# Réduction dimensionnelle d'un modèle viscoélastique en grandes déformations. Analyse théorique et simulation numérique.

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée et soutenue publiquement le 26 septembre 2008*

*pour l'obtention du titre de*

**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris VI**

**Spécialité Mathématiques Appliquées**

par

Joelle BEYROUTHY

Composition du jury

| | |
|---|---|
| *Directeur de thèse :* | Hervé LE DRET |
| *Rapporteurs :* | Giuseppe GEYMONAT |
| | Patrizio NEFF |
| *Examinateurs :* | Christophe GOZE-BAC |
| | Frédéric HECHT |
| | François MURAT |
| | Annie RAOULT |

**Laboratoire Jacques-Louis Lions – UMR 7598**

*À mon mari, Chadi.*

# Remerciements

*Thèse, recherche, questionnement sans cesse renouvelé pour aller toujours plus loin, activité difficile mais également source de compétences valorisables...*

Dans ces quelques lignes, j'aimerais tenter d'ébaucher des remerciements pour toutes les personnes qui ont compté dans ce travail de thèse.

Je dois tout d'abord à mon directeur de thèse Hervé Le Dret, de m'avoir guidé et laissé en même temps la liberté nécessaire à l'accomplissement de mes travaux, tout en y gardant un oeil critique et avisé malgré ses charges nombreuses.

Je suis très heureuse que Giuseppe Geymonat et Patrizio Neff aient accepté la lourde tâche de rapporter ma thèse et je les remercie pour le travail méticuleux qu'ils ont effectué pour la relecture de mon manuscrit. Je suis également redevable envers Patrizio Neff pour son intérêt constant pour mon travail et ses enrichissants conseils.

Je tiens à témoigner ma sincère reconnaissance à Frédéric Hecht, François Murat et Annie Raoult qui se sont intéressés à mon travail et ont accepté de participer au Jury.

Merci également à Christophe Goze-Bac d'être déplacé pour faire partie du jury.

Ce travail a été réalisé dans le laboratoire Jacques-Louis Lions de l'université Pierre et Marie Curie. J'adresse donc toute ma gratitude à son directeur Yvon Maday et à sa directrice adjointe Edwige Godlewski pour m'y avoir accueillie, pour m'avoir fait confiance et pour avoir suivi avec attention mon travail et mon projet professionnel.

Je tiens à remercier Mesdames Danièle Boulic, Liliane Ruprecht et Merbouha Lounici pour leur disponibilité, leur gentillesse et leur aide administrative. Merci également à Khashayar Dadras et à Antoine Lehyaric qui ont fait de leur mieux pour répondre aux besoins informatiques indispensables à l'avancement de ce travail. Pour sa gentillesse et l'impression de ce manuscrit, je dis grand merci à Christian David.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans remercier mes camarades, les thésards du LJLL. Merci donc à tous les thésards des premier, deuxième et troisième étages plus spécialement à Paulo (obrigado embora t'escoras maldosas), Raphael (la vie est simple), Benjamin (c D l v), Rachida (bientôt la musique à fond), Alex C (la vie est bizarre), Evelyne et Maya (pour les discussions scientifiques), Alex F (pour tes mails permanents), Alban, Radu, Thomas, Mathieu, Jean-marie, Noura, Joana, Mounir, Mouna, Cuc, Vincent, Rym, Etienne et Nicolas. Merci également à tous ceux qui ont accepté de passer au GTT !

Je ne peux pas oublier mes docteurs compatriotes Hyam et Rachad, merci pour leur soutien et leur amitié.

Une mention spéciale à Paulo et Frédéric pour leur relecture soigneuse de l'introduction de ce manuscrit.

Je remercie aussi Laurent (pour son aide et son soutien permament), Ulrich, Nicolas S et Filipa pour leur bonne humeur et leur gentillesse.

D'autres n'ont pas besoin de recevoir des remerciements pour une participation doctorale : mes parents, mon frère Maroun (qui etait toujours là malgré la distance), ma soeur Samantha-Joe, ma soeur Mirella et sa famille, et Jean et Jacqueline Massoud et leur famille savent l'importance qu'ils ont dans ma vie.

Je termine ces remerciements en pensant à toi mon mari, tu m'as encouragé et tu as cru en moi, quand moi-même je doutais. Durant toutes ces années tu as subi et accepté (sans trop protester) ma mauvaise humeur (quand le travail n'avançait pas) et mes longs horaires au labo. Merci pour tout !

# Table des matières

# Table des matières

**Introduction** **1**
1 Étude théorique . . . . . 2
1.1 Notations et présentation du problème . . . . . 2
1.2 Réduction dimensionnelle 3D-1D . . . . . 3
1.3 Étude du problème de minimisation 1D . . . . . 5
1.4 Étude du problème d'évolution 1D couplé avec la minimisation . . . . . 6
2 Résolution numérique . . . . . 7
2.1 Implémentation du problème de minimisation 1D . . . . . 7
2.2 Implémentation des problèmes d'évolution 1D . . . . . 8
2.3 Résolution des problèmes couplés 1D . . . . . 9

**Introduction** **15**

**1 Notations et présentation du problème** **19**
1.1 Notations . . . . . 19
1.2 Le problème tridimensionnel . . . . . 21
1.2.1 Présentation du modèle viscoélastique . . . . . 21
1.2.2 Dérivation des problèmes d'évolution . . . . . 26

**2 Réduction dimensionnelle 3D-1D** **31**
2.1 Ansätze . . . . . 31
2.2 Calcul du gradient de la déformation approchée . . . . . 32
2.3 Choix des directeurs . . . . . 32
2.4 Réduction du problème de minimisation . . . . . 33
2.4.1 Réduction de l'énergie interne . . . . . 34
2.4.2 Réduction des termes de force . . . . . 36
2.5 Calcul des coefficients $\rho_1$ et $\rho_2$ . . . . . 38
2.6 Réduction du problème d'évolution . . . . . 44
2.6.1 Cas mécanique . . . . . 44
2.6.2 Cas thermodynamique . . . . . 46
2.7 Invariance du modèle . . . . . 46

**3 Étude du problème de minimisation 1D** **51**
3.1 Existence et unicité du problème de minimisation . . . . . 51
3.1.1 Conditions aux limites . . . . . 51
3.1.2 Existence des solutions . . . . . 53
3.1.3 Unicité de la solution . . . . . 58

**4 Étude du problème d'évolution 1D** **63**
4.1 Équation d'Euler-Lagrange . . . . . 63
4.1.1 Formulation variationnelle . . . . . 63
4.1.2 Problème aux limites . . . . . 71
4.2 Existence et unicité de la solution . . . . . 80
4.2.1 Dépendance localement lipschitzienne de la déformation par rapport à la rotation . . . . . 80
4.2.2 Caractère localement lipschitzien du second membre du problème d'évolution . . . . . 95

**5 Étude du problème couplé simplifié** **103**

**Introduction** **111**

**6 Problème de minimisation** **115**
6.1 Problème variationnel . . . . . 115
6.2 Approximation variationnelle, éléments finis . . . . . 116
6.2.1 Construction de l'espace d'approximation . . . . . 117
6.2.2 Discrétisation spatiale de la rotation . . . . . 119
6.2.3 Mise en œuvre numérique . . . . . 119
6.2.4 Premier test . . . . . 120
6.2.5 Second test . . . . . 121

**7 Problèmes d'évolution** **131**
7.1 Cas mécanique . . . . . 131
7.1.1 Test pour ode . . . . . 133
7.1.2 Condition d'équilibre mécanique . . . . . 133
7.2 Cas thermodynamique . . . . . 135
7.2.1 Test pour ode . . . . . 136
7.2.2 Condition d'équilibre thermodynamique . . . . . 137

**8 Résolution numérique** **145**
8.1 Cas mécanique . . . . . 145
8.1.1 Résultats numériques . . . . . 147
8.2 Cas thermodynamique . . . . . 161
8.2.1 Résultats numériques . . . . . 162

**Conclusion et perspectives** **175**

**Bibliographie** **178**

# Introduction

# Introduction

La réduction dimensionnelle des modèles en mécanique des milieux continus est un sujet qui s'est largement développé durant les dernières années. Il s'agit d'une procédure par laquelle on réduit un problème posé en dimension $N$ en un problème posé en dimension $M < N$. Elle permet de diminuer les difficultés mathématiques présentées par la théorie multidimensionnelle et de simplifier l'aspect numérique.

Les réductions de dimension les plus intéressantes en mécanique des solides sont :

- la réduction 3D-2D ($N = 3$, $M = 2$), on parle alors de théorie des membranes, coques ou de théorie des plaques,
- la réduction 3D-1D ($N = 3$, $M = 1$), soit la théorie des fils minces, poutres ou arches dans le cas courbé.

Notre travail porte sur la théorie des fils minces qui décrit le comportement mécanique d'un corps solide, le fil, qui est mince dans deux directions. Cette description se fait à l'aide d'équations n'ayant qu'une dimension d'espace et le temps comme variables indépendantes. Nous étudions le comportement mécanique du fil à l'aide d'un modèle viscoélastique en grandes déformations introduit par P. Neff [33]. L'hypothèse des petites déformations ne s'applique donc pas dans ce cas puisque le corps est supposé subir des modifications importantes de sa géométrie. La viscoélasticité est une propriété physique du corps indispensable pour obtenir des comportements réalistes, d'où son intérêt. Un comportement visqueux est caractérisé par l'intervention du temps. Le temps figure donc dans la loi de comportement d'un matériau viscoélastique et sous charge constante la déformation évolue.

Nous présentons une réduction 3D-1D pour le modèle viscoélastique de P. Neff. En toute généralité, les deux approches les plus connues pour un tel passage (3D-1D) sont les approches « directes » et les approches « dérivées ». Les approches directes, introduites par les frères Cosserat [19] (1908-1909), considèrent dès le départ le fil comme un objet unidimensionnel muni de vecteurs directeurs. Ce type d'approche a été utilisé par la suite par plusieurs auteurs parmi lesquels on cite Green, Naghdi, Laws, Cohen et Wang ([18], [22], [23]). Pour ce qui concerne les approches « dérivées » (connues parfois sous le nom des méthodes asymptotiques, voir Aganović, Tambača et Tutek [3, 4] et Ciarlet [16, 17]), il s'agit d'obtenir, en partant de modèles tridimensionnels dans un domaine dont certaines dimensions sont petites par rapport aux autres, des modèles posés sur des ouverts de dimension

un. Cette réduction s'obtient par un passage à la limite, effectué dans un certain sens, quand les petits paramètres du domaine tridimensionnel tendent vers zéro. Notre approche, semblable à celle de P. Neff, n'est ni une méthode directe car on a toujours l'aspect tridimensionnel, ni une méthode asymptotique. En fait, notre réduction 3D-1D est basée sur l'introduction de vecteurs directeurs dans le sens de Cosserat (voir (6)).

Cette thèse est divisée en deux parties. La première partie est consacrée à l'obtention, puis à l'analyse mathématique du modèle unidimensionnel réduit. La seconde partie s'occupe de la résolution numérique du modèle réduit. Nous présentons maintenant un résumé rapide des contenus de ces deux parties.

# 1 Étude théorique

Cette partie porte sur la réduction 3D-1D du modèle viscoélastique introduit par P. Neff, lequel s'est intéressé au passage 3D-2D. Initialement, nous avons tenté d'appliquer la démarche que P. Neff a suivie pour le passage 3D-2D pour le cas du passage 3D-1D. Toutefois, cette approche s'est révélée en partie inadaptée à notre cas. Nous avons donc été amenés à utiliser une nouvelle approche que l'on détaillera ultérieurement. Par ailleurs, nous montrons que le modèle unidimensionnel réduit est bien posé autrement dit, qu'il possède une unique solution.

## 1.1 Notations et présentation du problème

Après avoir donné quelques notations qui nous seront utiles dans la suite de ce travail, nous décrivons le modèle viscoélastique tridimensionnel.

En général, les modèles viscoélastiques en grandes déformations se répartissent selon les deux classes suivantes [25] :

- les modèles de type intégral qui expriment la contrainte viscoélastique comme une intégrale temporelle d'une fonction du champ de déformation,
- les modèles de type différentiel qui introduisent une variable interne supplémentaire dont l'évolution est gouvernée par une équation différentielle en temps.

C'est à la deuxième classe de modèles que nous nous sommes intéressés dans ce travail (voir (2)).

Le problème tridimensionnel viscoélastique que nous souhaitons réduire en un problème unidimensionnel est un problème couplé minimisation-évolution introduit par P. Neff [33]. Il consiste à trouver un couple déformation-rotation $(\varphi, R)\colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ où $\Omega$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, solution d'un problème couplé comportant une minimisation pour la déformation :

$$\text{à } t \text{ fixé, chercher } \varphi \in \Phi \text{ telle que } J(\varphi, R) = \inf_{\psi \in \Phi} J(\psi, R), \tag{1}$$

et un problème d'évolution pour la rotation à $x$ fixé

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\eta}\, \nu^+\big((B)^a\big)(B)^a R, \quad R(0) = R_0, \tag{2}$$

où $\Phi$ est un ensemble de déformations admissibles qui inclut les conditions aux limites et

$$\begin{aligned} J(\varphi,R) = \int_\Omega W(F,R)\,dx - \int_\Omega f\cdot\varphi\,dx \\ - \int_\Gamma N\cdot\varphi\,dS - \int_{\Gamma^1} g\cdot\varphi\,da - \int_{\Gamma^0} e\cdot\varphi\,da \end{aligned} \tag{3}$$

est l'énergie totale. La densité d'énergie interne $W$ s'exprime à l'aide des constantes de Lamé $\mu > 0$ et $\lambda \geq 0$ (voir Chapitre 1, Section 1.2) par

$$W(F,R) = \frac{\mu}{4}\|R^T F + F^T R - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{8}\big(\operatorname{tr}(R^T F + F^T R - 2I)\big)^2$$

où $F = \nabla\varphi$ est le gradient de la déformation. Les fonctions $f$ et $N$ représentent respectivement une densité de forces volumiques et une densité de forces surfaciques appliquées sur une partie $\Gamma$ du bord de $\Omega = \omega\times]0,1[$ ($\omega$ étant un ouvert bidimensionnel borné). Le fil est aussi soumis aux forces de densité $g$ et $e$ sur $\Gamma^1 = \omega\times\{1\}$ et $\Gamma^0 = \omega\times\{0\}$ respectivement. Pour ce qui concerne l'équation (2), $(B)^a$ désigne la partie antisymétrique de la matrice $B$. Cette matrice dépend du gradient de la déformation $F$ et de la rotation $R$, et prend selon P. Neff soit une valeur dite mécanique $B_{\text{méca}}$, soit une valeur dite thermodynamique $B_{\text{thermo}}$, données respectivement par

$$B_{\text{méca}} = FR^T \tag{4}$$

et

$$B_{\text{thermo}} = (2\mu + 3\lambda)FR^T - \mu(FR^T)^2 - \lambda\operatorname{tr}(FR^T)FR^T. \tag{5}$$

P. Neff n'a traité que le cas mécanique. Dans notre travail, nous effectuons non seulement l'analyse théorique du modèle mécanique, mais également l'étude numérique des deux modèles, mécanique et thermodynamique. Enfin, le terme $\frac{1}{\eta}\nu^+$ apparaissant dans le second membre de l'équation (2), est une fonction à valeurs scalaires représentant la viscosité élastique dans le domaine élastique et $\eta$ est le produit d'un temps de relaxation par une pression de référence.

## 1.2 Réduction dimensionnelle 3D-1D

Le but de cette partie est de réduire le problème tridimensionnel couplé minimisation-évolution formé par les équations (1) et (2) en un problème unidimensionnel. On définit donc une famille de domaines minces

$$\Omega_h = \{(x_1,x_2,x_3);\,(x_1/h,x_2/h,x_3)\in\Omega\} = h\omega\times]0,1[,$$

pris comme configurations de référence d'une famille de fils viscoélastiques non linéaires et homogènes. Le diamètre de la section $h\omega$ est égal à $h$ ($0 < h \ll 1$). On note $(\varphi_h, R_h)$ la solution du problème viscoélastique tridimensionnel.

On cherche à définir, quand $h$ est petit, une approximation unidimensionnelle $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{R})$ de $(\varphi_h, R_h)$. La déformation $\widetilde{\varphi}\colon \Omega_h \to \mathbb{R}^3$ peut être considérée comme la composée de la déformation du fil $m\colon [0,T] \times ]0,1[ \to \mathbb{R}^3$ et de la déformation de la section $(h\omega)$ décrite par deux directeurs orthonormés $d_\alpha\colon [0,T] \times ]0,1[ \to S^2$, $\alpha = 1,2$. Dans l'esprit de la théorie spéciale de Cosserat (voir [7]), on fait l'Ansatz cinématique suivant :

$$\widetilde{\varphi}(t,x_1,x_2,x_3) = m(t,x_3) + \rho_1(t,x_3)d_1(t,x_3)x_1 + \rho_2(t,x_3)d_2(t,x_3)x_2, \tag{6}$$

où les fonctions $\rho_\alpha\colon [0,T] \times ]0,1[ \to \mathbb{R}$ permettent de prendre en compte des effets de Poisson dans la section. On introduit un second Ansatz pour les rotations : $\widetilde{R}(t,x_1,x_2,x_3) = \bar{R}(t,x_3)$, et l'on fait l'hypothèse, raisonnable pour $h$ petit, que les deux premiers vecteurs colonne de la rotation $\bar{R}$ et les directeurs sont couplés par la relation $\bar{R}_\alpha = d_\alpha$.

