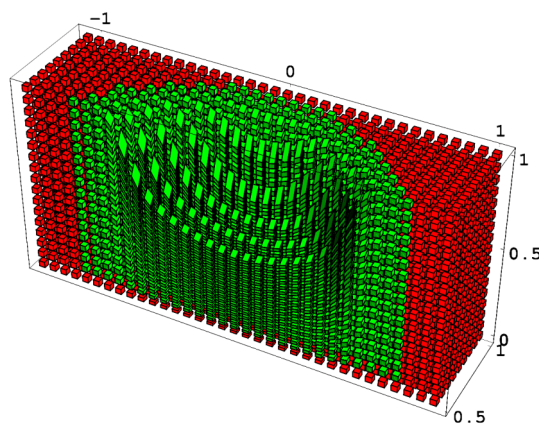
Minimierung der Energie in einem beschränkten Gebiet - Euler-Lagrange Gleichungen

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass die Verzerrungsenergie einer homogen deformierten Kugel mit Radius l_0 sich in einem einfachen Modell durch

$$\hat{K} \cdot l_0^3 \left(\|(D\varphi(0))^T D\varphi(0) - \mathbf{1}\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr} \left((D\varphi(0))^T D\varphi(0) - \mathbf{1} \right) \right)^2 \right)$$

approximieren lässt.

Wir denken uns nun ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aufgeteilt in infinitesimale Würfel, welche alle homogen mit den dort lokal vorliegenden Deformationsgradienten deformiert werden.



*Ω ist der grüne Bereich.
Die infinitesimalen Würfel werden homogen verformt.*

Die Energiedichte in einem infinitesimal verkleinerten Würfel ist gleich der Energiedichte in einer Kugel an der Stelle des Würfels. Die Energie in dem Würfel ist also gleich der Energie in der Kugel, multipliziert mit der relativen Volumenänderung $\frac{\text{Vol}_{Wue}}{\text{Vol}_{Kug}}$.

Die Gesamtenergie in Ω ist die Summe der Energien über alle Würfel, also die Summe der Energien über alle Kugeln, multipliziert mit $\frac{\text{Vol}_{Wue}}{\text{Vol}_{Kug}}$ (der Mittelpunkt jeder Kugel ist der Mittelpunkt des betreffenden Würfels und ihr Radius die halbe Kantenlänge des Würfels). Beim Übergang von der Summe zum Integral muss dann wieder durch das Volumen eines Würfels geteilt werden. Daraus ergibt sich der Faktor $\frac{1}{\text{Vol}_{Kug}}$. Das Volumen einer Kugel mit Radius l_0 ist $\frac{4\pi}{3} \cdot l_0^3$.

Daher ergibt sich die Gesamtenergie in Ω durch das Integral

$$\int_{\Omega} \underbrace{\frac{3\hat{K}}{4\pi}}_{=K} \left(\|(D\varphi(x))^T D\varphi(x) - \mathbb{1}\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr} \left((D\varphi(x))^T D\varphi(x) - \mathbb{1} \right) \right)^2 \right) dx. \quad (11.1)$$

11.1 Euler-Lagrange Gleichungen

Sei nun, wie in Kapitel 5, $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ die Verschiebung aus der Ruhelage, also $\varphi(x) = x + u(x)$, mit $\|Du\| \ll 1$, dann gilt gemäß (7.15):

$$(D\varphi(x))^T D\varphi(x) - \mathbb{1} \approx 2 \cdot \text{sym} Du(x).$$

Die Gesamtenergie in Ω ist also näherungsweise:

$$\begin{aligned} & K \int_{\Omega} \|2 \cdot \text{sym} Du(x)\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(2 \cdot \text{sym} Du(x)) \right)^2 dx \\ &= 4K \int_{\Omega} \|\text{sym} Du(x)\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(Du(x)) \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (11.2)$$

da für jede quadratische Matrix X gilt: $\text{tr}(\text{sym} X) = \text{tr}(X)$.

Ist nun u am Rand von Ω durch eine Funktion g gegeben, für die gilt: $g = u_{\partial\Omega}$, so lässt sich fragen, welches u die gesamte Verzerrungsenergie in Ω minimieren würde. Bezeichnet I die Verzerrungsenergie in Ω in Abhängigkeit von der Funktion u , und ist weiter $Q(\delta) = I(u + \delta v)$, so minimiert ein u die Verzerrungsenergie in Ω bei gegebener Randbedingung ($u = g$ auf $\partial\Omega$) genau dann, wenn $Q'(0) = 0$ für alle Testfunktionen $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Daher betrachten

wir

$$\begin{aligned}
I(u + \delta v) &= 4K \int_{\Omega} \|\text{sym} D(u + \delta v)\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(D(u + \delta v)) \right)^2 dx \\
&= 4K \int_{\Omega} \|\text{sym} Du\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(Du) \right)^2 dx \\
&\quad + 8K\delta \int_{\Omega} \langle \text{sym} Du, \text{sym} Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \text{tr}(Dv) dx \\
&\quad + 4K\delta^2 \int_{\Omega} \|\text{sym} Dv\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(Dv) \right)^2 dx.
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Der zweite Summand ist linear in δ , und wegen

$$I(u + \delta \cdot v) = Q(\delta) = Q(0) + \delta \cdot Q'(0) + \frac{1}{2} \delta^2 \dots \quad \text{ist}$$

$$\begin{aligned}
Q'(0) &= 8K \int_{\Omega} \langle \text{sym} Du, \text{sym} Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \text{tr}(Dv) dx \\
&= 8K \int_{\Omega} \langle \text{sym} Du, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \text{tr}(Dv) dx, \quad \text{wegen:}
\end{aligned} \tag{11.4}$$

$$\begin{aligned}
\langle \text{sym} X, \text{sym} Y \rangle &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right) \left(\frac{y_{ij} + y_{ji}}{2} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right) \left(\frac{y_{ij}}{2} \right) + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right) \left(\frac{y_{ji}}{2} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ji} + x_{ij}}{2} \right) \left(\frac{y_{ij}}{2} \right) + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right) \left(\frac{y_{ji}}{2} \right) \tag{11.5} \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right) \left(\frac{y_{ji}}{2} \right) + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right) \left(\frac{y_{ji}}{2} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{x_{ij} + x_{ji}}{2} \right) y_{ji} = \langle \text{sym} X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

Es existiert also genau dann ein u , das die Verzerrungsenergie in Ω minimiert, wenn es ein u gibt, das folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{\Omega} \langle \text{sym} Du, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \text{tr}(Dv) dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3). \tag{11.6}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
& 8K \int_{\Omega} \langle \text{sym} Du, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \text{tr}(Dv) \, dx \\
&= 8K \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial_i u_j + \partial_j u_i}{2} \right) \partial_i v_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \partial_i u_i \cdot \partial_j v_j \, dx \\
&= 8K \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial_i^2 u_j + \partial_i \partial_j u_i}{2} \right) v_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j u_i \cdot v_j \, dx \\
&= 8K \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \partial_i \left(\frac{\partial_i u_j + \partial_j u_i}{2} \right) \right) v_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \partial_j \left(\sum_{i=1}^3 \partial_i u_i \right) v_j \, dx \\
&= 8K \int_{\Omega} \langle \text{Div}(\text{sym} Du), v \rangle + \frac{1}{2} \langle D \text{tr}(Du), v \rangle \, dx \\
&= 8K \int_{\Omega} \langle \text{Div} \left(\text{sym} Du + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \cdot \mathbf{1} \right), v \rangle \, dx.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Minimiert ein $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ die Verzerrungsenergie in Ω , dann gilt also für alle Testfunktionen $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$:

$$0 = Q'(0) = \int_{\Omega} \langle \text{Div} \left(\text{sym} Du + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \cdot \mathbf{1} \right), v \rangle \, dx \tag{11.8}$$

Dies ist die schwache Form eines linearen partiellen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung für die gesuchte Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Die starke Form folgt daraus und lautet:

$$\text{Div} \left(\text{sym} Du + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \cdot \mathbf{1} \right) = 0. \tag{11.9}$$

Oder, anders geschrieben:

$$\text{Div} \left(\text{sym} Du + \frac{1}{2} (\text{div} u) \cdot \mathbf{1} \right) = 0.$$

Ausgeschrieben sind das drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
& \partial_1(2\partial_1 u_1 + \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + \partial_2(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + \partial_3(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) = 0 \\
& \partial_1(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + \partial_2(2\partial_2 u_2 + \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + \partial_3(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) = 0 \\
& \partial_1(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) + \partial_2(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) + \partial_3(2\partial_3 u_3 + \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0
\end{aligned}$$

11.2 Existenz und Eindeutigkeit

Die Lösbarkeit der schwachen Form in (11.6) und die Eindeutigkeit dieser Lösung werden im Folgenden durch den Satz von Lax-Milgram in Banachräumen gezeigt. Sei nun dazu $u(x) = g(x) + \tilde{u}(x)$, wobei g auf $\partial\Omega$ gleich u ist und im Inneren von Ω beliebig fortgesetzt wird. Dann gilt für die minimierende Funktion $u = g + \tilde{u}$, und für jede Testfunktion v nach (11.6):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle \text{sym} D(g + \tilde{u}), Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(D(g + \tilde{u})) \text{tr}(Dv) \, dx = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} \langle \text{sym} D\tilde{u}, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(D\tilde{u}) \text{tr}(Dv) \, dx \\ & = - \int_{\Omega} \langle \text{sym} Dg, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Dg) \text{tr}(Dv) \, dx. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Jedes v im Banachraum $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ lässt sich bezüglich der $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ -Norm durch ein $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ beliebig genau approximieren. Da die Funktion g vorgegeben ist, ist die Abbildung $f : W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$v \mapsto - \int_{\Omega} \langle \text{sym} Dg, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Dg) \text{tr}(Dv) \, dx \quad (11.11)$$

ein Element aus dem Dualraum von $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Genauso gilt, dass die Abbildung a :

$$a(\tilde{u}, v) := \int_{\Omega} \langle \text{sym} D\tilde{u}, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(D\tilde{u}) \text{tr}(Dv) \, dx \quad (11.12)$$

eine bilineare Abbildung in $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ist.

Unter der Bedingung, dass $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ reflexiv ist und es ein $c > 0$ gibt, für das gilt: $a(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq c \|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \quad \forall \tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, lässt sich der Satz von Lax-Milgram für Banachräume anwenden:

Es gibt dann genau ein $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, so dass $a(\tilde{u}, v) = f(v) \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Wegen $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \subset W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ stimmt das dann auch für alle $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Für dieses \tilde{u} gilt: $u = g + \tilde{u}$ minimiert die Verzerrungsenergie in Ω .

Um die Bedingung $a(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq c \|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \quad \forall \tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ zu prüfen, nähern wir ein beliebiges $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ bezüglich der $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ -Norm durch ein

$v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ an. Für dieses v gilt:

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \|\text{sym} Dv\|^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(Dv) \right)^2 \, dx. \quad (11.13)$$

Mit der ersten Korn'schen Ungleichung (Kapitel 8) lässt sich dieser Ausdruck nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\text{sym} Dv\|^2 + \frac{1}{2} (\text{tr}(Dv))^2 dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|Dv\|^2 + (\text{tr}(Dv))^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \|Dv\|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \|Dv\|^2 + 2(\text{tr}(Dv))^2 dx. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Mit der Ungleichung von Poincaré (Kapitel 9) lässt sich das weiter nach unten abschätzen:

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} \|Dv\|^2 dx \geq \frac{1}{4K} \int_{\Omega} \|v\|^2 dx \quad \text{mit einem } K > 0. \quad (11.15)$$

Also gilt:

$$a(v, v) \geq \min\left\{\frac{1}{4K}, \frac{1}{4}\right\} \int_{\Omega} \|v\|^2 + \|Dv\|^2 dx = \min\left\{\frac{1}{4K}, \frac{1}{4}\right\} \|v\|_{1,2}^2. \quad (11.16)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ reflexiv ist.