Avec ces hypothèses, on calcule le gradient de la déformation et l'on trouve

$$\widetilde{F} := \nabla\widetilde{\varphi} = \big(\rho_1\bar{R}_1 \,|\, \rho_2\bar{R}_2 \,|\, m'\big) + \big(0 \,|\, 0 \,|\, (\rho_\alpha\bar{R}_\alpha)'\big)x_\alpha = A_m + A_\alpha x_\alpha, \tag{7}$$

où l'on adopte la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés. Ainsi, tout en supposant sans perte de généralité que

$$\int_{h\omega} x_1\,da = \int_{h\omega} x_2\,da = 0 \quad \text{et} \quad \int_{h\omega} x_1x_2\,da = 0, \tag{8}$$

l'énergie totale (3) se réduit en

$$\begin{aligned} &J(m,\rho_1,\rho_2,\bar{R}) \\ &= \int_0^1 a_h\Big(\frac{\mu}{4}\|\bar{R}^TA_m + A_m^T\bar{R} - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(\bar{R}^TA_m - I)\big)^2\Big)dx_3 \\ &\quad + \int_0^1 \Big(J_\alpha^h\big(\frac{\mu}{4}\|\bar{R}^TA_\alpha + A_\alpha^T\bar{R}\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}(\bar{R}^TA_\alpha))^2\big) - f_r\cdot m \\ &\qquad - \rho_\alpha\,\bar{h}\cdot\bar{R}_\alpha\Big)\,dx_3 - g_r\cdot m(1) - \rho_\alpha(1)\,\bar{g}\cdot\bar{R}_\alpha(1) - \rho_\alpha(0)\,\bar{e}\cdot\bar{R}_\alpha(0), \end{aligned} \tag{9}$$

et l'équation différentielle (2) devient

$$\frac{d}{dt}\bar{R}(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\nu^+\Big(\big(A_m(t,x_3)\,\bar{R}(t,x_3)\big)^a\Big)\big(A_m(t,x_3)\,\bar{R}^T(t,x_3)\big)^a\,\bar{R}(t,x_3) \tag{10}$$

dans le cas où $B = B_{\text{méca}}$, alors qu'elle se réduit en

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{R}(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)(\bar{B}_{\text{thermo}})^a\,\bar{R}(t,x_3) \tag{11}$$

dans le cas où $B = B_{\text{thermo}}$. Notons que $\bar{B}_{\text{thermo}}$ désigne la moyenne de $B_{\text{thermo}}$ sur la section du $h\omega$ et que $(B_{\text{thermo}})^a$ est sa partie antisymétrique égale à

$$(\bar{B}_{\text{thermo}})^a = (2\mu + 3\lambda)(A_m\bar{R}^T)^a - \mu\left((A_m\bar{R}^T)^2\right)^a - \lambda\,\mathrm{tr}(A_m\bar{R}^T)(A_m\bar{R}^T)^a - \frac{J_\alpha^h}{a_h}\left(\mu\left((A_\alpha\bar{R}^T)^2\right)^a + \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha\bar{R}^T)(A_\alpha\bar{R}^T)^a\right). \quad (12)$$

Les équations (10) et (11) sont obtenues en moyennant sur la section $(h\omega)$ respectivement $B_{\text{méca}}$ et $B_{\text{thermo}}$ donnés par (4) et (5), et où $\widetilde{F}$ est donné par (7). Notons que $f_r$, $g_r$, $\bar{h}$, $\bar{g}$ et $\bar{e}$ sont les densités de forces réduites et ne dépendent que de la variable $x_3$.

**Remarque 1.** L'équation (11) fait intervenir les dérivées spatiales de $\bar{R}_1$ et de $\bar{R}_2$ contenues dans l'expression des termes $A_\alpha$. Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles, alors que l'équation (10) est une équation différentielle ordinaire. L'analyse mathématique de l'équation aux dérivées partielles du modèle thermodynamique étant trop compliquée, nous ne considérons dans notre étude théorique que l'équation différentielle réduite (10).

Ayant obtenu un problème minimisation-évolution unidimensionnel, il s'agit désormais de savoir s'il est bien posé.

## 1.3 Étude du problème de minimisation 1D

Dans le cas 3D-2D, P. Neff [32, 33] a pu éliminer analytiquement le coefficient $\rho$ décrivant le pincement de la plaque, en imposant l'égalité des forces sur le bord projetée selon le vecteur normal. Cette approche n'est pas utilisable dans le cas du passage 3D-1D. En effet, il est bien connu qu'un Ansatz de type Cosserat (6) n'est pas suffisamment riche pour donner naissance à des contraintes pouvant être équilibrées par des forces de surfaces générales sur le bord latéral du fil. Nous avons plutôt travaillé dans l'esprit de l'approche des multiplicateurs de Lagrange prônée par Antman [7], en minimisant l'énergie non seulement par rapport à $m$ (comme le cas de 3D-2D) mais également par rapport aux $\rho_\alpha$.

On a alors un premier résultat de minimisation avec

$$\Phi = \{m \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^3), m(0) = (0,0,0)\}$$

et

$$\Theta = \{\rho = (\rho_1,\rho_2) \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^2)\}.$$

**Théorème 2.** *Soit l'intervalle $I = [0,1]$. On suppose données les rotations $\bar{R} \in H^1(I, SO(3))$, et les forces extérieures $f_r, \bar{h} \in L^2(I;\mathbb{R}^3)$ et $g_r, \bar{g}, \bar{e}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe $X = (m,\rho_1,\rho_2) \in H^1(I;\mathbb{R}^5)$ qui minimise $J$ donnée par* (9) *sur* $\Phi \times \Theta := \bar{\Phi}$.

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur la méthode directe du calcul des variations [20]. En effet, la fonctionnelle $J$ est quadratique, continue, coercive et strictement convexe par rapport à $m$ et $\rho_\alpha$.

## 1.4 Étude du problème d'évolution 1D couplé avec la minimisation

Dans cette partie, on étudie l'existence et l'unicité du problème d'évolution réduit. On commence par écrire l'équation différentielle (10) comme suit :

$$\frac{d}{dt}\bar{R}(t) = G(\bar{R}(t)), \tag{13}$$

avec

$$G(\bar{R}) := g(m'(\bar{R}), \bar{R}) = \frac{1}{\eta}\nu^{+}(B_{m',\bar{R}})B_{m',\bar{R}}\bar{R}, \tag{14}$$

$$B_{m',\bar{R}} := (A_m\bar{R}^T)^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(\bar{R}_3 \wedge m')_3 & (\bar{R}_3 \wedge m')_2 \\ (\bar{R}_3 \wedge m')_3 & 0 & -(\bar{R}_3 \wedge m')_1 \\ -(\bar{R}_3 \wedge m')_2 & (\bar{R}_3 \wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

et

$$\nu^{+}(B_{m',\bar{R}}) = \left(1 + \|B_{m',\bar{R}}\|^{r+1}\right)^k \|B_{m',\bar{R}}\|^{r-1},$$

$r, k \geq 1$. On a le théorème suivant.

**Théorème 3.** *Soit $I = [0,1]$, on suppose $f_r, \bar{h} \in C^0([0,+\infty[; L^p(I;\mathbb{R}^3))$ et la condition initiale sur la rotation $\bar{R}_0 \in W^{1,p}(I;SO(3))$ avec $p \in [2,+\infty]$. Alors il existe un temps $T^\star$ maximal tel que le problème d'évolution réduit admette une unique solution locale en temps*

$$\bar{R} \in C^1([0,T^\star[; W^{1,p}(I;SO(3))).$$

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle (13) se montrent grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué à l'application $G$, c'est-à-dire à $g$. Il s'agit donc vérifier les deux points suivants :

– $G(\bar{R})$ est bien dans $W^{1,p}(]0,1[; M_3)$ pour $\bar{R} \in W^{1,p}(]0,1[; SO(3))$ ;

– $g$ est localement lipschitzien par rapport à $\bar{R}$ pour la norme de Sobolev $W^{1,p}$.

Pour ce faire, on écrit $g$ (donnée par (14)) comme la composée des trois applications suivantes,

$$\begin{aligned} h\colon W^{1,p}(]0,1[; M_3^a) &\longrightarrow W^{1,p}(]0,1[; M_3^a) \\ X &\mapsto \frac{1}{\eta}(1+\|X\|^{r+1})^k\|X\|^{r-1}X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\bar{R}}\colon W^{1,p}(]0,1[; M_3^a) &\longrightarrow W^{1,p}(]0,1[; M_3) \\ X &\mapsto X\bar{R}, \end{aligned}$$

et

$$K\colon W^{2,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)\times W^{1,p}(]0,1[;SO(3)) \longrightarrow W^{1,p}(]0,1[;M_3^a)$$
$$(\tau,R)\mapsto B_{\tau,R}.$$

On a bien $G(\bar{R}) := g(m',\bar{R}) = (L_{\bar{R}}\circ h\circ K)(m',\bar{R})$.

On montre que ces trois applications sont localement lipschitziennes ce qui implique que $g$ l'est également. Le caractère lipschitzien de $K$ est le plus délicat. Il se montre à partir des estimations des fonctions $m$ et $\rho_\alpha$ (par rapport à $\bar{R}$) obtenues à l'aide de la formulation variationnelle et des formes fortes de l'équation d'Euler-Lagrange du problème de minimisation réduit.

# 2 Résolution numérique

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution numérique des modèles viscoélastiques unidimensionnels, mécanique et thermodynamique, obtenus par une réduction dimensionnelle 3D-1D dans la partie I du travail. Il s'agit d'approcher un problème couplé minimisation-évolution, mais on commence par traiter séparément le problème de minimisation (qui est commun aux problèmes mécanique et thermodynamique) et le problème d'évolution. Ensuite, on résout numériquement le modèle viscoélastique par une méthode de splitting en utilisant les codes déjà implémentés pour les parties minimisation et évolution.

## 2.1 Implémentation du problème de minimisation 1D

Notre problème de minimisation se met sous forme variationnelle. On l'approche numériquement, à $\bar{R}$ et $t$ fixés, par la méthode des éléments finis. On découpe l'intervalle $]0,1[$ en $N+1$ petits intervalles de taille $h = 1/(N+1)$ et on note $x_i = ih$, $i = 0,\dots,N+1$, les sommets du maillage. Par souci de simplicité, on choisit des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ pour la déformation de la ligne moyenne $m$ du fil, ainsi que pour les coefficients $\rho_\alpha$ (qui permettent de décrire la déformation des sections du fil). Pour ce qui concerne les conditions aux limites, nous avons traité deux cas. D'une part, on fixe la ligne moyenne du fil à l'extrémité 0 en lui imposant une condition de type Dirichlet homogène, et on applique une densité de force sur l'autre extrémité du fil. D'autre part, on fixe la ligne moyenne aux deux extrémités, 0 et 1, par des conditions de Dirichlet homogène et non homogène respectivement. Notons que dans les deux cas, les coefficients $\rho_{\alpha,h}$ sont supposés libres en les deux extrémités ($m_h$ et $\rho_{\alpha,h}$ sont les inconnues discrétisées et $h$ est le pas de notre maillage). Pour cette raison, on a utilisé le terme « fixation » au lieu du terme standard « encastrement ». En effet, les sections aux extrémités bougent puisqu'on n'a imposé des conditions aux limites que sur la ligne moyenne du fil.

L'inconnue du problème que l'on note $X_h$ est donc un vecteur soit à $5N+7$ composantes dans le cas où l'on fixe $m_h$ juste à l'origine ($N+1$ pour $m_{i,h}$ et $N+2$

pour $\rho_{\alpha,h}$), soit à $5N+4$ composantes dans le cas correspondant à la fixation de $m_h$ aux deux extrémités ($N$ pour $m_{i,h}$ et $N+2$ pour $\rho_{\alpha,h}$). Ce vecteur correspond aux composantes des cinq inconnues dans la base des fonctions $\mathbb{P}_1$. On décide de les regrouper par groupe de cinq aux nœuds intérieurs du maillage autrement dit, en $x_i$ on a le vecteur $(\rho_{1h}(x_i), \rho_{2h}(x_i), m_{1h}(x_i), m_{2h}(x_i), m_{3h}(x_i))$. Pour trouver $X_h$, il s'agit d'écrire le problème variationnel (associé au problème de minimisation) sous la forme d'un système linéaire $A_h X_h = b_h$ où $A_h$ est une matrice carrée définie positive d'ordre $5N+7$ (ou $5N+4$) et $b_h$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{5N+7}$ (ou de $\mathbb{R}^{5N+4}$). Les calculs de $A_h$ et de $b_h$ se font en calculant des intégrales contenant la donnée $\bar{R}$. On discrétise donc $\bar{R}$ et l'on suppose que c'est une rotation donnée en chaque nœud du maillage.

## 2.2 Implémentation des problèmes d'évolution 1D

Il s'agit d'approcher deux problèmes d'évolution, mécanique et thermodynamique, découplés pour l'instant du problème de minimisation. Commençons par le cas le plus simple, le cas mécanique.

### Cas mécanique

L'équation différentielle ordinaire que l'on souhaite résoudre numériquement (à $m'$ fixé) est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\bar{R}(t) = \frac{1}{\eta}\left(1 + \|B_{m',\bar{R}}\|\right)^2 B_{m',\bar{R}}\bar{R}, \tag{16}$$

avec

$$B_{m',\bar{R}} := (A_m \bar{R}^T)^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(\bar{R}_3 \wedge m')_3 & (\bar{R}_3 \wedge m')_2 \\ (\bar{R}_3 \wedge m')_3 & 0 & -(\bar{R}_3 \wedge m')_1 \\ -(\bar{R}_3 \wedge m')_2 & (\bar{R}_3 \wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Nous effectuons cette résolution en se donnant une valeur de $m'$ (car dans ce paragraphe on découple le problème d'évolution de celui de minimisation), et à l'aide de la primitive « ode » du logiciel Scilab qui permet de résoudre numériquement des équations différentielles à valeurs matricielles. Pour cette raison, on écrit le second membre de l'équation (16) sous la forme d'une fonction ne dépendant que de $\bar{R}$.

On a pu tester l'efficacité de la primitive « ode » dans notre contexte, et ce en vérifiant que la solution approchée était proche d'une rotation. En effet, on sait d'après la partie I du travail que la solution du problème continu d'évolution est bien une rotation.

**Cas thermodynamique**

Le cas thermodynamique est plus compliqué que le cas mécanique puisque c'est une équation aux dérivées partielles qu'il faut approcher numériquement. Cette équation est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{R}(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)(\bar{B}_{\text{thermo}})^a\,\bar{R}(t,x_3) \tag{18}$$

où

$$\begin{aligned}(\bar{B}_{\text{thermo}})^a = (2\mu+3\lambda)(A_m\bar{R}^T)^a - \mu\big((A_m\bar{R}^T)^2\big)^a - \lambda\,\mathrm{tr}(A_m\bar{R}^T)(A_m\bar{R}^T)^a \\ - \frac{J^h_\alpha}{a_h}\Big(\mu\big((A_\alpha\bar{R}^T)^2\big)^a + \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha\bar{R}^T)(A_\alpha\bar{R}^T)^a\Big),\end{aligned} \tag{19}$$

$A_m = (\rho_1\bar{R}_1|\rho_2\bar{R}_2|m')$ et $A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha\bar{R}_\alpha)')$.

La résolution numérique (à $m$ et $\rho_\alpha$ donnés) se fait aussi par « ode », mais nécessite un peu plus de travail que celle du problème mécanique. En effet, le second membre de (18) contient les dérivées spatiales des première et deuxième colonnes de $\bar{R}$ (par l'intermédiaire des $A_\alpha$). On décide alors d'approcher $\bar{R}_1'$ (respectivement $\bar{R}_2'$) par la moyenne des valeurs que prend $\bar{R}_1$ (respectivement $\bar{R}_2$) à droite et à gauche de chaque nœud du maillage. Ainsi, on arrive à écrire le second membre de l'équation (18) en fonction de $\bar{R}$ seulement. Notons que la solution obtenue par « ode » est de même très proche d'une rotation en chaque point du maillage.

## 2.3 Résolution des problèmes couplés 1D

Cette partie de la thèse s'occupe de la résolution numérique des deux modèles viscoélastiques unidimensionnels, le modèle mécanique et le modèle thermodynamique. Cette résolution se fait par une méthode de « splitting ». On commence par calculer la solution du problème de minimisation en utilisant le code expliqué dans la Section 2.1. Cette solution sert à résoudre sur un pas de temps les problèmes d'évolution, et ce à l'aide des codes dont la démarche est donnée dans la section précédente. Ensuite, la solution de ce dernier problème sert non seulement à résoudre le problème de minimisation à l'étape suivante mais également comme donnée initiale pour l'appel suivant des codes des problèmes d'évolution.

On a testé les modèles mécanique et thermodynamique pour un matériau synthétique rigide et pour un matériau élastique souple. On remarque, pour les deux modèles, que le matériau élastique souple donne de meilleurs résultats (dans le sens où le résidu du problème de minimisation est plus petit et les solutions du problème d'évolution sont plus proches d'une rotation). En effet, ces modèles sont mieux adaptés aux fils minces de faible résistance à la flexion. Enfin, notons que les résultats du matériau élastique souple semblent plus satisfaisants dans le cas thermodynamique que dans le cas mécanique.