Der Raum $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ besitzt ein Skalarprodukt:

$$(u, v) := \int_{\Omega} \langle u, v \rangle + \langle Du, Dv \rangle dx. \quad (11.17)$$

b ist bilinear und induziert die $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ -Norm: $b(u, u) = \|u\|_{1,2}^2$.

Damit ist $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ein Hilbertraum und als solcher reflexiv.

Da nun die bilineare Abbildung a und der Sobolevraum $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ die Anforderungen erfüllen, lässt sich der Satz von Lax-Milgram für Banachräume auf die Abbildungen a und f anwenden: Demnach gibt es genau ein $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, so dass $a(\tilde{u}, v) = f(v) \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Eingesetzt in die Funktionsvorschriften ergibt dies:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \langle \text{sym} D\tilde{u}, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(D\tilde{u}) \text{tr}(Dv) dx \\ &= - \int_{\Omega} \langle \text{sym} Dg, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Dg) \text{tr}(Dv) dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Dieses \tilde{u} löst also eindeutig:

$$\int_{\Omega} \langle \text{sym} Du, Dv \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}(Du) \text{tr}(Dv) dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (11.19)$$

Das bedeutet, es existiert genau eine Funktion $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, die die Verzerrungsenergie in Ω minimiert. Wenn \tilde{u} und g zweimal differenzierbar sind löst $u = \tilde{u} + g$ auch eindeutig das lineare partielle Differentialgleichungssystem 2. Ordnung (11.9).

Anhang A

Definition der schwachen Ableitung

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u, v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k < \infty$, dann heißt v_α die α -te schwache Ableitung von u , wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\int_{\Omega} v_\alpha \cdot \varphi \, dx = (-1)^k \int_{\Omega} u \cdot D^{(\alpha)} \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Die schwache Ableitung ist, sofern sie existiert, für jedes α eindeutig.

Wenn die klassische partielle Ableitung $D^{(\alpha)}u$ auf Ω existiert und stetig ist, dann ist die schwache Ableitung v_α identisch mit $D^{(\alpha)}u$.

Oft wird für die schwache Ableitung v_α auch einfach die Schreibweise $D^{(\alpha)}u$ verwendet.

Anhang B

Integrierbarkeit einer reellwertigen Funktion über eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3

Die beiden Anhänge folgen in der Systematik der Beweisführung [Kön00].

B.1 Satz mit Definition

Satz B.1. *Sei U eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Parameterbereich einer homöomorphen und differenzierbaren Parametrisierung γ , für die $D\gamma(x)$ in ganz Ω Rang 2 hat. Dann heißt f genau dann über U integrierbar, wenn f bezüglich jeder Parametrisierung von U , die die obigen Bedingungen erfüllt (man nennt so eine Parametrisierung auch Einbettung), integrierbar ist.*

Der dann von der Parametrisierung unabhängige Wert

$$\int_U f \, dS := \int_{x \in \Omega} f(\gamma(x)) \sqrt{\det(D\gamma(x)^T D\gamma(x))} \, dx$$

heißt das Integral von f über U .

Zuerst werde ich den Zusammenhang zwischen linker und rechter Seite der Definition des Integrals von f über U :

$$\int_U f \, dS := \int_{\Omega} f(\gamma(x)) \sqrt{\det(D\gamma(x)^T D\gamma(x))} \, dx$$

erläutern und danach die Eindeutigkeit zeigen.

B.2 Erläuterung der Definition

Als erstes benötige ich einige Hilfsmittel:

Definition B.2. Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit der dazugehörigen 3×2 Matrix A , dann nennt man die 2×2 Matrix $A^T A$ den Maßtensor von α und $g := \det(A^T A)$ die Gramsche Determinante von α .

Lemma B.3. Es gibt genau eine Funktion $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $v(a_1, \lambda a_2) = v(\lambda a_1, a_2) = v(a_1, a_2)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$
- (2) $v(a_1 + a_2, a_2) = v(a_1, a_2 + a_1) = v(a_1, a_2)$
- (3) $v(a_1, a_2) = 1$ für jedes orthonormale System $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$.

(Das sind genau die Bedingungen, die eine Flächeninhaltsfunktion für Parallelogramme im dreidimensionalen Raum erfüllen muss.)

Ist A eine 3×2 Matrix mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ als Spalten, so erfüllt

$(a_1, a_2) \rightarrow \sqrt{\det(A^T A)}$ die Forderungen an v .

Beweis. Die Eindeutigkeit von v zeigt man dadurch, dass man die Matrix A , die aus den Spalten a_1 und a_2 besteht, durch Spaltenoperationen in eine Matrix \bar{A} überführt, die entweder aus orthonormalen Spalten besteht (falls a_1 und a_2 linear unabhängig sind) oder einen Nullvektor als Spalte besitzt (falls a_1 und a_2 linear abhängig sind).

Bei jeder Spaltenumformung ist die Anwendung von v durch (1) und (2) eindeutig geregelt. Also läßt sich $v(a_1, a_2)$ schon allein aufgrund der geforderten Eigenschaften berechnen, der Funktionswert ist deswegen eindeutig bestimmt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sqrt{\det A^T A}$ die drei Forderungen erfüllt.

zu (1):

$$\begin{aligned} \det((\lambda a_1, a_2)^T (\lambda a_1, a_2)) &= \\ \det \left(\begin{pmatrix} \lambda^2 \langle a_1, a_1 \rangle & \lambda \langle a_1, a_2 \rangle \\ \lambda \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle \end{pmatrix} \right) &= \lambda^2 \det(A^T A). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

zu (2):

$$\begin{aligned} \det((a_1 + a_2, a_2)^T (a_1 + a_2, a_2)) &= \\ \det \left(\begin{pmatrix} \langle a_1 + a_2, a_1 + a_2 \rangle & \langle a_1 + a_2, a_2 \rangle \\ \langle a_2, a_1 + a_2 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle \end{pmatrix} \right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle a_1, a_1 \rangle \langle a_2, a_2 \rangle + 2 \langle a_1, a_2 \rangle \langle a_2, a_2 \rangle + \langle a_2, a_2 \rangle^2 \\
&\quad - (\langle a_1, a_2 \rangle + \langle a_2, a_2 \rangle)(\langle a_2, a_1 \rangle + \langle a_2, a_2 \rangle) \\
&= \det(A^T A) + 2 \langle a_1, a_2 \rangle \langle a_2, a_2 \rangle + \langle a_2, a_2 \rangle^2 \\
&\quad - 2 \langle a_1, a_2 \rangle \langle a_2, a_2 \rangle - \langle a_2, a_2 \rangle^2
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$= \det(A^T A) = \quad (\text{analog}) \quad \det((a_1, a_2 + a_1)^T (a_1, a_2 + a_1)) .$$

zu (3):

$$\begin{aligned}
a_1, a_2 \text{ orthonormiert} &\Rightarrow (a_1, a_2)^T (a_1, a_2) = \\
\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^T A) = 1. \quad \square
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Lemma B.4. Seien $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear, g die Gramsche Determinante von α und v die Funktion aus Lemma B.3, dann gilt für jedes Parallelogramm $Q \subset \mathbb{R}^2$:

$$v(\alpha(Q)) = \sqrt{g} \cdot \text{Flächeninhalt von } Q.$$

Beweis. Sei A die zu α gehörige 3×2 Matrix und werde Q aufgespannt durch b_1 und $b_2 \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow \alpha(Q)$ wird aufgespannt durch Ab_1 und $Ab_2 \in \mathbb{R}^3$.

Ist nun B die 2×2 Matrix mit den Spalten b_1 und b_2 , dann ist AB eine 3×2 Matrix mit Ab_1 und Ab_2 als Spalten. Mit Lemma B.3 folgt:

$$\begin{aligned}
v(\alpha(Q)) &= v(Ab_1, Ab_2) = \sqrt{\det((AB)^T AB)} \\
&= \sqrt{\det(B^T A^T AB)} = \sqrt{\det B^T \det(A^T A) \det B} \\
&= |\det B| \sqrt{g} = \sqrt{g} \cdot \text{Flächeninhalt von } Q. \quad \square
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Definition B.5. Sei U eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 und $\gamma : \Omega \rightarrow U$ eine Parametrisierung von U , die die Kriterien für eine Einbettung erfüllt (siehe Satz A.1), dann nennt man

$$g^\gamma(x) := \sqrt{\det(D\gamma(x)^T D\gamma(x))}$$

die Gramsche Determinante von γ in x .

(Analog zum Maßtensor in Definition B.2 ist $D\gamma(x)^T D\gamma(x)$ eine 2×2 Matrix.)

Mit diesen Hilfsmitteln werde ich nun den Zusammenhang zwischen linker und rechter Seite der Definition

$$\int_U f \, dS := \int_{\Omega} f(\gamma(x)) \sqrt{\det(D\gamma(x)^T D\gamma(x))} \, dx \quad (\text{B.5})$$

erläutern.

Man stelle sich U als disjunkte Vereinigung krummliniger Parallelelogramme A_i vor, dann bedeutet $\int_U f \, dS$ im Sinne des Grenzwerts einer Riemannsumme:

$$\int_U f \, dS = \lim_{\text{Seitenlängen der } A_i \rightarrow 0} \sum_i f(u_i) \cdot \text{Flächeninhalt von } A_i, \text{ mit } u_i \in A_i. \quad (\text{B.6})$$

Ω , den Parameterbereich von γ , denke man sich in kleine Rechtecke Q_i zerlegt. Dann sind die $\gamma(Q_i)$ eine Zerlegung von U in kleine krummlinige Parallelelogramme. Damit ergibt sich:

$$\int_U f \, dS = \lim_{\text{Seitenlängen der } Q_i \rightarrow 0} \sum_i f(\gamma(x_i)) \cdot \text{Flächeninhalt von } \gamma(Q_i), \quad (\text{B.7})$$

mit $x_i \in Q_i$.

Für den Grenzwert geht der Flächeninhalt der krummlinigen Parallelelogramme $\gamma(Q_i)$ über in die lokale Änderung dieses Flächeninhalts an der Stelle $\gamma(x_i)$ in Richtung $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma([(x_i)_1, (x_i)_1 + h] \times [(x_i)_2, (x_i)_2 + h])$.

Diese ergibt sich aus der linearen Abbildung $D\gamma(x_i)$ und dem Zusammenhang in Lemma B.4.

Das Bild von $D\gamma(x_i)$, eine Ebene im \mathbb{R}^3 durch den Ursprung, ist der Tangentialraum von γ im Punkt x_i , verschoben um den Vektor $-\gamma(x_i)$. Seien nun

x_i die linke untere Ecke des Rechtecks Q_i und $a := \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$

die Vektoren, die ausgehend von x_i das Rechteck Q_i aufspannen.

Dann ist das Bild des Rechtecks $(Q_i - x_i)$ unter $D\gamma(x_i)$ das Parallelogramm im dreidimensionalen Raum, das von den beiden Vektoren $D\gamma(x_i)a$ und $D\gamma(x_i)b$ aufgespannt wird. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms errechnet sich nach Lemma B.4 durch

$$v(D\gamma(x_i)a, D\gamma(x_i)b) = \sqrt{\det(D\gamma(x_i)^T D\gamma(x_i))} \, r \cdot s. \quad (\text{B.8})$$

Läßt man nun r und s gegen Null gehen, dann ist das Produkt der lokalen Änderungen dr und ds der beiden Koordinaten von x_i , multipliziert mit dem Faktor $\sqrt{\det(D\gamma(x_i)^T D\gamma(x_i))}$, gleich der lokalen Änderung dS des Flächeninhalts einer krummen Fläche an der Stelle $\gamma(x_i)$ in Richtung $\gamma((x_i)_1, (x_i)_1 + dr) \times ((x_i)_2, (x_i)_2 + ds)$.