Première partie

# Étude théorique

# Introduction

# Introduction

Dans cette partie, nous réduisons deux problèmes tridimensionnels, le problème mécanique et le problème thermodynamique, en deux problèmes unidimensionnels. Ces modèles sont des problèmes couplés minimisation/évolution introduits par P. Neff. Leur réduction dimensionnelle s'effectue à l'aide d'un Ansatz de Cosserat. Les deux problèmes tridimensionnels couplés possèdent le même problème de minimisation, mais diffèrent dans la partie évolution. En fait, il s'agit dans le modèle mécanique d'une équation différentielle ordinaire non linéaire, tandis que dans le modèle thermodynamique c'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre qu'il faut étudier. Étudier l'existence et l'unicité du problème thermodynamique réduit semble hors de portée. Pour cette raison, l'analyse mathématique a été seulement faite pour le modèle mécanique réduit. Toutefois, dans la seconde partie du travail, nous nous sommes intéressés à l'implémentation numérique des deux modèles.

La méthode directe du calcul des variations est utilisée pour montrer que le problème réduit de minimisation est bien posé. Nous obtenons l'existence et l'unicité du problème d'évolution (mécanique), en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz dans des espaces de Banach. Cette étude nécessite la détermination de la formulation variationnelle de l'équation d'Euler-Lagrange ainsi que sa forme forte.

Chapitre 1

# Notations et présentation du problème

# Chapitre 1

# Notations et présentation du problème

Dans cette partie, on commence par donner quelques notations qui seront utilisées dans la suite de ce travail. Ensuite, on passera à l'introduction des modèles viscoélastiques tridimensionnels, mécanique et thermodynamique, que l'on souhaite par la suite réduire en deux modèles unidimensionnels.

## 1.1 Notations

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $u \cdot v$ et soit $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ la norme euclidienne associée. L'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ et à coefficients réels se note $M_{m,n}$. Pour $m = n$, on pose $M_{n,n} = M_n$. Dans la suite $m, n = 1, 2, 3$. Pour une matrice $m \times n$ et $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., m$, on note $A = (a_1|a_2|...|a_n)$ la matrice de $M_{m,n}$ dont la ième colonne est $a_i$. Soit $(e_i)$, $i = 1, ..., n$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $M_n$ du produit scalaire $A : B = \mathrm{tr}(A^T B)$ et l'on note $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$ la norme euclidienne associée, où $A^T$ est la transposée de $A$ et tr désigne l'opérateur de trace.

On note

$$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^T = A\},$$

$$A_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^T = -A\},$$

les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques respectivement, et $S_n^+$ l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques à déterminant strictement positif. Notons que les matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonales entre elles pour le produit scalaire sur $M_n$, et que $M_n$ est la somme orthogonale de $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, on rappelle que toute matrice $F$ peut se décomposer de façon unique en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique, notées $F^s$ et $F^a$ respectivement,

en posant

$$F^s = \frac{1}{2}(F + F^T) \text{ et } F^a = \frac{1}{2}(F - F^T).$$

Cette décomposition induit une décomposition de $M_n$ en somme directe orthogonale.

On note

$$O(n) = \{R \in M_n, R^T R = RR^T = I_n\}$$

le groupe des matrices orthogonales et

$$SO(n) = \{R \in O(n), \det R = 1\},$$

le groupe des rotations. Le théorème de factorisation polaire montre que toute matrice inversible $F$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$F = RU = VR,$$

où $R = \mathrm{pol}(F) \in O(n)$ est une matrice orthogonale et $U, V \in S_n^+$ sont des matrices symétriques définies positives données par

$$U = (F^T F)^{\frac{1}{2}} \text{ et } V = (FF^T)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\det F > 0$, on a de plus $R \in SO(n)$.

On note $T_R$ le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff. Les différentielles d'ordre 1 et 2 d'une fonction $W$ sur $M_n$ à valeurs scalaires sont notées $DW$ et $D^2W$ respectivement.

Une fonction $f\colon M_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifie la condition de Legendre-Hadamard si

$$\forall A \in M_{m,n}, \forall a \in \mathbb{R}^m, \forall b \in \mathbb{R}^n, D^2 f(A).(a \otimes b, a \otimes b) \geq 0.$$

On utilise les espaces fonctionnels classiques tels les espaces $L^p$, $W^{m,p}$ et $H^m$. Pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, on rappelle que $L^p(\Omega)$ désigne l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} < +\infty & \text{pour } p < +\infty \\ \\ \sup \mathrm{ess}(|f|) < +\infty & \text{pour } p = +\infty. \end{cases}$$

L'ensemble $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel, il est normé par $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ et complet pour cette norme. L'epace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ dont toutes les dérivées au sens des distributions $D^\alpha u$, d'ordre $|\alpha| \leq m$, sont des fonctions de $L^p(\Omega)$. $W^{m,p}$ est donc défini comme

$$\begin{aligned} &W^{m,p}(\Omega) \\ &\qquad = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}, \end{aligned}$$

et est muni de la norme « naturelle »

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big( \sum_{|\alpha \leq m|} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \Big)^{1/p}$$

pour $p \in [1, +\infty[$, et

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}$$

pour $p = +\infty$.

Par contre, dans tout ce travail, on munira pour simplifier l'espace $W^{m,p}$ par la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

qui est équivalente à la norme « naturelle » définie ci-dessus.

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.

Les fonctions $C^\infty$ à support compact sont dans $W^{m,p}(\Omega)$, et l'on note $W_0^{m,2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, pour $p < +\infty$. Lorsque $p = 2$, on notera $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$. L'espace $H^m(\Omega)$ est donc l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $m$ sont dans $L^2(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u|v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

et l'on a donc

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big)^{1/2}.$$

Finalement, tout au long de ce travail, sauf mention expresse du contraire, on adopte la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés. Les indices grecs prennent les valeurs 1 ou 2 et les indices latins les valeurs 1, 2, 3.

## 1.2 Le problème tridimensionnel

### 1.2.1 Présentation du modèle viscoélastique

Soit $\Omega$ un cylindre donné dans $\mathbb{R}^3$. On choisit un système de coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^3$ de façon à avoir $\Omega = \omega \times \{(0,0,x_3); 0 < x_3 < 1\}$, où $\omega$ est un ouvert bidimensionnel borné dans le plan $\{x_3 = 0\}$, de frontière lipschitzienne. On définit une famille de domaines minces,

$$\Omega_h := \{(x_1, x_2, x_3); (x_1/h, x_2/h, x_3) \in \Omega\} = h\omega \times ]0,1[,$$

où l'on suppose que le diamètre de $\omega$ est égal à 1, ce qui fait que le diamètre de la section $h\omega$ est égal à $h$, $h$ étant un paramètre suffisamment petit $(h \ll 1)$ et strictement positif.

Ces domaines minces sont pris comme configurations de référence d'une famille de fils viscoélastiques non linéaires et homogènes, modélisés par un milieu continu généralisé, le milieu de Cosserat. L'évolution de ce milieu est caractérisée par un champ de déplacement et un champ de microrotation indépendants l'un de l'autre. La microrotation décrit la rotation par rapport à une configuration initiale d'un trièdre orthonormé attaché à chaque point matériel. Ce trièdre est en général formé de vecteurs non matériels. En particulier, la microrotation ne coïncide en général pas avec la rotation continue associée au gradient de la déformation. Dans le cas d'un polycristal, la microrotation peut représenter une moyenne de rotation locale du réseau cristallin dans chaque grain.

Soit $\varphi_h \colon [0,T] \times \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la déformation d'un fil au cours du temps. À $t \in [0,T]$ fixé, celle-ci doit être en particulier localement injective sur $\Omega_h$ et conserver l'orientation dans $\overline{\Omega}_h$ pour être physiquement admissible. Ces deux contraintes se traduisent par la condition

$$\det \nabla \varphi_h(t,x) > 0$$

pour tout $x \in \Omega_h$ et $t \in [0,T]$.

Comme nous considérons la théorie de Cosserat, nous pouvons utiliser une décomposition multiplicative du gradient de la déformation du type

$$F_h := \nabla \varphi_h = R_h U$$

où $U$, appelé le premier tenseur de Cosserat, est une matrice inversible non symétrique définie positive. Cette décomposition n'est donc pas la décomposition polaire. Pour ce qui concerne $R_h$, il s'agit d'une microrotation (définie plus haut) indépendante de $F_h$, appelée tenseur de rotation de Cosserat ($R_h \in SO(3)$) et c'est une quantité macroscopique homogénéisée dans le sens suivant. Les expériences [21, 27] montrent que dans un polycristal, les rotations des grains individuels peuvent différer considérablement de la rotation continue qui est la partie polaire du gradient de la déformation macroscopique. La microrotation représente une moyenne, à une échelle intermédiaire, de ces rotations des grains. Notons que cette microrotation satisfera sa propre équation d'évolution (voir (1.2)).

Le problème que nous considérons est un problème de couplage tridimensionnel minimisation-évolution introduit par P. Neff dans [33]. Ce modèle viscoélastique diffère d'une part des modèles en grandes déformations où les déformations et les rotations sont supposées grandes, et d'autre part des modèles infinitésimaux où les gradients du déplacement et les rotations sont très petits. En fait, il s'agit d'un modèle « géométriquement exact avec des petites déformations », pour lequel les rotations sont finies et les déformations sont petites seulement au niveau de la loi de comportement car le modèle est matériellement indifférent (voir Chapitre 2).

Notre objectif est l'étude du comportement d'un fil que l'on identifie à un solide tridimensionnel occupant la configuration de référence $\Omega_h$. On note $\Gamma_h^0 = (h\omega) \times \{0\}$ la base de $\Omega_h$, $\Gamma_h^1 = (h\omega) \times \{1\}$ la section correspondante à $x_3 = 1$ et $\Gamma_h =$

$\partial(h\omega)\times]0,1[$ la surface latérale du fil. On suppose, pour simplifier, que ce fil est soumis à des forces mortes volumiques de densité $f$ sur l'intérieur de $\Omega_h$, à des forces mortes surfaciques de densité $N$ sur la partie latérale et à des forces de densités $g$ sur $\Gamma_h^1$ et $e$ sur $\Gamma_h^0$.

L'élément de volume de $\Omega_h$ et l'élément de surface de son bord latéral sont notés $dx = dx_1dx_2dx_3$ et $dS$ respectivement, tandis que $da = dx_1dx_2$ désigne l'élément de surface de la section $\omega$. On définit l'espace des déformations admissibles

$$\Phi_h = \{\varphi \in W^{1,p}(\Omega_h;\mathbb{R}^3);\, \det\nabla\varphi > 0 \,\text{p.p dans}\, \Omega_h \,\text{et}\, \varphi(x) = x \,\text{sur}\, \Gamma_h^0\},$$

pour un certain $p \in ]1,+\infty[$.

Le modèle tridimensionnel introduit par P. Neff, consiste à trouver un couple $(\varphi_h, R_h)$ où d'une part la déformation $\varphi_h\colon [0,T]\times\Omega_h \to \mathbb{R}^3$ est solution d'un problème de minimisation de la forme :

$$\text{à } t \text{ fixé, chercher}\, \varphi_h \in \Phi_h \,\text{telle que}\, J_h(\varphi_h, R_h) = \inf_{\psi_h\in\Phi_h} J_h(\psi_h, R_h), \tag{1.1}$$

et d'autre part la microrotation $R_h\colon [0,T]\times\Omega_h \to SO(3)$ est solution du problème d'évolution

$$\frac{d}{dt}R_h(t) = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((B_h)^a\big)\cdot(B_h)^a R_h(t), \tag{1.2}$$

où $B_h$ est une matrice carrée d'ordre 3 dépendant de $F_h = \nabla\varphi_h$ et de $R_h$ et donnée selon P. Neff soit par une expression dite mécanique $B_{\text{méca}}$, soit par une expression dite thermodynamique $B_{\text{thermo}}$,

$$B_{\text{méca}} = F_h R_h^T \tag{1.3}$$

et

$$B_{\text{thermo}} = (2\mu+3\lambda)F_hR_h^T - \mu(F_hR_h^T)^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(F_hR_h^T)F_hR_h^T. \tag{1.4}$$

où $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ sont les constantes de Lamé du matériau.

L'énergie totale $J_h$ est

$$J_h(\varphi_h, R_h) = I_h(\varphi_h, R_h) - l_h(\varphi_h), \tag{1.5}$$

où $I_h$ désigne l'énergie interne

$$I_h(\varphi_h, R) = \int_{\Omega_h} W(\nabla\varphi_h, R_h)\,dx, \tag{1.6}$$

tandis que la forme linéaire $l_h$ correspond au travail des forces extérieures

$$l_h(\varphi_h) = \int_{\Omega_h} f\cdot\varphi_h\,dx + \int_{\Gamma_h} N\cdot\varphi_h\,dS + \int_{\Gamma_h^1} g\cdot\varphi_h\,da + \int_{\Gamma_h^0} e\cdot\varphi_h\,da. \tag{1.7}$$

Pour ce qui concerne l'équation (1.2), le terme $\nu^+ := \frac{1}{\eta}\nu^+\big((B_h)^a\big)$ est une fonction à valeurs scalaires représentant la viscosité élastique dans le domaine élastique avec

$$\nu^+\big((B_h)^a\big) = \Big(1 + \Big\|\frac{(B_h)^a}{\sigma_0}\Big\|^{r+1}\Big)^k \cdot \Big\|\frac{(B_h)^a}{\sigma_0}\Big\|^{r-1},$$

$r,k \geq 1$ et $\eta$ est le produit d'un temps par une pression de référence, exprimé donc en MPa.s où s désigne la seconde et MPa le mégapascal ([32]). La constante $\sigma_0$ est une pression de référence que l'on se donne et se mesure donc en MPa. Comme l'unité de mesure de $B_h$ (donc de sa partie antisymétrique $(B_h)^a$) est aussi le mégapascal (contenant les constantes de Lamé), on a donc l'homogénéité de $\nu^+\big((B_h)^a\big)$ et le rapport $\dfrac{(B_h)^a}{\eta}$ s'exprime alors en 1/s. Ainsi, on en déduit que le second membre du problème d'évolution ((1.2)) est dimensionnellement homogène à l'inverse d'un temps, ce qui est cohérent avec être égal à la dérivée d'une rotation par rapport au temps.

Il reste à identifier la forme de la densité d'énergie interne $W$. Il est connu que la densité d'énergie d'un matériau hyperélastique, homogène et isotrope exprimée en fonction des constantes de Lamé $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ ([14]) peut s'écrire sous la forme

$$W(E) = \mu\,\mathrm{tr}(E^2) + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}E)^2 + \circ(\|E\|^2),$$

où $E = \frac{1}{2}(F^TF - I)$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Ainsi, en fonction du gradient de la déformation $F$, cette densité s'écrit

$$W(F) = \frac{\mu}{4}\|F^TF - I\|^2 + \frac{\lambda}{8}(\mathrm{tr}(F^TF - I))^2 + \circ(\|F^TF - I\|^2)$$

car $\mathrm{tr}(E^2) = \mathrm{tr}(E^TE) := \|E\|^2$, $E$ étant symétrique. Les déformations élastiques sont supposées petites, ce qui rend la quantité $\|F^TF - I\|$ également petite ($F = F_e$). Il vient donc

$$W(F) = \frac{\mu}{4}\|F^TF - I\|^2 + \frac{\lambda}{8}(\mathrm{tr}(F^TF - I))^2. \tag{1.8}$$

Notre modèle a pour but d'intégrer des rotations élastiques $R$. Le tenseur d'élasticité $D^2W$ est indépendant de la déformation $\varphi$. Cette propriété permet donc l'existence d'une certaine configuration $(\varphi, R) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, où la rotation est considérée comme un champ indépendant de la déformation ([31]). Ainsi en utilisant la décomposition $F = R + (F - R)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|F^TF - I\|^2 &= \|\big(R^T + (F^T - R^T)\big)\big(R + (F - R)\big) - I\|^2 \\ &\approx \|R^TF + F^TR - 2I\|^2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

puisque $R^TR = I$ et en éliminant les termes quadratiques en $(F - R)$ car il existe une rotation $R$ qui rend petite la norme $\|F - R\|$ quand $\|F^TF - I\|$ est petite. En effet, soit la décomposition polaire $F = R_pU$, avec $U$ une matrice symétrique définie positive

et $R_p$ une rotation. On a ainsi,

$$\begin{aligned}
\|U-I\|^2 &= \|R_p^T F - I\|^2 \\
&:= \operatorname{tr}\big((F^T R_p - I)(R_p^T F - I)\big) \\
&= \operatorname{tr}(F^T F - F^T R_p - R_p^T F - I) \\
&= \operatorname{tr}\big((F^T - R_p^T)(F - R_p)\big) \\
&:= \|F - R_p\|^2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Or $F^T F$ et $U$ sont symétriques donc diagonalisables, il vient donc que

$$\|F^T F - I\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tau_i - 1)^2 \quad \text{et} \quad \|U - I\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - 1)^2,$$

où $\tau_i$ sont les valeurs propres de $F^T F$ et $\sigma_i$ sont celles de $U$. Notons que $U$ est une matrice symétrique définie positive, ses valeurs propres $\sigma_i$ sont donc strictement positives. Comme $U^2 = F^T F$, on en déduit donc que $\sigma_i = \sqrt{\tau_i}$. Enfin, si la norme $\|F^T F - I\|^2$ est petite, alors la quantité $(\tau_i - 1)^2$ l'est également, et par suite à l'aide de l'inégalité $(\sqrt{\tau_i} - 1)^2 \leq (\tau_i - 1)^2$, on montre que les termes $(\sigma_i - 1)^2$ et donc $\|U - I\|^2$ sont petits. Ainsi, par l'égalité (1.10), on trouve le résultat voulu autrement dit, que le terme $\|F - R_p\|$ est petit dès que $\|F^T F - I\|$ l'est. Comme on s'intéresse à des situations où la rotation indépendante $R$ est proche de celle de la décomposition polaire (notée $R_p$), il est donc raisonnable de supposer que $\|F - R\|$ est petite quand $\|F^T F - I\|$ est petite.

Pour ce qui concerne le terme contenant la trace, on a de même

$$(\operatorname{tr}(F^T F - I))^2 = (\operatorname{tr}(R^T F + F^T R - 2I))^2. \tag{1.11}$$

En substituant (1.9) et (1.11) dans (1.8), il vient

$$W(F,R) = \frac{\mu}{4}\|R^T F + F^T R - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{8}(\operatorname{tr}(R^T F + F^T R - 2I))^2. \tag{1.12}$$

On convient finalement de prendre la densité d'énergie apparaissant dans (1.6) égale à

$$W(F_h, R_h) = \frac{\mu}{4}\|R_h^T F_h + F_h^T R_h - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{8}\big(\operatorname{tr}(R_h^T F_h + F_h^T R_h - 2I)\big)^2. \tag{1.13}$$

Le modèle viscoélastique mécanique (respectivement thermodynamique) est le problème couplé minimisation-évolution formé par les équations (1.1) et (1.2) avec $B_h = B_{\text{méca}}$ (respectivement $B_h = B_{\text{thermo}}$).

### 1.2.2 Dérivation des problèmes d'évolution

Dans ce paragraphe, nous donnons un petit aperçu de la dérivation des équations d'évolution dans les cas mécanique et thermodynamique, et ce tout en supposant que le gradient de déformation $F_h$ est indépendant du temps. On ne détaillera que la dérivation du problème d'évolution thermodynamique, car celle du problème mécanique est simple. Il s'agit juste d'utiliser le fait que la partie polaire de $F_h$ minimise sa distance à l'ensemble des rotations. Pour ce qui concerne le cas thermodynamique, l'idée est de trouver une équation d'évolution pour $R_h(t)$ telle que

- $R_h(t)$ soit une rotation autrement dit, que l'on ait $R_h(t)^T R_h(t) = I$, et donc que la matrice $\dot{R}_h(t)R_h(t)^T$ soit antisymétrique et s'écrive alors de la forme $\dot{R}_h(t)R_h(t)^T = (A)^a$ où $\dot{R}_h$ est la dérivée de $R_h$ par rapport au temps $t$, et $(A)^a$ désigne la partie antisymétrique d'une matrice $A$ que l'on souhaite trouver,
- l'évolution de $R_h(t)$ assure la décroissance de l'énergie $W$ en question autrement dit, que l'on ait
$$\frac{d}{dt}W(F_h, R_h(t)) \leq 0, \tag{1.14}$$
pour $F_h$ fixé en temps.

Commençons donc par calculer la dérivée par rapport au temps de l'énergie (1.13). On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\mu}{4}\|(R_h^T F_h - I)^s\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(F_h^T R_h - I)\big)^2\Big) \\ = \frac{\mu}{4}\frac{d}{dt}\Big(\|(R_h^T F_h - I)^s\|^2\Big) + \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\Big(\big(\operatorname{tr}(F_h^T R_h - I)\big)^2\Big).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\|(R_h^T F_h - I)^s\|^2\Big) &= 2(R_h^T F_h + F_h^T R_h - 2I) : (\dot{R}_h^T F_h + F_h^T \dot{R}_h) \\ &= 4(R_h^T F_h + F_h^T R_h - 2I) : (F_h^T \dot{R}_h)\end{aligned} \tag{1.16}$$

car $R_h^T F_h + F_h^T R_h - 2I$ est symétrique, et l'on a par définition du produit scalaire matriciel et par les propriétés de la trace, l'égalité $A : B = A^T : B^T$ pour toutes matrices carrées $A$ et $B$ de même ordre. Ainsi, en utilisant le fait que $R_h$ est une rotation et les propriétés de la trace, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\|(R_h^T F_h - I)^s\|^2\Big) &= 4\big((R_h^T F_h + F_h^T R_h - 2I)R_h^T\big) : (F_h^T \dot{R}_h R_h^T) \\ &:= 4\operatorname{tr}\big(R_h(R_h^T F_h + F_h^T R_h - 2I)F_h^T \dot{R}_h R_h^T\big) \\ &= 4\operatorname{tr}\big((F_h F_h^T + R_h F_h^T R_h F_h^T - 2R_h F_h^T)\dot{R}_h R_h^T\big) \\ &:= 4(F_h F_h^T + F_h R_h^T F_h R_h^T - 2F_h R_h^T) : (\dot{R}_h R_h^T).\end{aligned} \tag{1.17}$$

De même, on calcule le second terme du second membre de (1.15) et l'on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\big(\mathrm{tr}(F_h^T R_h - I)\big)^2\Big) &:= \frac{d}{dt}\Big((F_h^T R_h - I) : I\Big)^2 \\
&= 2\big((F_h^T R_h - I) : I\big)\big((F_h^T \dot{R}_h) : I\big) \\
&:= 2\big((F_h^T R_h) : I - 3\big)\,\mathrm{tr}(\dot{R}_h^T F_h) \\
&= 2\big((F_h^T R_h) : I - 3\big)\,\mathrm{tr}(F_h \dot{R}_h^T) \\
&= 2\big((F_h^T R_h) : I - 3\big)\,\mathrm{tr}(F_h R_h^T R_h \dot{R}_h^T) \\
&:= 2\big((F_h^T R_h) : I - 3\big)(F_h R_h^T) : (\dot{R}_h R_h^T).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

En substituant (1.17) et (1.18) dans (1.15), il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\mu}{4}\|(R_h^T F_h - I)^s\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(F_h^T R_h - I)\big)^2\Big) \\
= \Big(\mu(F_h F_h^T + F_h R_h^T F_h R_h^T - 2F_h R_h^T) \\
+ \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big) F_h R_h^T\Big) : (\dot{R}_h R_h^T).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Le choix

$$\dot{R}_h R_h^T = -\Big(\mu(F_h F_h^T + F_h R_h^T F_h R_h^T - 2F_h R_h^T) + \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big) F_h R_h^T\Big)^a \tag{1.20}$$

assure la décroissance de l'énergie. En effet, avec un tel choix, (1.19) devient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\mu}{4}\|(R_h^T F_h - I)^s\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(F_h^T R_h - I)\big)^2\Big) \\
= -\Big\|\Big(\mu(F_h F_h^T + F_h R_h^T F_h R_h^T - 2F_h R_h^T) + \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big) F_h R_h^T\Big)^a\Big\|^2.
\end{aligned}$$

En effet, l'ensemble des matrices est égal à la somme orthogonale de l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques ($M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R})$). En multipliant (1.20) par $R_h$ à droite et par $R_h^T$ à gauche, et ce tout en utilisant toujours le fait que $R_h$ est une rotation, on obtient

$$\begin{aligned}
R_h^T \dot{R}_h = -R_h^T\Big(\mu(F_h F_h^T + F_h R_h^T F_h R_h^T - 2F_h R_h^T) \\
+ \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big) F_h R_h^T\Big)^a R_h.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Par suite, l'on trouve

$$R_h^T \dot{R}_h = -\Big(\mu(R_h^T F_h R_h^T F_h - 2R_h^T F_h) + \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big) R_h^T F_h\Big)^a, \tag{1.22}$$

car $R_h^T(A)^a R_h = (R_h^T A R_h)^a$ pour toute matrice $A$. Soit,

$$\begin{aligned}
\dot{R}_h &= -R_h\Big(\mu(R_h^T F_h R_h^T F_h - 2R_h^T F_h) + \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big)R_h^T F_h\Big)^a \\
&= -R_h\Big(\mu(R_h^T F_h R_h^T F_h - 2R_h^T F_h) + \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big)R_h^T F_h\Big)^a R_h^T R_h \qquad (1.23)\\
&= -\Big(\mu(F_h R_h^T F_h R_h^T - 2F_h R_h^T) + \lambda\big((F_h^T R_h) : I - 3\big)F_h R_h^T\Big)^a R_h,
\end{aligned}$$

toujours par le fait que $R_h(A)^a R_h^T = (R_h A R_h^T)^a$ pour toute matrice $A$.

On termine ce chapitre par une remarque sur le comportement à l'infini de la solution $R_h(t)$ des problèmes d'évolution mécanique et thermodynamique (pour un gradient de déformation fixé en temps).

**Remarque 1.2.1.** P. Neff a montré que la solution $R_h(t)$ du problème d'évolution mécanique converge vers la partie polaire du gradient de la déformation que l'on note $R_p$ quand $t \to +\infty$, ce qui n'est pas le cas pour le problème d'évolution thermodynamique. En effet, il montre que la solution dans ce dernier cas reste proche de $R_p$ (voir [31]).

L'idée de la convergence dans le cas mécanique est de montrer tout d'abord que pour un gradient de déformation $F$ fixé en temps, le problème d'évolution mécanique admet une unique solution globale en temps $R(t) \in SO(3)$. Ensuite, il s'agit de vérifier que la fonction $\frac{1}{2}\|F^T R - I\|^2$ est une fonction de Lyapunov ayant la partie polaire $R_p$ de $F$ comme unique minimiseur. En effet, on a

$$\|F^T R - I\|^2 = \|F^T R - R^T R\|^2 = \|(F - R)^T R\|^2 = \|F - R\|^2.$$

Or il est bien connu que la partie polaire de $F$ minimise $\|F - R\|^2$ dans $SO(3)$. Enfin, en partant d'une donnée intiale $R_0 = R(0)$ vérifiant les conditions $R(0) \neq I$ et $\|R(0) - I\| < 8$, P. Neff montre que la fonction de Lyapunov décroît strictement et il en déduit donc que $R(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} R_p$.

Chapitre 2

# Réduction dimensionnelle 3D-1D

# Chapitre 2

# Réduction dimensionnelle 3D-1D

Notre but est de réduire le problème tridimensionnel (3D) couplé minimisation-évolution, introduit dans le Chapitre 1, en un problème unidimensionnel (1D). Cette réduction dimensionnelle est effectuée à l'aide de la théorie spéciale des fils de Cosserat. Cette théorie est basée sur l'introduction des vecteurs directeurs.

## 2.1 Ansätze

On cherche à déterminer, quand $h$ est petit, une approximation raisonnable en un sens formel du couple $(\varphi_h, R_h)$ solution du problème tridimensionnel couplé. On note $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{R})$ une telle approximation ne dépendant essentiellement que de quantités unidimensionnelles. On considère ainsi la théorie spéciale de Cosserat ([7, 8]) où les vecteurs directeurs sont supposés orthogonaux et l'on fait l'Ansatz cinématique suivant,

$$\widetilde{\varphi}(t,x_1,x_2,x_3) = m(t,x_3) + \rho_1(t,x_3)d_1(t,x_3)x_1 + \rho_2(t,x_3)d_2(t,x_3)x_2. \tag{2.1}$$

Ici, la déformation $\widetilde{\varphi}$ est donc considérée comme la composée de la déformation de la ligne moyenne du fil, $m\colon [0,T]\times]0,1[\to\mathbb{R}^3$, et de la déformation de la section $(h\omega)$ décrite par les deux champs de vecteurs, $d_\alpha\colon [0,T]\times]0,1[\to S^2$. Ces vecteurs directeurs vérifient $d_\alpha\cdot d_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Notons que les fonctions $\rho_\alpha\colon [0,T]\times]0,1[\to\mathbb{R}$ permettent de prendre en considération des effets de Poisson dans la section.

Par ailleurs, on introduit un second Ansatz pour les rotations. On suppose donc que la rotation $\widetilde{R}$ est indépendante des variables $x_1$ et $x_2$, autrement dit, que l'on a

$$\widetilde{R}(t,x_1,x_2,x_3) = R(t,x_3), \tag{2.2}$$

où $R : [0,T]\times]0,1[\longrightarrow SO(3)$.

Dans les calculs qui suivent, on ne notera plus la dépendance des diverses quantités par rapport au temps quand celle-ci n'est pas pertinente.

L'Ansatz (2.1) sur la déformation nous permet d'approcher son gradient.

## 2.2 Calcul du gradient de la déformation approchée

Par définition, on a que le gradient de la déformation approchée qu'on note $\widetilde{F} := \nabla\widetilde{\varphi}$ est donné par

$$\nabla\widetilde{\varphi} = (\partial_1\widetilde{\varphi}|\,\partial_2\widetilde{\varphi}|\,\partial_3\widetilde{\varphi}).$$

Ainsi, à l'aide de l'expression de $\widetilde{\varphi}$ donnée par (2.1), on trouve

$$\begin{aligned}\nabla\widetilde{\varphi}(x_1,x_2,x_3) &= \big((\rho_1 d_1)(x_3)|\,(\rho_2 d_2)(x_3)|\,m'(x_3) + (\rho_\alpha d_\alpha)'(x_3)x_\alpha\big)\\ &= \big((\rho_1 d_1)(x_3)|\,(\rho_2 d_2)(x_3)|\,m'(x_3)\big) + \big(0|\,0|\,(\rho_\alpha d_\alpha)'(x_3)\big)x_\alpha,\end{aligned}$$

où $'$ désigne la dérivée par rapport à $x_3$. Ainsi en notant $A_m = \big(\rho_1 d_1|\,\rho_2 d_2|\,m'\big)$ et $A_\alpha = \big(0|\,0|\,(\rho_\alpha d_\alpha)'\big)$, on obtient

$$\widetilde{F} := \nabla\widetilde{\varphi} = A_m + A_\alpha x_\alpha. \tag{2.3}$$

À partir de l'Ansatz (2.1), on fait le choix suivant des vecteurs directeurs de la section du fil.

## 2.3 Choix des directeurs

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que les deux premiers vecteurs colonne de la rotation $R$ et les deux directeurs $d_1$ et $d_2$ sont couplés par la relation

$$d_\alpha = R_\alpha. \tag{2.4}$$

Cette hypothèse est raisonnable pour $h$ petit. En effet, d'après la section précédente, on sait que le gradient de la déformation $\widetilde{\varphi}$ est égal à

$$\nabla\widetilde{\varphi}(x_1,x_2,x_3) = \big(\rho_1 d_1|\,\rho_2 d_2|\,m'\big) + \big(0|\,0|\,(\rho_\alpha d_\alpha)'\big)x_\alpha. \tag{2.5}$$

Dans le cas où le diamètre $h$ de la section transverse du fil est suffisamment petit, nous pouvons nous placer au point $(0,0,x_3)$ et par suite (2.5) devient

$$\nabla\widetilde{\varphi}(0,0,x_3) = \big(\rho_1 d_1|\,\rho_2 d_2|\,m'\big).$$

Par un simple calcul, nous obtenons le tenseur de Cauchy

$$\begin{aligned}C &:= \big(\nabla\widetilde{\varphi}(0,0,x_3)\big)^T\,\nabla\widetilde{\varphi}(0,0,x_3)\\ &= \begin{pmatrix}\rho_1^2 & 0 & \rho_1\, d_1\cdot m'\\ 0 & \rho_2^2 & \rho_2\, d_2\cdot m'\\ \rho_1\, d_1\cdot m' & \rho_2\, d_2\cdot m' & |m'|^2\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.6}$$

les vecteurs directeurs étant orthonormés, c'est-à-dire, $d_\alpha \cdot d_\beta = \delta_{\alpha\beta}$.

Dans la suite, nous supposons que le cisaillement, c'est-à-dire les quantités $\rho_\alpha d_\alpha \cdot m'$, est suffisamment petit voire négligeable, ce qui est raisonnable dans la mesure où $h$ est petit. Ainsi, la matrice $C$ devient presque diagonale et prend la forme

$$C \simeq \begin{pmatrix} \rho_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & |m'|^2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Par ailleurs, la décomposition polaire du gradient de la déformation nous donne

$$\nabla\widetilde{\varphi} = R_p U, R_p \in SO(3), U \text{ symétrique définie positive.} \tag{2.8}$$

Soit,

$$R_p = \nabla\widetilde{\varphi} U^{-1} = \Big(\frac{\rho_1}{|\rho_1|} d_1 \Big| \frac{\rho_2}{|\rho_2|} d_2 \Big| \frac{1}{|m'|} m'\Big), \tag{2.9}$$

où,

$$U = C^{1/2} = \begin{pmatrix} |\rho_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\rho_2| & 0 \\ 0 & 0 & |m'| \end{pmatrix},$$

par (2.8) et par le fait que $R_p^T R_p = I$ et $U = U^T$.

Enfin, on a bien par (2.9) que les deux premières colonnes de la matrice de rotation $R_p$ coïncident à un signe près avec les directeurs $d_1$ et $d_2$ respectivement. Notre but étant que la microrotation indépendante $R$ soit proche de la rotation continue $R_p$, le choix $d_\alpha = \pm R_\alpha$ semble donc convenable. Dans toute la suite, on prendra $d_\alpha = R_\alpha$. Notons que ce choix présente également l'avantage de diminuer le nombre de fonctions inconnues. Enfin, puisqu'on considère un corps mince, il est donc raisonnable que la microrotation soit liée de façon plus forte à la déformation macroscopique dans les directions minces, ce qui justifie davantage l'hypothèse $d_\alpha = R_\alpha$.

Ces Ansätze et ce choix des directeurs nous permettent en un premier temps de réduire le problème 3D de minimisation.