Deswegen entspricht dem Differential dS an der Stelle $\gamma(x_i)$ der Ausdruck $\sqrt{\det(D\gamma(x_i)^T D\gamma(x_i))} dr ds = \sqrt{\det(D\gamma(x_i)^T D\gamma(x_i))} dx$.

Jetzt ist auch klar, welchen Sinn die Bedingung an γ hat, dass seine Ableitung überall Rang 2 haben muss: Sonst wäre der Tangentialraum an einer Stelle keine Ebene und somit käme dort keine Flächenänderung dS zustande.

B.3 Eindeutigkeit der Definition

Nun zur Eindeutigkeit. Dazu sind wieder einige Hilfsmittel nötig.

Lemma B.6. *Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear mit der dazugehörigen Matrix A und Q ein Rechteck. Dann hat das Parallelogramm $\alpha(Q)$ den Flächeninhalt: $|\det A| \cdot \text{Flächeninhalt von } Q$.*

Beweis. (analog zu Lemma B.4): Werde Q aufgespannt von b_1 und b_2 , dann wird $\alpha(Q)$ aufgespannt von Ab_1 und Ab_2 .

Sei B die Matrix mit b_1 und b_2 als Spalten, dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt von } \alpha(Q) &= |\det(Ab_1 \ Ab_2)| = |\det(AB)| \\ &= |\det A| |\det B| = |\det A| \cdot \text{Flächeninhalt von } Q. \end{aligned} \quad (\text{B.9}) \quad \square$$

Satz B.7. (Transformationssatz) *Seien U und V offene Teilmengen des \mathbb{R}^2 und sei $T : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann über V integrierbar, wenn $(f \circ T) \cdot |\det DT|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt:*

$$\int_U f(T(x)) |\det(DT(x))| dx = \int_V f(y) dy.$$

Der Beweis ist relativ umfangreich, deshalb werde ich ihn im nächsten Anhang gesondert behandeln. An dieser Stelle bringe ich nur eine kurze Erläuterung zum groben Verständnis (siehe [Kön00, S. 290]).

Man stelle sich U als Vereinigung vieler kleiner Rechtecke Q_i vor. V ist dann die Vereinigung „krummliniger Parallelogramme“ $P_i = T(Q_i)$.

Ist f in P_i näherungsweise konstant, so stellt die Summe

$\sum_i f(y_i) \cdot \text{Flächeninhalt von } P_i$, mit $y_i \in P_i$, eine Näherung für $\int_V f(y) dy$ dar.

Ist T außerdem in Q_i näherungsweise affin linear, dann lässt sich nach Lemma B.6 der Flächeninhalt von P_i annähern durch: $|\det(DT(x_i))| \cdot \text{Flächeninhalt von } Q_i$, mit $x_i = T^{-1}(y_i)$.

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} & \sum_i f(y_i) \cdot \text{Flächeninhalt von } P_i \\ & \approx \sum_i f(T(x_i)) \cdot |\det(DT(x_i))| \cdot \text{Flächeninhalt von } Q_i. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Lemma B.8. Sei γ eine Parametrisierung einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , die die Kriterien einer Einbettung erfüllt und Ω ihr Parameterbereich. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in \Omega$ eine offene Umgebung $\Omega_0 \subset \Omega$ und eine Koordinatentransformation $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ derart, dass $(P \circ \gamma)_{/\Omega_0}$ äquivalent ist zu der Parametrisierung $\gamma^* : V \rightarrow \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^2$ mit $\gamma^*(x) = (x, \gamma_3^*(x))$, d.h. es gibt einen Diffeomorphismus $T : \Omega_0 \rightarrow V$, so dass $(P \circ \gamma)_{/\Omega_0} = \gamma^* \circ T$. γ^* erfüllt die Kriterien einer Einbettung.

Beweis. Da γ eine Einbettung ist, hat ihre Ableitung in x_0 zwei linear unabhängige Zeilen i und j . Also kann man den Umkehrsatz auf die Abbildung $(\gamma_i, \gamma_j) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ anwenden.

Danach gibt es eine offene Umgebung Ω_0 von x_0 derart, dass die Einschränkung $T := (\gamma_i, \gamma_j)_{/\Omega_0}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Sei nun $\gamma^* := P \circ \gamma \circ T^{-1}$, dann ist

$$\begin{aligned} \gamma^*(x) &= P \circ \gamma \circ T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \circ \gamma \circ T^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_i^{-1}(x_1) \\ \gamma_j^{-1}(x_2) \end{pmatrix} \\ &= P \circ \gamma \circ \begin{pmatrix} \gamma_i^{-1}(x_1) \\ \gamma_j^{-1}(x_2) \end{pmatrix} = P \circ \begin{pmatrix} \gamma_1 \begin{pmatrix} \gamma_i^{-1}(x_1) \\ \gamma_j^{-1}(x_2) \end{pmatrix} \\ \gamma_2 \begin{pmatrix} \gamma_i^{-1}(x_1) \\ \gamma_j^{-1}(x_2) \end{pmatrix} \\ \gamma_3 \begin{pmatrix} \gamma_i^{-1}(x_1) \\ \gamma_j^{-1}(x_2) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \gamma_k \begin{pmatrix} \gamma_i^{-1}(x_1) \\ \gamma_j^{-1}(x_2) \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{\text{mit } i \neq k \neq j}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Also hat $\gamma^*(x)$ die Gestalt $\begin{pmatrix} x \\ \gamma_3^*(x) \end{pmatrix}$ und γ^* erfüllt offensichtlich auch die Kriterien einer Einbettung. \square

Lemma B.9. *Seien $\gamma_i : \Omega_i \rightarrow U$, $i \in \{1, 2\}$ zwei Einbettungen der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $U \in \mathbb{R}^3$.*