## 2.4 Réduction du problème de minimisation

Pour réduire le problème 3D de minimisation en un problème 1D, il s'agit de réduire l'énergie totale (1.5), autrement dit l'énergie interne (1.6) ainsi que les termes de forces (1.7).

### 2.4.1 Réduction de l'énergie interne

Rappelons l'expression de l'énergie interne (3D) du système :

$$I_h(\varphi_h, R_h) = \int_{\Omega_h} \Big( \frac{\mu}{4} \|R_h^T \nabla\varphi_h + \nabla\varphi_h{}^T R_h - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{8} \big( \mathrm{tr}(R_h^T \nabla\varphi_h + \nabla\varphi_h{}^T R_h - 2I) \big)^2 \Big)\, dx. \quad (2.10)$$

À partir des Ansätze sur la déformation tridimensionnelle du fil (2.1) et sur les rotations (2.2), on approche cette énergie 3D par l'énergie suivante

$$I(\widetilde{\varphi}, R) = \int_{\Omega_h} \Big( \frac{\mu}{4} \|R^T \nabla\widetilde{\varphi} + \nabla\widetilde{\varphi}^T R - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{8} \big( \mathrm{tr}(R^T \nabla\widetilde{\varphi} + \nabla\widetilde{\varphi}^T R - 2I) \big)^2 \Big)\, dx, \quad (2.11)$$

obtenue en remplaçant le gradient de déformation et la rotation par les expressions correspondantes résultant des Ansätze initiaux.

Ayant déjà calculé le gradient de la déformation approchée, $\nabla\widetilde{\varphi}$, on approche maintenant l'énergie élastique.

#### Calcul de l'énergie élastique approchée

Dans la suite, on suppose que le système de coordonnées $Ox_1x_2x_3$ est tel que $Ox_1x_2$ soit un système principal d'inertie pour $(h\omega)$. Cela signifie que l'axe $Ox_3$ passe par le centre de gravité de chaque section transverse $(h\omega) \times \{x_3\}$, autrement dit que

$$\int_{h\omega} x_1\, da = \int_{h\omega} x_2\, da = 0, \quad (2.12)$$

et que

$$\int_{h\omega} x_1 x_2\, da = 0. \quad (2.13)$$

Un tel choix est toujours possible sans perte de généralité.

En tenant compte de l'approximation que l'on souhaite définir, l'expression de la densité d'énergie interne (1.8) s'écrit

$$\begin{aligned} W(\widetilde{F}, \widetilde{R}) &= \frac{\mu}{4} \|\widetilde{R}^T \widetilde{F} + \widetilde{F}^T \widetilde{R} - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{8} \big( \mathrm{tr}(\widetilde{R}^T \widetilde{F} + \widetilde{F}^T \widetilde{R} - 2I) \big)^2 \\ &= \mu \|(\widetilde{R}^T \widetilde{F})^s - I\|^2 + \frac{\lambda}{2} \big( \mathrm{tr}(\widetilde{R}^T \widetilde{F} - I) \big)^2, \end{aligned}$$

car $\mathrm{tr}((\widetilde{R}^T \widetilde{F})^s) = \mathrm{tr}(\widetilde{R}^T \widetilde{F})$, où l'on rappelle que $(.)^s$ désigne la partie symétrique d'une matrice donnée. Calculons le membre de droite de cette égalité.

D'une part, on a

$$
\begin{aligned}
&\|(\widetilde{R}^T\,\widetilde{F})^s - I\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\|\widetilde{R}^T A_m + A_m^T\widetilde{R} + (\widetilde{R}^T A_1 + A_1^T\widetilde{R})x_1 + (\widetilde{R}^T A_2 + A_2^T\widetilde{R})x_2 - 2I\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\|\widetilde{R}^T A_m + A_m^T\widetilde{R} - 2I\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\|\widetilde{R}^T A_1 + A_1^T\widetilde{R}\|^2 x_1^2 + \frac{1}{2}(\widetilde{R}^T A_m + A_m^T\widetilde{R} - 2I) : (\widetilde{R}^T A_1 + A_1^T\widetilde{R})\,x_1 \\
&\quad + \frac{1}{4}\|\widetilde{R}^T A_2 + A_2^T\widetilde{R}\|^2 x_2^2 + \frac{1}{2}(\widetilde{R}^T A_m + A_m^T\widetilde{R} - 2I) : (\widetilde{R}^T A_2 + A_2^T\widetilde{R})\,x_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\widetilde{R}^T A_1 + A_1^T\widetilde{R}) : (\widetilde{R}^T A_2 + A_2^T\widetilde{R})\,x_1 x_2.
\end{aligned}
$$

On pose $E_m = (\widetilde{R}^T A_m)^s$ et $E_\alpha = (\widetilde{R}^T A_\alpha)^s$. Ainsi on obtient,

$$
\|(\widetilde{R}^T\,\widetilde{F})^s - I\|^2 = \|E_m - I\|^2 + 2(E_m - I) : E_\alpha\, x_\alpha + E_\alpha : E_\beta\, x_\alpha x_\beta. \tag{2.14}
$$

D'autre part,

$$
\big(\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T\,\widetilde{F} - I)\big)^2 = \big(\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_m + \widetilde{R}^T A_\alpha x_\alpha - I)\big)^2.
$$

Soit en développant,

$$
\begin{aligned}
\big(\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T\,\widetilde{F} - I)\big)^2 = \big(\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_m - I)\big)^2 &+ 2\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_m - I)\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_\alpha)x_\alpha \\
&+ \operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_\alpha)\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_\beta)x_\alpha x_\beta.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

On intègre alors la densité d'énergie élastique interne sur le domaine fin $\Omega_h$ tout en utilisant les hypothèses (2.12) et (2.13) et les égalités (2.14) et (2.15). Il vient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{h\omega} W(\widetilde{F}, \widetilde{R})\,dx \\
&= \int_0^1 \int_{h\omega} \Big(\mu\|(\widetilde{R}^T\,\widetilde{F})^s - I\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T\,\widetilde{F} - I)\big)^2\Big)dx \\
&= \int_0^1 \int_{h\omega} \Big(\mu\|E_m - I\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_m - I)\big)^2\Big)dx \\
&\qquad + \int_0^1 \int_{h\omega} \big(\mu\|E_\alpha\|^2 x_\alpha^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(\widetilde{R}^T A_\alpha)\big)^2 x_\alpha^2\big)dx.
\end{aligned}
$$

En remplaçant $A_m$ et $A_\alpha$ par leur valeur en fonction des $\rho_\alpha$ et $m'$, tout en utilisant

l'Ansatz $\widetilde{R}(t,x_1,x_2,x_3) = R(t,x_3)$ et la relation $d_\alpha = R_\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{h\omega} W(\widetilde{F},\widetilde{R})\,dx \\
&= \int_0^1 a_h\,\mu\,\|\big(R^T(\rho_1 R_1|\rho_2 R_2|m')\big)^s - I\|^2\,dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 a_h\,\frac{\lambda}{2}\Big(\operatorname{tr}\big(R^T(\rho_1 R_1|\rho_2 \bar{R}_2|m') - I\big)\Big)^2\,dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 J_\alpha^h\Big(\mu\|(R^T(0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)'))^s\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(R^T(0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)'))\big)^2\Big)\,dx_3,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

où

$$a_h = \int_{h\omega} dx_1 dx_2 = h^2 a,\ a = \int_\omega dx_1 dx_2$$

est l'aire de $\omega$ et

$$J_\alpha^h = \int_{h\omega} x_\alpha^2\,dx_1 dx_2 = h^4 J_\alpha\,,\ J_\alpha = \int_\omega x_\alpha^2\,dx_1 dx_2$$

sont les moments d'inertie principaux de la section $\omega$.

La relation (2.16) constitue bien l'énergie élastique réduite ne contenant que des quantités unidimensionnelles.

Il reste à réduire le travail des forces extérieures.

### 2.4.2 Réduction des termes de force

La forme linéaire $l_h$ correspondant au travail des forces extérieures dans l'expression de l'énergie est donnée par

$$l_h(\varphi_h) = \int_{\Omega_h} f\cdot\varphi_h\,dx + \int_{\Gamma_h} N\cdot\varphi_h\,dS + \int_{\Gamma_h^1} g\cdot\varphi_h\,da + \int_{\Gamma_h^0} e\cdot\varphi_h\,da, \tag{2.17}$$

où $f$ est une densité de force volumique dans $\Omega_h = h\omega\times]0,1[$, $N$ est une densité de force surfacique sur la partie latérale et $g$ et $e$ sont des densités de forces surfaciques sur $\Gamma_h^1$ et $\Gamma_h^0$ respectivement. Quand on lui applique l'Ansatz sur la déformation $\widetilde{\varphi}(x) = m(x_3) + \rho_\alpha(x_3)R_\alpha(x_3)x_\alpha$ (tout en utilisant l'hypothèse $d_\alpha = R_\alpha$), il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_h} f(x)\cdot\widetilde{\varphi}(x)\,dx &= \int_{\Omega_h} f(x)\cdot\big(m(x_3) + \rho_\alpha(x_3)R_\alpha(x_3)x_\alpha\big) \\
&= \int_0^1 \left(\int_{h\omega} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 dx_2\right)\cdot m(x_3)\,dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 \left(\int_{h\omega} x_\alpha f(.,.,x_3)\,dx_1 dx_2\right)\cdot \rho_\alpha(x_3)R_\alpha(x_3)\,dx_3
\end{aligned} \tag{2.18}$$

par le théorème de Fubini.

En suivant le même principe pour la densité de force surfacique $N$ et pour les termes d'extrémité $g$ et $e$, on trouve respectivement

$$\int_{\Gamma_h} N(x)\cdot\widetilde{\varphi}(x)\,dS = \int_0^1 \left(\int_{\partial(h\omega)} N(x_1,x_2,x_3)\,dS\right)\cdot m(x_3)\,dx_3 + \int_0^1 \left(\int_{\partial(h\omega)} x_\alpha N(.,.,x_3)\,dS\right)\cdot \rho_\alpha(x_3)R_\alpha(x_3)\,dx_3, \quad (2.19)$$

$$\int_{\Gamma_h^1} g(x_1,x_2)\cdot\widetilde{\varphi}(x_1,x_2,1)\,da = \left(\int_{\Gamma_h^1} g(x_1,x_2)\,da\right)\cdot m(1) + \left(\int_{\Gamma_h^1} x_\alpha g(x_1,x_2)\,da\right)\cdot \rho_\alpha(1)R_\alpha(1) \quad (2.20)$$

et

$$\int_{\Gamma_h^0} e(x_1,x_2)\cdot\widetilde{\varphi}(x_1,x_2,0)\,da = \left(\int_{\Gamma_h^0} x_\alpha e(x_1,x_2)\,da\right)\cdot \rho_\alpha(0)R_\alpha(0). \quad (2.21)$$

car $m(0) = (0,0,0)$.

Finalement, les termes de force deviennent

$$\int_0^1 \left(f_r(x_3)\cdot m(x_3) + \rho_\alpha(x_3)\,h(x_3)\cdot R_\alpha(x_3)\right)dx_3 + g_r\cdot m(1) + \rho_\alpha(1)\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1) + \rho_\alpha(0)\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0),$$

où

$$f_r(x_3) = \int_{h\omega} f(x_1,x_2,x_3)\,da + \int_{\partial(h\omega)} N(x_1,x_2,x_3)\,dS \quad (2.22)$$

est la résultante de $f$ et $N$,

$$g_r = \int_{\Gamma_h^1} g\,da \quad (2.23)$$

est la résultante de $g$ sur la section correspondant à $x_3 = 1$,

$$\bar{h}(x_3) = \int_{h\omega} x_\alpha\, f(x_1,x_2,x_3)\,da + \int_{\partial(h\omega)} x_\alpha N(x_1,x_2,x_3)\,dS, \quad (2.24)$$

$$\bar{g} = \int_{\Gamma_h^1} x_\alpha\, g(x_1,x_2)\,da \quad (2.25)$$

et

$$\bar{e} = \int_{\Gamma_h^0} x_\alpha\, e(x_1,x_2)\,da. \quad (2.26)$$

## 2.5 Calcul des coefficients $\rho_1$ et $\rho_2$

Dans le cas du passage 3D-2D [32, 33], P. Neff a pu éliminer analytiquement le coefficient $\rho$ décrivant dans ce cas le pincement de la plaque, en imposant l'égalité des forces sur le bord projetée selon le vecteur normal avec les contraintes normales. En suivant cette démarche pour le cas 3D-1D, on obtient des valeurs singulières pour les coefficients $\rho_1$ et $\rho_2$. Ceci nous a poussé dans un premier temps à tenter d'imposer l'égalité de la résultante des forces sur le bord avec la résultante des contraintes. En fait, cette égalité, étant vraie dans le problème 3D, est donc plus naturelle du point de vue mécanique. Malheureusement les calculs mènent toujours à des singularités et nous ne l'exposons pas ici. On préfère donc relaxer la condition en utilisant la méthode des moindres carrés.

### Calcul des coefficients $\rho_\alpha$ par la méthode des moindres carrés

On souhaite ici donner des expressions analytiques pour les coefficients $\rho_\alpha$ par la méthode des moindres carrés appliquée à l'égalité des forces sur le bord latéral du fil.

Soient $x \in \Gamma_h$ et $n$ le vecteur normal unitaire extérieur en $x$. En tout point $x$, ce vecteur peut s'écrire sous la forme $n = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ pour un certain $\theta \in [0, 2\pi]$. Soit $N = N_i e_i$ la traction prescrite sur cette surface. On a alors,

$$T_R\big(\nabla\varphi_h(x), R_h(x)\big)\, n = N(x).$$

Soit en multipliant par $R_h^T(x)$,

$$R_h^T(x)\, T_R\big(\nabla\varphi_h(x), R_h(x)\big)\, n = R_h^T(x) N(x).$$

Les Ansätze sur la déformation et la rotation entraînent

$$R^T(x_3)\, T_R\big(\nabla\widetilde{\varphi}(x), R(x_3)\big)\, n = R^T(x_3) N(x). \tag{2.27}$$

Or on sait que,

$$T_R(\tilde{F}, R) = D_{\tilde{F}} W(\tilde{F}, R).$$

Un simple calcul nous donne

$$D_{\tilde{F}} W(\tilde{F}, R) = R\big[\mu(\tilde{F}^T R + R^T \tilde{F} - 2I) + \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\tilde{F}^T R + R^T \tilde{F} - 2I) I\big]. \tag{2.28}$$

Ainsi, la relation (2.27) devient

$$\mu(\tilde{F}^T R + R^T \tilde{F} - 2I)\, n + \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\tilde{F}^T R + R^T \tilde{F} - 2I) n = R^T N,$$

car $R^T R = I$, soit

$$\mu(\tilde{F}^T R n + R^T \tilde{F} n - 2n) + \lambda \operatorname{tr}(\tilde{F}^T R - 3) n = R^T N, \tag{2.29}$$

car $\mathrm{tr}(\tilde{F}^T R) = \mathrm{tr}(R^T \tilde{F})$.