Dann gibt es einen Diffeomorphismus $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $T := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ ein Diffeomorphismus ist:

Zu $y_1 := T(x_1)$ gibt es nach Lemma B.8 eine offene Umgebung $\Omega_2^0 \in \Omega_2$, einen Diffeomorphismus $\tau : \Omega_2^0 \rightarrow V$ auf eine offene Menge $V \in \mathbb{R}^2$ (die Einschränkung von $\gamma_2(\Omega_2^0)$ auf seine i-te und eine j-te Komponente) und eine lineare Abbildung $pr : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (die Einschränkung der Koordinatenpermutation P in Lemma B.8 auf seine ersten beiden Komponenten), so dass

$$\gamma_2^{-1} / \gamma_2(\Omega_2^0) = \tau^{-1} \circ i. \quad (\text{B.12})$$

Da Ω_2^0 das Bild von $T^{-1}(\Omega_2^0)$ unter T ist, gilt also auf der offenen Umgebung $T^{-1}(\Omega_2^0)$: $T = \tau^{-1} \circ i \circ \gamma_1$.

T ist also als Abbildung von Ω_1 nach Ω_2 differenzierbar und seine Ableitung hat überall Rang 2. \square

Mit diesen Hilfsmitteln ausgestattet kann ich nun die Eindeutigkeit des Ausdrucks $\int_U f dS$ zeigen.

Seien also γ_1 und γ_2 zwei Einbettungen für U. Dann existiert gemäß Lemma B.9 ein Diffeomorphismus $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ mit $\gamma_1 = \gamma_2 \circ T$.

Für die Maßtensoren der beiden Einbettungen liefert die Kettenregel in den Punkten $x \in \Omega_1$ und $y = T(x) \in \Omega_2$ die Beziehung:

$$\begin{aligned} D\gamma_1(x)^T D\gamma_1(x) &= (D\gamma_2(y) \cdot DT(x))^T (\gamma_2'(y) \cdot DT(x)) \\ &= DT(x)^T \cdot D\gamma_2(y)^T \cdot D\gamma_2(y) \cdot DT(x) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{g^{\gamma_1}(x)} &= \sqrt{\det(DT(x)^t \cdot D\gamma_2(y)^T \cdot D\gamma_2(y) \cdot DT(x))} \\ &= \sqrt{\det(DT(x)^T) \cdot \det(D\gamma_2(y)^T D\gamma_2(y)) \cdot \det(DT(x))} \\ &= |\det(DT(x))| \cdot \sqrt{g^{\gamma_2}(y)}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Letztlich erhält man also:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f(\gamma_1(x)) \cdot \sqrt{g^{\gamma_1}(x)} dx &= \int_{\Omega_1} f(\gamma_2 \circ T(x)) \cdot \sqrt{g^{\gamma_1}(x)} dx \\ &= \int_{\Omega_1} f(\gamma_2 \circ T(x)) \cdot |\det(DT(x))| \cdot \sqrt{g^{\gamma_2}(T^{-1}(x))} dx. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Mit dem Transformationssatz ist dies nichts anderes als

$$\int_{\Omega_2} f(\gamma_2(y)) \cdot \sqrt{g^{\gamma_2}(y)} \, dy. \quad (\text{B.16})$$

Also ist der Wert von $\int_U f \, dS$ unabhängig von der Parametrisierung eindeutig bestimmt.

Anhang C

Beweis des Transformationssatzes

Satz C.1. (*Transformationssatz*) Seien U und V offene Teilmengen des \mathbb{R}^2 und sei $T : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann über V integrierbar, wenn $(f \circ T) \cdot |\det DT|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_U f(T(x)) |\det(DT(x))| dx = \int_V f(y) dy.$$

Zum Beweis des Satzes benötige ich wieder einige Hilfsmittel.

Lemma C.2. Ist $N \in \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge und $T : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ lipschitzstetig, dann ist auch $T(N)$ eine Nullmenge.

Beweis. Für $\epsilon > 0$ gegeben, lässt sich N durch durch achsenparallele Quadrate Q_k so überdecken dass gilt: $\sum_k v(Q_k) < \epsilon$. v steht dabei für die Flächeninhaltsfunktion.

Ist L die Lipschitzkonstante von T , dann gilt: $v(T(Q_k)) \leq (L\sqrt{2})^2 v(Q_k)$

$$\Rightarrow v(T(N)) \leq \sum_k 2L^2 v(Q_k) \leq 2L^2 \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0. \quad \square \quad (\text{C.1})$$

Eine einfache Schlussfolgerung aus dem Lemma ist das folgende Korollar.

Korollar C.3. Das Bild einer Nullmenge unter einer differenzierbaren Abbildung $T : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist wieder eine Nullmenge.

Beweis. Jede Nullmenge in U lässt sich als abzählbare Vereinigung beschränkter Nullmengen darstellen. Für jede dieser beschränkten Nullmengen liefert die Differenzierbarkeit von T eine Lipschitzkonstante. Das Bild so einer beschränkten Nullmenge ist also gemäß obigem Lemma wieder eine Nullmenge. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ergibt nun wieder eine Nullmenge. \square

Für den Rest dieses Kapitels sei $T : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ auf die offene Menge $V \subset \mathbb{R}^2$ und $S : V \rightarrow U$ seine Umkehrung.

Hilfssatz C.4. Für jedes Quadrat $Q \subset U$ gilt: $v(T(Q)) \leq \max_{x \in Q} |\det DT(x)| \cdot v(Q)$.

Beweis. Sei α die Zahl mit: $v(T(Q)) = \alpha \cdot v(Q)$. Zerlegt man Q in vier gleich große Quadrate, dann ist darunter mindestens eines, für das gilt: $v(T(Q_1)) \geq \alpha \cdot v(Q_1)$.

Das gleiche lässt sich mit Q_1 machen. Die fortgesetzte Wiederholung dieses Vorgangs ergibt eine absteigende Folge von Quadraten: $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$, für die alle gilt: $v(T(Q_k)) \geq \alpha \cdot v(Q_k)$.