Explicitons chaque terme du membre gauche de cette égalité.
Le gradient de la déformation est donné par l'expression

$$\tilde{F}(x) = \nabla\tilde{\phi}(x) = \big((\rho_1 R_1)(x_3)|\,(\rho_2 R_2)(x_3)|\,m'(x_3)\big) + \big(0|0|\,(\rho_\alpha R_\alpha)'(x_3)\big)x_\alpha. \quad (2.30)$$

En utilisant (2.30), et le fait que les vecteurs colonne de $R$ forment une base orthonormée, c'est-à-dire, $R_\alpha \cdot R_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, on obtient

$$\tilde{F}^T R = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ (\tilde{F}^T R)_{3,1} & (\tilde{F}^T R)_{3,2} & (\tilde{F}^T R)_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Avec

$$(\tilde{F}^T R)_{3,1} = R_1 \cdot m' + \rho_1' x_1 + \rho_2 (R_1 \cdot R_2') x_2,$$
$$(\tilde{F}^T R)_{3,2} = R_2 \cdot m' + \rho_1 (R_2 \cdot R_1') x_1 + \rho_2' x_2$$

et

$$(\tilde{F}^T R)_{3,3} = R_3 \cdot m' + \rho_1 (R_3 \cdot R_1') x_1 + \rho_2 (R_3 \cdot R_2') x_2.$$

D'où, en multipliant (2.31) par $n = (n_1, n_2, 0)$, on trouve

$$\tilde{F}^T R n = \begin{pmatrix} \rho_1 n_1 \\ \rho_2 n_2 \\ (\tilde{F}^T R)_{3,1} n_1 + (\tilde{F}^T R)_{3,2} n_2 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Par ailleurs, le produit de la transposée de la matrice (2.31) et du vecteur $n$ donne

$$R^T \tilde{F} n = \begin{pmatrix} \rho_1 n_1 \\ \rho_2 n_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Il reste donc à calculer $\mathrm{tr}(\tilde{F}^T R)$. À l'aide de (2.31), on a

$$\mathrm{tr}(\tilde{F}^T R) = \rho_1 + \rho_2 + R_3 \cdot m' + \rho_1 (R_1' \cdot R_3) x_1 + \rho_2 (R_2' \cdot R_3) x_2. \quad (2.34)$$

Ainsi, tout en posant $\tilde{\rho_\alpha} = \rho_\alpha - 1$, on obtient

$$R^T T_R n = \begin{pmatrix} \big(2\mu\tilde{\rho}_1 + \lambda(\mathrm{tr}(\tilde{F}^T R) - 3)\big) n_1 \\ \big(2\mu\tilde{\rho}_2 + \lambda(\mathrm{tr}(\tilde{F}^T R) - 3)\big) n_2 \\ (\tilde{F}^T R)_{3,1} n_1 + (\tilde{F}^T R)_{3,2} n_2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Notre but est de trouver les coefficients $\rho_\alpha$ en fonction de la déformation, via les contraintes sur le bord latéral. Pour ce faire, nous avons recours à la méthode des moindres carrés qui nous permet d'approcher ces fonctions. Ainsi, on minimise par rapport à $\rho_\alpha$, le carré de la norme des deux premières composantes de la différence entre $R^T T_R n$ et $R^T N$ notées $(R^T T_R n - R^T N)_{(1,2)}$. La notation $(x)_{(1,2)}$ désigne les deux premières composantes d'un vecteur $x$ donné. Calculons alors cette norme

$$\begin{aligned}
&\left|\,(R^T T_R n - R^T N)_{(1,2)}\,\right|^2 \\
&\qquad = \left|\,(R^T T_R n)_{(1,2)}\,\right|^2 - 2(R^T T_R n \cdot R^T N)_{(1,2)} + \left|\,(R^T N)_{(1,2)}\,\right|^2.
\end{aligned}$$

Le terme $|(R^T N)_{(1,2)}|^2$ étant indépendant des $\rho_\alpha$, n'intervient donc pas dans la minimisation par rapport à $\rho_\alpha$. Ce qui nous permet donc de le laisser de côté et d'avoir

$$\begin{aligned}
&\left|\,(R^T T_R n - R^T N)_{(1,2)}\,\right|^2 \\
&\qquad = \left|\,(R^T T_R n)_{(1,2)}\,\right|^2 - 2(R^T T_R n \cdot R^T N)_{(1,2)} + \text{ cte.}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Tout d'abord, on a d'après (2.35)

$$\begin{aligned}
&\left|\,(R^T T_R n)_{(1,2)}\,\right|^2 \\
&\quad = \big(4\mu^2 \tilde{\rho_1}^2 + 4\mu\lambda\tilde{\rho_1}(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1 + \rho_1(R_3 \cdot R_1')x_1 \\
&\qquad + \rho_2(R_3 \cdot R_2')x_2\big)n_1^2 + \big(4\mu^2\tilde{\rho_2}^2 + 4\mu\lambda\tilde{\rho_2}(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1 \\
&\qquad\quad + \rho_1(R_3 \cdot R_1')x_1 + \rho_2(R_3 \cdot R_2')x_2\big)n_2^2 + \lambda^2\big(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' \\
&\qquad\qquad - 1 + \rho_1(R_3 \cdot R_1')x_1 + \rho_2(R_3 \cdot R_2')x_2\big)^2
\end{aligned}$$

car $n_1^2 + n_2^2 = 1$, le vecteur $n$ étant unitaire. Ainsi, en développant tout en regroupant les termes, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\,(R^T T_R n)_{(1,2)}\,\right|^2 \\
&\quad = \big(4\mu^2\tilde{\rho_1}^2 + 4\mu\lambda\tilde{\rho_1}(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1)\big)n_1^2 \\
&\qquad + 4\mu\lambda\tilde{\rho_1}\rho_1(R_3 \cdot R_1')x_1 n_1^2 + 4\mu\lambda\tilde{\rho_1}\rho_2(R_3 \cdot R_2')x_2 n_1^2 \\
&\qquad + \big(4\mu^2\tilde{\rho_2}^2 + 4\mu\lambda\tilde{\rho_2}(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1)\big)n_2^2 \\
&\qquad\quad + 4\mu\lambda\tilde{\rho_2}\rho_1(R_3 \cdot R_1')x_1 n_2^2 + 4\mu\lambda\tilde{\rho_2}\rho_2(R_3 \cdot R_2')x_2 n_2^2 \\
&\qquad\quad + \lambda^2(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1)^2 + \lambda^2\rho_1^2(R_3 \cdot R_1')^2 x_1^2 \\
&\qquad\quad + \lambda^2\rho_2^2(R_3 \cdot R_2')^2 x_2^2 + 2\lambda^2\rho_1(R_3 \cdot R_1')\rho_2(R_3 \cdot R_2')x_2 x_1. \\
&\qquad\quad + 2\lambda^2(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1)\big(\rho_1(R_3 \cdot R_1')x_1 + \rho_2(R_3 \cdot R_2')x_2\big).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Passons au calcul de

$$\begin{aligned}
&(R^T T_R n \cdot R^T N)_{(1,2)} \\
&= (2\mu\tilde{\rho}_1 + \lambda(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 + R_3 \cdot m' - 1))(R_1 \cdot N)n_1 \\
&\quad + \lambda\rho_1(R_3 \cdot R_1')\big((R_1 \cdot N)x_1 n_1 + (R_2 \cdot N)x_1 n_2\big) \\
&\quad + \lambda\rho_2(R_3 \cdot R_2')\big((R_1 \cdot N)x_2 n_1 + (R_2 \cdot N)x_2 n_2\big) \\
&\quad + (2\mu\tilde{\rho}_2 + \lambda(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 + R_3 \cdot m' - 1))(R_2 \cdot N)n_2.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Il s'agit maintenant de remplacer les valeurs trouvées, (2.37) et (2.38), dans le second membre de (2.36) et intégrer par la suite $\left|(R^T T_R n - R^T N)_{(1,2)}\right|^2$ sur le bord de la section $h\omega$. Pour ce faire, on commence par noter que pour n'importe quelle section $(hw)$ suffisamment régulière, on a

$$\int_{\partial(h\omega)} n_\alpha \, d\gamma = \int_{\partial(h\omega)} x_\alpha n_\beta \, d\gamma = 0, \ \alpha \neq \beta \tag{2.39}$$

et

$$\int_{\partial(h\omega)} d\gamma = L(\partial(h\omega)), \quad \int_{\partial(h\omega)} x_\alpha n_\alpha \, d\gamma = \text{aire}(h\omega). \tag{2.40}$$

Ces valeurs découlent directement de la formule basique de Green

$$\int_\Omega \partial_i u \, dx = \int_{\partial\Omega} u n_i \, d\gamma,$$

où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ suffisamment régulier, et $u$ est une fonction suffisamment régulière.

Les autres intégrales apparaissant en intégrant (2.36) sont plus délicates à traiter. Pour cela, on se restreint au cas d'une section déformée circulaire et on considère donc les coordonnées polaires. Ce qui revient à remplacer $x_1, x_2, n_1$ et $n_2$ par $\frac{h}{2}\cos\theta$, $\frac{h}{2}\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ respectivement et à intégrer par la suite par rapport à la variable $\theta \in [0, 2\pi]$, $r$ étant fixé et égal à $\frac{h}{2}$. Dans ce cas particulier, on peut facilement vérifier que d'une part

$$\int_{\partial(h\omega)} x_\alpha n_\beta^2 \, d\gamma = \int_{\partial(h\omega)} x_\alpha \, d\gamma = \int_{\partial(h\omega)} x_1 x_2 \, d\gamma = 0, \tag{2.41}$$

et d'autre part

$$\int_{\partial(h\omega)} n_\alpha^2 \, d\gamma = \frac{\pi h}{2} \ \text{ et } \int_{\partial(h\omega)} x_\alpha^2 \, d\gamma = \frac{\pi h^3}{8}. \tag{2.42}$$

En se servant des valeurs de ces intégrales ci-dessus, l'intégrale de (2.36) devient

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial(h\omega)} \left| (R^T T_R n - R^T N)_{1,2} \right|^2 d\gamma \\
&\quad = \pi h\big(2\mu^2 \tilde{\rho_1}^2 + 2\mu\lambda(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1)(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2}) \\
&\qquad + 2\mu^2 \tilde{\rho_2}^2 + \lambda^2(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1)^2\big) \\
&\qquad + \frac{\lambda^2 \pi h^3}{8}\big(\rho_1^2 (R_3 \cdot R_1')^2 + \rho_2^2 (R_3 \cdot R_2')^2\big) \\
&\qquad - \frac{\lambda \pi h^2}{4}\big(\rho_1 (R_3 \cdot R_1')(R_1 \cdot N) + \rho_2 (R_3 \cdot R_2')(R_2 \cdot N)\big).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Minimiser (2.43) par rapport à $\rho_1$ et $\rho_2$ revient à annuler ses dérivées par rapport à $\rho_1$ et $\rho_2$.
D'une part, la dérivée de (2.43) par rapport à $\rho_1$ nous donne

$$\begin{aligned}
4\mu^2 \tilde{\rho_1} &+ 2\mu\lambda(2\tilde{\rho_1} + 2\tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1) + 2\lambda^2(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1) \\
&+ \frac{\lambda^2 h^2}{4}\rho_1 (R_3 \cdot R_1')^2 - \frac{\lambda h}{4}(R_3 \cdot R_1')(R_1 \cdot N) = 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Ceci en divisant par $\pi h$ avec $h > 0$.
D'autre part, en dérivant par rapport à $\rho_2$, il vient

$$\begin{aligned}
4\mu^2 \tilde{\rho_2} &+ 2\mu\lambda(2\tilde{\rho_1} + 2\tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1) + 2\lambda^2(\tilde{\rho_1} + \tilde{\rho_2} + R_3 \cdot m' - 1) \\
&+ \frac{\lambda^2 h^2}{4}\rho_2 (R_3 \cdot R_2')^2 - \frac{\lambda h}{4}(R_3 \cdot R_2')(R_2 \cdot N) = 0.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Ainsi, (2.44) et (2.45) forment un système de deux équations à deux inconnues qui ne sont autres que les scalaires $\rho_1$ et $\rho_2$.

$$\begin{cases}
\big(4\mu^2 + 4\mu\lambda + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^2 h^2}{4}(R_3 \cdot R_1')^2\big)\rho_1 + 2\lambda(\lambda + 2\mu)\rho_2 \\
\qquad = 4\mu^2 - 2\mu\lambda(R_3 \cdot m' - 5) - 2\lambda^2(R_3 \cdot m' - 3) + \frac{\lambda h}{4}(R_3 \cdot R_1')(R_1 \cdot N), \\
2\lambda(\lambda + 2\mu)\rho_1 + \big(4\mu^2 + 4\mu\lambda + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^2 h^2}{4}(R_3 \cdot R_2')^2\big)\rho_2 \\
\qquad = 4\mu^2 - 2\mu\lambda(R_3 \cdot m' - 5) - 2\lambda^2(R_3 \cdot m' - 3) + \frac{\lambda h}{4}(R_3 \cdot R_2')(R_2 \cdot N).
\end{cases} \tag{2.46}$$

Les formules de Cramer nous permettent de trouver les coefficients recherchés,

$$\begin{aligned}\rho_1 =&\frac{1}{P}\Big((4\mu^2+\frac{\lambda^2h^2}{4}(R_3,\bar{R}_2')^2)\big(4\mu^2-2\mu\lambda(R_3\cdot m'-5)-2\lambda^2(R_3\cdot m'-3)\big)\\&+\mu^2\lambda h(R_3\cdot R_1')(R_1\cdot N)+\frac{\lambda^3h^3}{16}(R_3\cdot R_1')(R_1\cdot N)(R_3\cdot R_2')^2\\&+\frac{\lambda^2h}{2}(2\mu+\lambda)\big((R_3\cdot R_1')(R_1\cdot N)-(R_3\cdot R_2')(R_2\cdot N)\big)\Big)\end{aligned} \tag{2.47}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_2 =&\frac{1}{P}\Big((4\mu^2+\frac{\lambda^2h^2}{4}(R_3\cdot R_1')^2)\big(4\mu^2-2\mu\lambda(R_3\cdot m'-5)-2\lambda^2(R_3\cdot m'-3)\big)\\&+\mu^2\lambda h(R_3\cdot R_2')(R_2\cdot N)+\frac{\lambda^3h^3}{16}(R_3\cdot R_2')(R_2\cdot N)(R_3\cdot R_1')^2\\&-\frac{\lambda^2h}{2}(2\mu+\lambda)\big((R_3,R_1')(R_1,N)-(R_3,R_2')(R_2,N)\big)\Big),\end{aligned} \tag{2.48}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}P&=\det A\\&=16\mu^2(\mu+\lambda)^2+\frac{\lambda^4h^4}{16}(R_3\cdot R_1')^2(R_3\cdot R_2')^2\\&\quad+\frac{\lambda^2h^2}{2}\big((R_3\cdot R_1')^2+(R_3\cdot R_2')^2\big)\big(\mu^2+(\mu+\lambda)^2\big),\end{aligned} \tag{2.49}$$

avec $A$ la matrice $2\times 2$ du système (2.46) donnée par,

$$A=\begin{pmatrix}4\mu^2+a(\mu,\lambda)+\frac{\lambda^2h^2}{4}(R_3\cdot R_1')^2 & a(\mu,\lambda)\\ a(\mu,\lambda) & 4\mu^2+a(\mu,\lambda)+\frac{\lambda^2h^2}{4}(R_3\cdot R_2')^2\end{pmatrix},$$

où $a(\mu,\lambda)=2\lambda(2\mu+\lambda)$. Notons que ce déterminant $P$ ne s'annule pas car $\mu>0$.

**Remarque 2.5.1.** En prenant $\lambda=0$ dans les égalités (2.47), (2.48) et (2.49), on trouve $\rho_1=\rho_2=1$, ce qui est physiquement admissible. En effet, $\lambda=0$ correspond au cas où l'on n'a pas d'effet de Poisson dans la section autrement dit, où ses vecteurs directeurs sont de norme égale à 1.

**Remarque 2.5.2.** Les deux méthodes (non présentées ici) utilisées pour calculer explicitement les coefficients $\rho_\alpha$ :

- imposer l'égalité des forces sur le bord latéral du fil projetée selon le vecteur normal,

- imposer l'égalité de la résultante des forces sur le bord

donnent des valeurs singulières. La méthode des moindres carrés appliquée à l'égalité des forces sur le bord (présentée plus haut) contourne ce problème de singularité, mais donne des valeurs qui ne sont pas exactes, avec un certain degré d'arbitraire dû au choix particulier de la méthode des moindres carrés. Les expressions obtenues sont par ailleurs relativement complexes et d'exploitation difficile. Nous sommes amenés à conclure que d'une part, le contournement par moindres carrés n'est pas complètement satisfaisant, et d'autre part que l'approche utilisée dans le passage 3D-2D n'est pas directement utilisable dans le cas du passage 3D-1D. En fait, il est connu qu'un Ansatz de type Cosserat (2.1) n'est pas suffisamment riche pour donner naissance à des contraintes pouvant être équilibrées par des forces de surfaces générales sur le bord latéral du fil. Nous avons dès lors plutôt travaillé dans l'esprit de l'approche des multiplicateurs de Lagrange prônée par Antman [7], en minimisant l'énergie non seulement par rapport à $m$ (comme le cas de 3D-2D) mais également par rapport aux $\rho_\alpha$.

**Remarque 2.5.3.** Dans le cas du passage 3D-2D, Patrizio Neff élimine analytiquement le coefficient $\rho$, puis minimise l'énergie seulement par rapport à la déformation du fil $m$. Si c'était le cas dans notre passage 3D-1D, les seconds termes des seconds membres de (2.19) et (2.20) ne joueraient aucun rôle dans la minimisation car ils ne dépendent pas de $m$ mais des $\rho_\alpha$. Comme nous minimisons aussi par rapport à $\rho_\alpha$, nous sommes donc amenés à prendre ces termes en considération dans le problème de minimisation.

Ayant réduit l'énergie totale, il convient de réduire également l'équation d'évolution tridimensionnelle des rotations en une équation unidimensionnelle d'une certaine rotation définie seulement sur l'intervalle $]0,1[$.

## 2.6 Réduction du problème d'évolution

Reprenons l'équation d'évolution de départ

$$\frac{d}{dt}R_h(t) = \frac{1}{\eta}\nu^+\left((B_h)^a\right)(B_h)^a R_h(t), \tag{2.50}$$

où $B_h = B_{\text{méca}}$ (voir (1.3)) ou $B_h = B_{\text{thermo}}$ (voir (1.4)). Il s'agit donc de réduire (2.50) dans les deux cas correspondant aux deux valeurs de $B_h$.

### 2.6.1 Cas mécanique

En remplaçant le gradient de déformation tridimensionnel $F_h$ par son approximation $\widetilde{F}$ obtenue à l'aide de l'Ansatz de Cosserat, on obtient toujours l'équation

tridimensionnelle

$$\frac{d}{dt}\widetilde{R}(t,x) = \frac{1}{\eta}\nu^{+}\left((\tilde{B}_{\text{méca}})^{a}\right)(\tilde{B}_{\text{méca}})^{a}\widetilde{R}(t,x), \tag{2.51}$$

où $\tilde{B}_{\text{méca}}(t,x) = \widetilde{F}(t,x)\widetilde{R}^{T}(t,x)$.

Pour obtenir à partir de (2.51) une équation différentielle ordinaire ne dépendant que d'une seule variable suivant l'idée de Neff [33], on moyenne $\tilde{B}_{\text{méca}}$ sur le domaine $(h\omega)$. Il vient

$$\frac{d}{dt}\widetilde{R}(t,x) = \frac{1}{\eta}\nu^{+}\left((\bar{B}_{\text{méca}})^{a}\right)(\bar{B}_{\text{méca}})^{a}\widetilde{R}(t,x), \tag{2.52}$$

la valeur moyenne de $\tilde{B}_{\text{méca}}$ étant

$$\bar{B}_{\text{méca}} = \frac{1}{a_h}\int_{h\omega}\widetilde{F}\widetilde{R}^{T}\,dx_1dx_2.$$

Ainsi, en utilisant l'Ansatz pour les rotations (2.2) et en remplaçant $\widetilde{F}$ par sa valeur calculée précédemment ((2.3)), on trouve

$$\begin{aligned}\bar{B}_{\text{méca}} &= \frac{1}{a_h}\int_{h\omega}(A_m + A_\alpha x_\alpha)R^{T}\,dx_1dx_2\\ &= \frac{1}{a_h}\left(A_m\int_{h\omega}dx_1dx_2 + A_\alpha\int_{h\omega}x_\alpha\,dx_1dx_2\right)R^{T},\end{aligned}$$

car par construction, $A_m$ et $A_\alpha$ ne dépendent que de la variable $x_3$. Ainsi, en utilisant l'hypothèse (2.12), on obtient

$$\bar{B}_{\text{méca}} = A_m R^{T}, \tag{2.53}$$

$a_h$ étant par définition l'aire de la section $h\omega$.

Avec cette valeur de $\bar{B}_{\text{méca}}$ et toujours à l'aide de l'Ansatz (2.2), l'équation d'évolution (2.52) devient

$$\frac{d}{dt}R(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\nu^{+}\left((A_m(t,x_3)R^{T}(t,x_3))^{a}\right)\left(A_m(t,x_3)R^{T}(t,x_3)\right)^{a}R(t,x_3) \tag{2.54}$$

qui est bien une équation unidimensionnelle.

### 2.6.2 Cas thermodynamique

Il s'agit de suivre la même démarche de la section précédente en remplaçant $\tilde{B}_{\text{méca}}$ par $\tilde{B}_{\text{thermo}}$. Rappelons l'expression de $\tilde{B}_{\text{thermo}}$,

$$\begin{aligned}
&\tilde{B}_{\text{thermo}} \\
&= (2\mu+3\lambda)\widetilde{F}\widetilde{R}^T - \mu(\widetilde{F}\widetilde{R}^T)^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(\widetilde{F}\widetilde{R}^T)\widetilde{F}\widetilde{R}^T \\
&= (2\mu+3\lambda)A_m\widetilde{R}^T - \mu(A_m\widetilde{R}^T)^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(A_m\widetilde{R}^T)A_m\widetilde{R}^T \\
&\quad + \Big((2\mu+3\lambda)A_\alpha\widetilde{R}^T - 2\mu A_m\widetilde{R}^T A_\alpha\widetilde{R}^T - \lambda\,\mathrm{tr}(A_m\widetilde{R}^T)A_\alpha\widetilde{R}^T \\
&\qquad - \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha\widetilde{R}^T)A_m\widetilde{R}^T\Big)x_\alpha - \Big(\mu(A_\alpha\widetilde{R}^T)^2 + \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha\widetilde{R}^T)A_\alpha\widetilde{R}^T\Big)x_\alpha^2,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

car $\widetilde{F} = A_m + A_\alpha x_\alpha$ et la trace est linéaire. Ainsi en moyennant $\tilde{B}_{\text{thermo}}$ sur le domaine $(h\omega)$ (tout en utilisant la relation $\widetilde{R}(t,x_1,x_2,x_3) = R(t,x_3)$), on trouve

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{\text{thermo}} = (2\mu+3\lambda)A_mR^T - \mu(A_mR^T)^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(A_mR^T)A_mR^T \\
- \frac{J_\alpha^h}{a_h}\Big(\mu(A_\alpha R^T)^2 + \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)A_\alpha R^T\Big),
\end{aligned} \tag{2.56}$$

en utilisant toujours le fait que $A_m$, $A_\alpha$ et $R$ ne dépendent ni de $x_1$ ni de $x_2$, que $\int_{h\omega} x_\alpha\,dx_1dx_2 = 0$, que $a_h = \int_{h\omega} dx_1dx_2$ et que $J_\alpha^h = \int_{h\omega} x_\alpha^2\,dx_1dx_2$.

On prend maintenant la partie antisymétrique (qui est linéaire) de (2.56) et on l'injecte dans le second membre de l'équation differentielle tridimensionnelle. Ainsi, on réduit cette dernière en l'équation

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)(\bar{B}_{\text{thermo}})^a R(t,x_3) \tag{2.57}$$

qui ne dépend que de la variable $x_3$.

**Remarque 2.6.1.** L'équation (2.57) est une équation aux dérivées partielles. En fait, son second membre contient les dérivées par rapport à la variable $x_3$ des première et deuxième colonnes de la rotation puisque $A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)')$. Ainsi pour simplifier l'analyse mathématique, on étudiera dans la suite l'équation (2.54) qui est une équation différentielle ordinaire.

## 2.7 Invariance du modèle

**Proposition 2.7.1.** *Le modèle couplé réduit, dans les deux cas mécanique et thermodynamique, satisfait le principe d'indifférence matérielle sous la transformation*

$(m,R) \mapsto (Qm,QR)$ *autrement dit, on a* $\forall Q \in SO(3)$,

$$W(QF,QR) = W(F,R) \text{ et } \frac{d}{dt}(QR) = Q\frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B})^a\big)(\bar{B})^a R,\ (QR)(0) = QR_0,$$

*avec* $\bar{B} = \bar{B}_{méca}$ *ou* $\bar{B} = \bar{B}_{thermo}$.

*Démonstration.* Dans les deux cas mécanique et thermodynamique, le gradient de la déformation est $F = (\rho_1 R_1|\rho_2 R_2|m') + (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)')x_\alpha := A_m + A_\alpha x_\alpha$. Par suite, sous la transformation $(m,R) \mapsto (Qm,QR)$, il devient $QF$ soit $QA_m + QA_\alpha x_\alpha$.

Pour la densité d'énergie, on a à l'aide de (1.13)

$$\begin{aligned} W(QF,QR) = \frac{\mu}{4}\|R^T Q^T QF + F^T Q^T QR - 2I\|^2 \\ + \frac{\lambda}{8}\big(\operatorname{tr}(R^T Q^T QF + F^T Q^T QR - 2I)\big)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que $Q^T Q = I$, on obtient l'égalité voulue.

Pour ce qui concerne l'invariance du problème d'évolution dans les deux cas mécanique et thermodynamique, on aura besoin de quelques identités pour toute matrice carrée $A$ d'ordre $n$ et toute rotation $Q$. La première s'obtient par définition de la partie antisymétrique,

$$\begin{aligned} (QAQ^T)^a &:= \frac{1}{2}(QAQ^T - QA^T Q^T) \\ &= \frac{1}{2}Q(A - A^T)Q^T \\ &:= QA^a Q^T. \end{aligned} \tag{2.58}$$

La propriété de la trace et $Q^T Q = I$ nous donnent l'égalité,

$$\operatorname{tr}(QAQ^T) = \operatorname{tr}(A). \tag{2.59}$$

Enfin, en se servant de la définition de la norme matricielle euclidienne, du fait que $Q^T Q = I$ et de l'égalité (2.59), on trouve

$$\begin{aligned} \|QA^a Q^T\|^2 &:= \operatorname{tr}\big(QA^a(A^a)^T Q^T\big) \\ &= \operatorname{tr}\big(A^a(A^a)^T\big) \\ &:= \|A^a\|^2. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Dans le cas mécanique, l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\eta}\big(1 + \|(A_m R^T)^a\|^{r+1}\big)^k \|(A_m R^T)^a\|^{r-1}(A_m R^T)^a R.$$

Sous la transformation $(m,R) \mapsto (Qm,QR)$ et en utilisant les identités (2.58) et (2.60) pour $A = FR^T$, cette équation différentielle devient

$$\frac{d}{dt}(QR) = Q\frac{1}{\eta}\,\nu^+\big((A_mR^T)^a\big)(A_mR^T)^aR, \tag{2.61}$$

tout en se rappelant que $Q^TQ = I$ et où

$$\nu^+\big((A_mR^T)^a\big) = \big(1+\|(A_mR^T)^a\|^{r+1}\big)^k\|(A_mR^T)^a\|^{r-1}.$$

On a ainsi montré l'invariance du problème d'évolution mécanique.

L'invariance dans le cas thermodynamique demande un peu plus de calcul mais se fait de la même façon. En effet, il s'agit de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)(\bar{B}_{\text{thermo}})^aR, \tag{2.62}$$

où

$$\begin{aligned}(\bar{B}_{\text{thermo}})^a = (2\mu+3\lambda)(A_mR^T)^a - \mu\big((A_mR^T)^2\big)^a + \lambda\,\mathrm{tr}(A_mR^T)(A_mR^T)^a \\ - \frac{J^h_\alpha}{a_h}\big(\mu\big((A_\alpha R^T)^2\big)^a - \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)(A_\alpha R^T)^a\big).\end{aligned} \tag{2.63}$$

Sous la transformation $(m,R) \mapsto (Qm,QR)$ et à l'aide des identités (2.58) et (2.59) (en prenant $A = A_mR^T$ ou $A = A_\alpha R^T$), le $(B_{\text{thermo}})^a$ devient

$$(\bar{B}_{\text{thermo,Q}})^a = (Q\bar{B}_{\text{thermo}}Q^T)^a = Q(\bar{B}_{\text{thermo}})^aQ^T, \tag{2.64}$$

où l'on a aussi utilisé l'égalité $\big((QAQ^T)^2\big)^a = (QA^2Q^T)^a = Q(A^2)^aQ^T$ (car $Q^TQ = I$ et par l'égalité (2.58)). Par suite, on obtient l'invariance de $\nu^+$ autrement dit, on a $\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo,Q}})^a\big) = \nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)$. En effet, à l'aide de (2.64), on a

$$\begin{aligned}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo,Q}})^a\big) &= \big(1+\|Q(\bar{B}_{\text{thermo}})^aQ^T\|^{r+1}\big)^k\|Q(\bar{B}_{\text{thermo}})^aQ^T\|^{r-1} \\ &= \big(1+\|(\bar{B}_{\text{thermo}})^a\|^{r+1}\big)^k.\|(\bar{B}_{\text{thermo}})^a\|^{r-1} \\ &:= \nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)\end{aligned} \tag{2.65}$$

tout en se servant de l'égalité (2.60).

Enfin, sous la transformation $(m,R) \mapsto (Qm,QR)$ et à l'aide des égalités (2.64) et (2.65), l'équation aux dérivées partielles (2.62) devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial(QR)}{\partial t} &= \frac{1}{\eta}\,\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)\big(Q(\bar{B}_{\text{thermo}})^aQ^T\big)(QR) \\ &= Q\frac{1}{\eta}\,\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)(\bar{B}_{\text{thermo}})^aR.\end{aligned} \tag{2.66}$$

D'où l'on obtient l'invariance du problème d'évolution thermodynamique. □

Chapitre 3

# Étude du problème de minimisation réduit

# Chapitre 3

# Étude du problème de minimisation réduit

## 3.1 Existence et unicité du problème de minimisation

Nous commençons par traduire les conditions aux limites à imposer aux différents termes de l'Ansatz sur la déformation (2.1) sur la base des conditions aux limites tridimensionnelles.

### 3.1.1 Conditions aux limites

On rappelle que l'Ansatz sur la déformation est donné par

$$\widetilde{\varphi}(x_1,x_2,x_3) = m(x_3) + \rho_\alpha(x_3)R_\alpha(x_3)x_\alpha, \tag{3.1}$$

et que l'espace des déformations admissibles 3D est

$$\Phi_h = \{\varphi \in W^{1,p}(\Omega_h;\mathbb{R}^3);\, \det\nabla\varphi > 0 \,\text{presque partout dans}\, \Omega_h \,\text{et}\, \varphi(x) = x \,\text{sur}\, \Gamma_h^0\}.$$

Pour ce qui concerne les conditions aux limites de la déformation de la ligne moyenne du fil, d'après l'Ansatz (3.1), on a bien qu'en $x_3 = 0$,

$$\widetilde{\varphi}(x_1,x_2,0) = m(0) + \rho_\alpha(0)R_\alpha(0)x_\alpha = (x_1,x_2,0). \tag{3.2}$$

Ainsi pour $x_1 = x_2 = 0$, on obtient une condition aux limites de type Dirichlet au point $x_3 = 0$ qui n'est autre que $m(0) = (0,0,0)$. Dans le cas où l'on impose également la condition de fixation sur $\Gamma_h^1$, on obtient la condition de Dirichlet non homogène $m(1) = (0,0,1)$.

Par ailleurs, les conditions aux limites naturelles que l'on peut penser imposer sur les $\rho_\alpha$ à l'extrémité $x_3 = 0$, sont obtenues en considérant dans (3.2) d'une part $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et d'autre part $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Dans ces cas, on obtient

$$\widetilde{\varphi}(0,1,0) = \rho_2(0)R_2(0) = e_2 \tag{3.3}$$

et

$$\widetilde{\varphi}(1,0,0) = \rho_1(0)R_1(0) = e_1, \tag{3.4}$$

soit,

$$\rho_\alpha(0) = 1 \text{ et } R_\alpha(0) = e_\alpha, \tag{3.5}$$

car $\|R_\alpha\| = 1$.

On procède de même à l'extrémité $x_3 = 1$ et on trouve

$$\rho_\alpha(1) = 1 \text{ et } R_\alpha(1) = e_\alpha. \tag{3.6}$$

Ceci montre qu'imposer des conditions aux limites pour les coefficients $\rho_\alpha$ exige d'en imposer pour les rotations. Or, imposer $R_\alpha(0) = e_\alpha$ revient à imposer $R_3(0) = R_1(0) \wedge R_2(0) = e_3$ et donc à avoir $\frac{d}{dt}R = 0$. Ainsi, il faut que le second membre de l'équation différentielle soit identiquement nul en $x_3 = 0$. Or dans le cas mécanique, celui-ci est donné par

$$\frac{1}{\eta}(1 + \|B_{m',R}\|)^2 B_{m',R} R,$$

avec

$$B_{m',R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(R_3 \wedge m')_3 & (R_3 \wedge m')_2 \\ (R_3 \wedge m')_3 & 0 & -(R_3 \wedge m')_1 \\ -(R_3 \wedge m')_2 & (R_3 \wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Soit en $x_3 = 0$,

$$B_{m',R}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1'(0) \\ 0 & 0 & m_2'(0) \\ -m_1'(0) & -m_2'(0) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Annuler le terme $\frac{1}{\eta}(1 + \|B_{m',R}\|)^2 B_{m',R}(0)R(0)$ revient donc à annuler la matrice $B_{m',R}(0)$ (car $R(0) = \mathrm{I}$ et $(1 + \|B_{m',R}\|)^2$ ne s'annule jamais) et par suite à avoir $m_1'(0) = m_2'(0) = 0$. Ayant déjà imposé des conditions de type Dirichlet homogène sur $m$ (qui déterminent $m$ de façon unique), on ne peut plus lui imposer en plus les conditions de Neumann $m_1'(0) = m_2'(0) = 0$. En fait, $m_\alpha'(0)$ prend la valeur qui lui est donnée par le problème de minimisation et qui est en général non nulle, ce qui montre que le second membre de l'équation différentielle ordinaire ne peut pas s'annuler. Pour cette raison, le couplage du problème de minimisation et de l'équation différentielle ordinaire est incompatible avec le fait d'imposer des conditions aux

limites sur $\rho_\alpha$ et $R$ en $x_3 = 0$ (et pareil en $x_3 = 1$). On décide donc de laisser libres les coefficients $\rho_\alpha$ et les rotations aux extrémités du fil. De plus, on verra plus tard, dans la partie II de ce travail, que laisser libres ces quantités donnent des résultats plus satisfaisants numériquement.

L'énergie totale tridimensionnelle étant réduite en une énergie unidimensionnelle dans le Chapitre 2, on souhaite désormais la minimiser par rapport à $m$, $\rho_1$ et $\rho_2$, pour trouver l'état d'équilibre du fil déformé. On est donc amené à minimiser, à $R$ fixé, l'énergie

$$\begin{aligned}
&J(m,\rho_1,\rho_2,R)\\
&= \int_0^1 a_h\Big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_m + A_m^TR - 2\,\mathrm{I}\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(R^TA_m - \mathrm{I})\big)^2\Big)dx_3\\
&\quad + \int_0^1 \Big(J_\alpha^h\big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_\alpha + A_\alpha^TR\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}(R^TA_\alpha))^2\big) - f_r\cdot m - \rho_\alpha\,\bar{h}\cdot R_\alpha\Big)\,dx_3\\
&\qquad - g_r\cdot m(1) - \rho_\alpha(1)\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1) - \rho_\alpha(0)\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

sur les espaces fonctionnels

$$\Phi = \{m \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^3), m(0) = (0,0,0)\}$$

et

$$\Theta = \{\rho = (\rho_1,\rho_2) \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^2)\}.$$

On rappelle que l'on a $A_m = (\rho_1R_1|\rho_2R_2|m')$, $A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)')$ et que $f_r$, $g_r$, $\bar{h}$, $\bar{g}$ et $\bar{e}$ présents dans les termes de force sont donnés antérieurement dans le paragraphe 2.4.2 du Chapitre 2.

On a choisi ici de n'imposer une condition de fixation que sur une extrémité du fil. Le cas de fixation aux deux extrémités se traite de façon analogue.

On s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité de ce problème variationnel.

### 3.1.2 Existence des solutions

On a un premier résultat de minimisation.