Sei a der Punkt, gegen den diese absteigende Folge konvergiert, $b := T(a)$ sein Bildpunkt und d die Seitenlänge des Ausgangsquadrats Q . Sei weiter $A := DT(a)$, dann ist A surjektiv (T ist Diffeomorphismus). Daher lässt sich T auch in die Form bringen:

$T(x) = b + A(x - a + \|x - a\|_\infty \cdot r(x))$, mit $r(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow a$.

Wählt man nun k so, dass $\|r(x)\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall x \in Q_k$, dann gilt $\forall x \in Q_k$:

$$\|x - a\|_\infty + \|x - a\|_\infty \cdot \|r(x)\|_\infty \leq 2^{-k} \cdot d \cdot (1 + \epsilon). \quad (C.2)$$

Der Flächeninhalt von $T(Q_k)$ lässt sich jetzt durch die Anwendung von Lemma B.6 abschätzen:

Die Menge $\{x - a + \|x - a\|_\infty \cdot r(x), x \in Q_k\}$ liegt nach der eben angestellten Überlegung in dem Quadrat: $\{x : \|x\|_\infty \leq 2^{-k} \cdot d \cdot (1 + \epsilon)\}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(T(Q_k)) &= v(A(\{x - a + \|x - a\|_\infty \cdot r(x), x \in Q_k\})) \\ &\leq v(A(\{x : \|x\|_\infty \leq 2^{-k} d (1 + \epsilon)\})) \\ &= (\text{gemäß Lemma B.6}) (2^{-k} d)^2 \cdot (1 + \epsilon)^2 \cdot |\det A| \\ &= v(Q_k) \cdot (1 + \epsilon)^2 \cdot |\det A|. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Zur Erinnerung:

Wir wissen: $v(T(Q)) = \alpha \cdot v(Q)$ und wollen zeigen:

$$v(T(Q)) \leq \max_{x \in Q} |\det DT(x)| \cdot v(Q).$$

Deshalb reicht es, anzunehmen, dass $\alpha > \max_{x \in Q} |\det DT(x)|$,

und diese Annahme zum Widerspruch zu führen.

Sei also $\alpha > \max_{x \in Q} |\det DT(x)| \geq |\det DT(a)| = |\det A|$.

Da $|\det A| < \alpha$, kann man ϵ so klein wählen, dass auch $(1 + \epsilon)^2 \cdot |\det A| < \alpha$.

Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, unter der wir die absteigende Folge (Q_k) konstruiert haben: $v(T(Q_k)) \geq \alpha \cdot v(Q_k) \quad \forall k$. \square

Hilfssatz C.5. *Sei $K \subset U$ kompakt, mit einer Nullmenge als Rand, und $W = T(K)$. Dann gilt:*

$$\min_{x \in K} |\det DT(x)| \cdot v(K) \leq v(T(K)) = v(W) \leq \max_{x \in K} |\det DT(x)| \cdot v(K)$$

Beweis. Sei (Q_k) eine Folge von Quadraten in K , für die gilt: $\bigcup_k Q_k = \text{int} K$

und $Q_i \cap Q_j$ enthält höchstens Randpunkte von Q_i und Q_j für $i \neq j$

Dann folgt: $v(K) = v(\text{int} K) = \sum_k v(Q_k)$ und $\text{int} W = \bigcup_k T(Q_k)$.

Mit Lemma C.2 gilt außerdem: $v(W) = v(\text{int} W) = \sum_k v(T(Q_k))$

Gemäß Hilfssatz C.4 gilt für jedes Quadrat Q_k :

$$v(T(Q_k)) \leq \max_{x \in Q_k} |\det DT(x)| \cdot v(Q_k),$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(W) &= \sum_k v(T(Q_k)) \leq \sum_k \max_{x \in Q_k} |\det DT(x)| \cdot v(Q_k) \\ &= \max_{x \in Q_k} |\det DT(x)| \cdot v(K). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Die linke Abschätzung erhält man aus der rechten, wenn man K und W vertauscht, auf W die Inverse von T , also S , betrachtet und berücksichtigt, dass

$$DT(x) = (DS(y))^{-1}, \text{ für } y = T(x), \text{ also auch:}$$

$$|\det DT(x)| = \frac{1}{|\det DS(y)|}.$$

\square

Hilfssatz C.6. *Der Transformationssatz gilt für jede Treppenfunktion, deren Träger in V liegt.*

Beweis. Da eine Treppenfunktion in V eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen disjunkter und beschränkter Flächenabschnitte in V ist, deren Ränder jeweils Nullmengen sind, genügt es gemäß Korollar C.3, den Hilfssatz C.6 für eine beliebige charakteristische Funktion eines kompakten Flächenabschnitts $W \subset V$ zu beweisen.

Die Integrierbarkeit ist aufgrund der Stetigkeit von $\mathbb{1}_W \circ T \cdot |\det DT|$ in W und der Kompaktheit von $T^{-1}(W) = S(W)$ gegeben.

Also muss man nur noch die Formel zeigen:

$$\int_{S(W)} |\det DT| dx = \int_W 1 dy. \quad (\text{C.5})$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $|\det DS|^{-1}$ auf W , gibt es eine Zerlegung $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$ in kompakte Flächenabschnitte, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und so klein sind, dass in jedem W_i gilt: $\max_{x \in S(W_i)} |\det DT(x)| - \min_{x \in S(W_i)} |\det DT(x)| \leq \epsilon$.

Unabhängig davon besagt Hilfssatz C.5:

$$\min_{x \in S(W_i)} |\det DT(x)| \cdot v(S(W_i)) \leq v(W_i) \leq \max_{x \in S(W_i)} |\det DT(x)| \cdot v(S(W_i)). \quad (\text{C.6})$$

Daraus folgt mit der obigen Überlegung:

$$\left| \int_{S(W_i)} |\det DT| dx - v(W_i) \right| \leq \epsilon \cdot v(S(W_i)). \quad (\text{C.7})$$

Da die Durchschnitte $W_i \cap W_j$ für $i \neq j$ Nullmengen sind, erhält man nach Aufaddieren der W_i 's:

$$\begin{aligned} \left| \int_{S(W)} |\det DT| dx - v(W) \right| &\leq \epsilon \cdot v(S(W)) \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0 \quad (\text{C.8}) \\ \Rightarrow \int_{S(W)} |\det DT| dx &= \int_W 1 dy. \quad \square \end{aligned}$$

Hilfssatz C.7. Sei f integrierbar über die offene Menge $V \subset \mathbb{R}^2$, dann gibt es zu jedem ϵ eine Treppenfunktion φ mit Träger in V und $\|f|_V - \varphi\|_{L_1} < \epsilon$.

Beweis. f ist über V integrierbar $\Rightarrow \exists \psi$, Treppenfunktion mit Träger im \mathbb{R}^2 , : $\|f|_V - \mathbb{1}_V \psi\|_{L_1} < \frac{\epsilon}{2}$.

Sei M obere Schranke für $|\psi|$, B eine beschränkte, offene Menge, die den Träger von ψ umfasst, und A eine endliche Vereinigung kompakter Flächenabschnitte in $B \cap V$ mit $v(V \cap B) - v(A) < \frac{\epsilon}{2M}$.

Dann ist $\mathbb{1}_A \psi$ eine Treppenfunktion mit kompaktem Träger in V und

$$\|\mathbb{1}_V \psi - \mathbb{1}_A \psi\|_{L_1} = \|\mathbb{1}_{V \cap B} \psi - \mathbb{1}_A \psi\|_{L_1} \leq M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}. \quad (\text{C.9})$$

Sei also $\varphi := \mathbb{1}_A \psi$. □

Mit diesen Hilfssätzen lässt sich auch der Transformationssatz einfach beweisen:

Zu f , integrierbar über V , gibt es eine Folge von Treppenfunktionen φ_k , deren Träger jeweils in V liegen, mit $\|f/V - \varphi_k\|_{L_1} \rightarrow 0$.

Also konvergiert φ_k außerhalb einer Nullmenge $N \subset V$ punktweise gegen f/V .

Aus Hilfssatz C.6 folgt, dass dann auch die Funktionen $\tilde{\varphi}_k := (\varphi_k \circ T) \cdot |\det DT|$ über U integrierbar sind und eine L_1 -Cauchyfolge bilden:

$$\|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_l\|_{L_1} = \int_U |\tilde{\varphi}_k(x) - \tilde{\varphi}_l(x)| dx = \int_V |\varphi_k(y) - \varphi_l(y)| dy = \|\varphi_k - \varphi_l\|_{L_1}. \quad (\text{C.10})$$

Außerdem konvergiert $(\varphi_k \circ T) \cdot |\det DT|$ außerhalb von $S(N)$ punktweise gegen $(f \circ T) \cdot |\det DT|$.

Insgesamt folgt also:

$$\begin{aligned} \int_U f(x) \circ T(x) \cdot |\det DT(x)| dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \varphi_k(x) \circ T(x) \cdot |\det DT(x)| dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V \varphi_k(y) dy = \int_V f(y) dy \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Also ist $(f \circ T) \cdot |\det DT|$ über U integrierbar mit der angegebenen Formel. Die umgekehrte Richtung zeigt man einfach, indem man den bereits bewiesenen Zusammenhang auf die Umkehrabbildung $T^{-1} = S$ anwendet:

$$|\det DS(y)| = |\det DT|^{-1}, \text{ für } x = S(y) \text{ und } T \circ S(y) = y. \quad (\text{C.12})$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [B⁺06] R. Bactavatchalou et al. The generalized Cauchy relation: a probe for local structure in materials with isotropic symmetry. *Journal of Physics, Conference Series*, 40:111–117, 2006.
- [Cau28] A. L. Cauchy. Des la pression ou tension dans un systeme des points materiels. *Exercices de Mathematiques*, 3:253–277, 1828.
- [Cia88] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. Elsevier, North-Holland, 1988.
- [DT03] P. Dłuzewski and P. Traczykowski. Numerical simulations of atomic positions in quantum dot by means of molecular statics. *Archives of Mechanics*, 55:501–514, 2003.
- [E⁺03] G. Etse et al. A micropolar microplane theory. *Int. J. Engng. Science*, 41:1631–1648, 2003.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [Grü07] E. Grüneisen. Elastische Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. *Annalen der Physik*, 22:801–851, 1907.
- [Kan84] K.-I. Kanatani. Distribution of directional data and fabric tensors. *Int. J. Engng. Science*, 22:149–164, 1984.
- [Kön00] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Springer, Berlin, 2000.
- [LK93] V. A. Lubarda and D. Krajcinovic. Damage tensors and the crack density distribution. *Int. J. Solids Struct.*, 30:2859–2877, 1993.
- [NJR09] P. Neff, J. Jeong, and H. Ramezani. Subgrid interaction and micro-randomness. *Int. J. of Solids and Structures*, 46:4261–4276, 2009.

- [NM08] P. Neff and I. Münch. Curl bounds Grad on $SO(3)$. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 14(1):148–159, 2008.
- [Ogd97] R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover, Mineola, New York, 1997.
- [Poi31] Poisson. Memoire sur les equations generales de l’equilibre et du mouvement des corps solides elastiques. *J. de l’Ecole Polytechnique*, 13:139, 1831.
- [Som54] Arnold Sommerfeld. *Mechanik der deformierbaren Medien*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.
- [Sza79] Istvan Szabo. *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser, Basel, 1979.
- [Val88] Tullio Valent. *Boundary Value Problems of Finite Elasticity*. Springer, Berlin, 1988.
- [Wer00] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 2000.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ausschließlich mit Hilfe der aufgeführten Quellen angefertigt habe. Diese Arbeit hat noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, den

Tomas Kuhlmann