**Théorème 3.1.1.** *Soit l'intervalle $I = [0,1]$. On suppose données les rotations $R \in H^1(I,SO(3))$, les forces extérieures $f_r$, $\bar{h} \in L^2(I;\mathbb{R}^3)$ et $g_r$, $\bar{g}$, $\bar{e}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors $J : \Phi\times\Theta \to \mathbb{R}$ et il existe $X = (m,\rho_1,\rho_2) \in H^1(I;\mathbb{R}^5)$ qui minimise $J$ sur $\Phi\times\Theta$.*

*Démonstration.* Tout d'abord, vérifions que $J$ est à valeurs réelles. D'une part, on a que $R^TA_m = R^T(\rho_1R_1|\rho_2R_2|m')$ est dans $L^2$ car les rotations $R$ sont dans $L^\infty$, $\rho_\alpha$ est

dans $H^1$ et $m'$ est dans $L^2$. D'autre part, comme $H^1$ est une algèbre en dimension 1, le produit $\rho_\alpha R_\alpha$ est donc dans $H^1$ et par suite $R^T A_\alpha = (0|0|R^T(\rho_\alpha R_\alpha)')$ est aussi dans $L^2$. D'où le résultat voulu sachant que les autres intégrandes sont trivialement dans $L^2$.

Pour montrer l'existence de la solution du problème de minimisation, nous utilisons la méthode directe du calcul des variations. Nous considérons donc une suite minimisante $X_k = (m_k, \rho_{1,k}, \rho_{2,k})$ de la fonctionnelle $J$, c'est-à-dire, une suite telle que

$$J(X_k, R) \to \inf_{X \in \Phi} J(X, R).$$

Une telle suite existe toujours. Notre but est de montrer d'une part que $J$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement et d'autre part que $X_k$ est bornée dans l'espace de Sobolev $H^1(I, \mathbb{R}^5)$.

Dans la suite, nous décomposons $A_m$ comme suit,

$$A_m = (\rho_1 R_1 | \rho_2 R_2 | 0) + (0|0|m') := A_\rho + A_{m'}. \tag{3.10}$$

Montrons la semi-continuité inférieure séquentielle faible de $J$. On commence par montrer que $J$ est fortement continue. On suppose donc que $m_k \to m$ dans $H^1$, $\rho_{\alpha,k} \to \rho_\alpha$ dans $H^1$. Le but sera alors de prouver qu'à $R$ fixée,

$$J(m_k, \rho_{1,k}, \rho_{2,k}, R) \to J(m, \rho_1, \rho_2, R) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

La fonctionnelle $J(m_k, \rho_{1,k}, \rho_{2,k}, R)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&J(m_k, \rho_{1,k}, \rho_{2,k}, R) \\
&= \mu \Big( a_h \|(R^T A_{m,k})^s - \mathrm{I}\|_{L^2}^2 + J_\alpha^h \|(R^T A_{\alpha,k})^s\|_{L^2}^2 \Big) \\
&\quad + \int_0^1 \Big( \frac{\lambda}{2} \big( a_h (\mathrm{tr}(R^T A_{m,k} - \mathrm{I}))^2 + J_\alpha^h (\mathrm{tr}(R^T A_{\alpha,k}))^2 \big) - f_r \cdot m_k \\
&\qquad - \rho_{\alpha,k} \bar{h} \cdot R_\alpha \Big) dx_3 - g_r \cdot m_k(1) - \rho_{\alpha,k}(1)\, \bar{g} \cdot R_\alpha(1) - \rho_{\alpha,k}(0)\, \bar{e} \cdot R_\alpha(0).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

D'un côté, on a

$$\|R^T(A_{m,k} - A_m)\|_{L^2}^2 = \|R^T\big((\rho_{1,k} - \rho_1)R_1 | (\rho_{2,k} - \rho_2)R_2 | m_k' - m'\big)\|_{L^2}^2.$$

Soit, par le fait que $R^T R_\alpha = e_\alpha$,

$$\begin{aligned}
\|R^T(A_{m,k} - A_m)\|_{L^2}^2 &= \|\big((\rho_{1,k} - \rho_1)e_1 | (\rho_{2,k} - \rho_2)e_2 | R^T(m_k' - m')\big)\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2} \|\rho_{\alpha,k} - \rho_\alpha\|_{L^2}^2 + \|m_k' - m'\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

car $R$ conserve les normes.

Or, on sait par hypothèse que $\rho_{\alpha,k} \to \rho_\alpha$ dans $H^1$. En particulier, on a donc que $\rho_{\alpha,k} \to \rho_\alpha$ dans $L^2$. De même, on a $m'_k \to m'$ dans $L^2$ car on a la convergence forte dans $H^1$ de $m_k$ vers $m$. Par conséquent, le second membre de l'inégalité (3.12) converge vers zéro, autrement dit on a $\|R^T A_{m,k} - I\|_{L^2}^2 \longrightarrow \|R^T A_m - I\|_{L^2}^2$. Par suite, par définition de la partie symétrique, on trouve que

$$\|(R^T A_{m,k})^s - \mathrm{I}\|_{L^2}^2 \longrightarrow \|(R^T A_m)^s - \mathrm{I}\|_{L^2}^2.$$

On procède de même pour le second terme du membre de droite de (3.11). D'après l'expression de $A_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\|R^T(A_{\alpha,k} - A_\alpha)\|_{L^2} &= \|\big(0|0|R^T\big((\rho_{\alpha,k} - \rho_\alpha)R'_\alpha + (\rho'_{\alpha,k} - \rho'_\alpha)R_\alpha\big)\|_{L^2} \\ &\leq \|\rho_{\alpha,k} - \rho_\alpha\|_{L^\infty}\|R'_\alpha\|_{L^2} + \|\rho'_{\alpha,k} - \rho'_\alpha\|_{L^2}. \quad (3.13)\end{aligned}$$

Comme $\rho_{\alpha,k} \to \rho_\alpha$ dans $H^1$, on a $\rho_{\alpha,k} \to \rho_\alpha$ dans $L^\infty$ par les injections de Sobolev et le second membre converge alors vers zéro à $R' \in L^2$ fixé. Par suite, on a la convergence $\|(R^T A_{\alpha,k})^s\|_{L^2} \longrightarrow \|(R^T A_\alpha)^s\|_{L^2}$.

Passons aux termes contenant la trace. Par les hypothèses de convergence de $m_k$ et $\rho_{\alpha,k}$, on a

$$(\rho_{1,k}e_1|\rho_{2,k}e_2|R^T m'_k) \longrightarrow (\rho_1 e_1|\rho_2 e_2|R^T m') \text{ dans } L^2(]0,1[;M_3),$$

$R^T$ appartenant à $L^\infty$ car c'est une rotation à $x_3$ fixé.
Soit, par la linéarité de la trace,

$$\mathrm{tr}(\rho_{1,k}e_1|\rho_{2,k}e_2|R^T m'_k) \longrightarrow \mathrm{tr}(\rho_1 e_1|\rho_2 e_2|R^T m') \text{ dans } L^2(]0,1[;\mathbb{R}).$$

En élevant donc au carré, on obtient la convergence voulue dans $L^1(]0,1[;\mathbb{R})$ de $(\mathrm{tr}(R^T A_{m,k} - \mathrm{I}))^2$ vers $(\mathrm{tr}(R^T A_m - \mathrm{I}))^2$.

De même, on a la convergence forte dans $L^2(]0,1[;M_3)$,

$$R^T A_{\alpha,k} = R^T(0|0|\rho_{\alpha,k}R'_\alpha + \rho'_{\alpha,k}R_\alpha) \to R^T A_\alpha = R^T(0|0|\rho_\alpha R'_\alpha + \rho'_\alpha R_\alpha). \quad (3.14)$$

En effet, d'une part par l'injection de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^\infty$,

$$\rho_{\alpha,k} \to \rho_\alpha \text{ dans } L^\infty(]0,1[;\mathbb{R}).$$

D'où,

$$\rho_{\alpha,k}R'_\alpha \longrightarrow \rho_\alpha R'_\alpha \text{ dans } L^2(]0,1[;\mathbb{R}^3),$$

car $R'_\alpha \in L^2$ (comme dérivée de $R_\alpha \in H^1$).
D'autre part, on a

$$\rho'_{\alpha,k} \to \rho'_\alpha \text{ dans } L^2(]0,1[\,\mathbb{R}).$$

Soit,

$$\rho'_{\alpha,k}R_\alpha \to \rho'_\alpha R_\alpha \text{ dans } L^2(]0,1[;\mathbb{R}^3),$$

car $R_\alpha \in L^\infty$. Ainsi, par (3.14),

$$(\mathrm{tr}(R^T A_{\alpha,k}))^2 \longrightarrow (\mathrm{tr}(R^T A_\alpha))^2 \text{ dans } L^1(]0,1[;\mathbb{R}).$$

Enfin, ayant $f_r, \bar{h} \in L^2$, on trouve les convergences fortes dans $L^2$ :

$$f_r \cdot m_k \to f_r \cdot m \quad \text{et} \quad \bar{h} \cdot \rho_{\alpha,k} R_\alpha \to \bar{h} \cdot \rho_\alpha R_\alpha,$$

à $R \in H^1$ fixé.

Notons que les termes $g_r \cdot m_k(1)$, $\rho_{\alpha,k}(1)\,\bar{g} \cdot R_\alpha(1)$ et $\rho_{\alpha,k}(0)\,\bar{e} \cdot R_\alpha(0)$ sont des scalaires donc convergent dans $\mathbb{R}$ vers $g_r \cdot m(1)$, $\rho_\alpha(1)\,\bar{g} \cdot R_\alpha(1)$ et $\rho_\alpha(0)\,\bar{e} \cdot R_\alpha(0)$ par le théorème de trace dans $H^1$. D'où l'on obtient la continuité forte de $J$.

Par ailleurs, remarquons que la fonctionnelle $J$ est convexe. En effet, les termes qui multiplient la constante $\mu$ sont obtenus par composition de la norme euclidienne sur les matrices carrées d'ordre 3 au carré avec une fonction affine et ceux en $\lambda$ sont le carré d'une fonction affine, par suite ils sont tous convexes. De plus, les termes de force sont linéaires par rapport à $m$ et $\rho_\alpha$. Par conséquent, cette énergie est convexe comme somme de fonctions convexes.

On a ainsi montré la semi-continuité inférieure séquentielle faible de la fonctionnelle $J$. En effet, nous venons de vérifier qu'elle est fortement continue et convexe.

Il reste donc à vérifier que $X_k$ est bornée. Pour ce faire, il suffit de montrer que la fonctionnelle $J$ est coercive. Par (3.9), on a

$$\begin{aligned} J(X,R) \geq \int_0^1 \Big( a_h \frac{\mu}{4} \|R^T A_m + A_m^T R - 2I\|^2 + \frac{\mu}{4} \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h \|R^T A_\alpha + A_\alpha^T R\|^2 \Big)\, dx_3 \\ - c(f_r)\|m\|_{L^2} - c_1(\bar{h}) \sum_{\alpha=1}^{2} \|\rho_\alpha\|_{L^2} - \|g_r\|\|m(1)\| \\ - \sum_{\alpha=1}^{2} \big( \|\bar{g}\|\|\rho_\alpha(1)\| + \|\bar{e}\|\|\rho_\alpha(0)\| \big), \end{aligned} \tag{3.15}$$

le carré de la trace étant positif et par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ (pour les termes de force contenant $g_r$, $\bar{g}$ et $\bar{e}$) tout en utilisant le fait que $\|R_\alpha\| = 1$. Pour les forces extérieures $f_r$ et $\bar{h}$, on a eu recours à Cauchy-Schwarz dans $L^2$, et les constantes $c(f_r)$ et $c(\bar{h})$ ainsi obtenues sont bornées car $f_r$ et $\bar{h}$ sont dans $L^2$ et leurs normes $L^2$ sont donc finies.

Minorons le premier terme du second membre de (3.15). En utilisant la décomposition (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} &\|R^T A_m + A_m^T R - 2I\|^2 \\ &\qquad = \|R^T A_\rho + A_\rho^T R\|^2 + \|R^T A_{m'} + A_{m'}^T R\|^2 + 12 \\ &\qquad\qquad - 4\,\mathrm{tr}(R^T A_\rho + A_\rho^T R) - 4\,\mathrm{tr}(R^T A_{m'} + A_{m'}^T R), \end{aligned} \tag{3.16}$$

car $\operatorname{tr}\big((R^T A_\rho + A_\rho^T R)^T (R^T A_{m'} + A_{m'}^T R)\big) = 0$.
Or,

$$R^T A_\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\|R^T A_\rho + A_\rho^T R\|^2 = 4\rho_1^2 + 4\rho_2^2 \,, \tag{3.17}$$

et

$$\operatorname{tr}(R^T A_\rho + A_\rho^T R) = 2\rho_1 + 2\rho_2. \tag{3.18}$$

Par ailleurs, on note pour simplifier $B_m = R^T A_{m'} + A_{m'}^T R$ où $R^T A_{m'} = (0|0|R^T m')$. Notre but est de minorer $B_m$ en norme $L^2$. Pour cela, nous commençons par remarquer que si $A = (0|0|a)$, alors

$$4|a|^2 \geq \|A + A^T\|^2 \geq 2|a|^2.$$

Ainsi, en remplaçant la matrice $A$ par $(0|0|R^T m')$, on obtient

$$4|m'|^2 \geq \|B_m\|^2 \geq 2|m'|^2, \tag{3.19}$$

car $R^T$ est une rotation, donc conserve les normes euclidiennes.
Enfin, par la propriété de la trace, on a

$$\operatorname{tr}(R^T A_{m'} + A_{m'}^T R) = 2\operatorname{tr}(0|0|R^T m') = 2R_3 \cdot m'. \tag{3.20}$$

En substituant (3.17)-(3.18)-(3.19)-(3.20) dans (3.16), on trouve

$$\|R^T A_m + A_m^T R - 2I\|^2 \geq 4\rho_1^2 + 4\rho_2^2 + 2|m'|^2 - 8\rho_1 - 8\rho_2 - 8R_3 \cdot m'. \tag{3.21}$$

Passons à la minoration du second terme de (3.15). Un simple calcul nous donne

$$\frac{1}{4}\|A_\alpha^T R + R^T A_\alpha\|^2 = \frac{1}{2}\rho_\alpha'^2 + \frac{1}{2}\rho_\alpha^2 (R_\beta \cdot R'_\alpha)^2 + \frac{1}{2}\rho_\alpha^2 (R_3 \cdot R'_\alpha)^2 \geq \frac{1}{2}\rho_\alpha'^2, \tag{3.22}$$

sans sommation et avec $\alpha \neq \beta$. En intégrant les inégalités (3.22) et (3.21) sur l'intervalle $]0,1[$, l'inégalité (3.15) devient

$$\begin{aligned} J(X,R) \geq \mu\, a_h \big(\|\rho_1^2\|_{L^2}^2 + \|\rho_2^2\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|m'^2\|_{L^2}^2 - 2\|m'\|_{L^2} - 2\|\rho_1\|_{L^2} - 2\|\rho_2\|_{L^2}\big) \\ + \frac{\mu}{2} J_1^h \|\rho_1'\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{2} J_2^h \|\rho_2'\|_{L^2}^2 - c(f_r)\|m\|_{H^1} - c_1(\bar{h}) \sum_{\alpha=1}^{2} \|\rho_\alpha\|_{H^1} \\ - \|g_r\|\|m(1)\| - \sum_{\alpha=1}^{2} \big(\|\bar{g}\|\|\rho_\alpha(1)\| + \|\bar{e}\|\|\rho_\alpha(0)\|\big), \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le fait que $R_3$ est de norme égale à 1 et l'inégalité $\|v\|_{H^1} \geq \|v\|_{L^2}$ pour tout $v$ dans $H^1$. Par suite, on trouve, grâce à l'inégalité de Poincaré, que $J$ est coercive et bornée inférieurement pour la norme $H^1(I;\mathbb{R}^5)$ dans $\Phi \times \Theta$. On peut alors supposer que

$$\inf J(X,R) \leq J(X_k,R) \leq \inf J(X,R) + \frac{1}{k}$$

et en particulier que $J(X_k,R) \leq \inf J(X,R) + 1$. Ainsi, par coercivité de $J$, on obtient que $X_k$ est bornée dans l'espace réflexif $H^1(I;\mathbb{R}^5)$ et on peut donc en extraire une sous-suite, $X_{k'}$, qui converge faiblement vers un certain $Y$. Cette propriété accompagnée de la semi-continuité inférieure séquentielle faible de $J$ (montrée précédemment) assurent par l'argument standard du calcul des variations l'existence du minimiseur $(m,\rho_1,\rho_2)$ de $J$. □

**Remarque 3.1.2.** Dans le cas 1D, nous n'avons pas eu besoin d'inégalité de type Korn pour montrer la coercivité de l'énergie comme c'était le cas dans le passage 3D-2D [32, 34].

Ayant montré l'existence d'une solution du problème de minimisation, nous passons à l'unicité.

### 3.1.3 Unicité de la solution

Pour ce qui concerne l'unicité, on a le résultat suivant.

**Théorème 3.1.3.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, la solution du problème réduit de minimisation est unique.*

*Démonstration.* Rappelons l'expression de l'énergie réduite,

$$\begin{aligned}
&J(m,\rho_1,\rho_2,R)\\
&= \int_0^1 a_h\Big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_m + A_m^TR - 2\,\mathrm{I}\,\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(R^TA_m - \mathrm{I})\big)^2\Big)dx_3\\
&\quad + \int_0^1 \Big(J_\alpha^h\big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_\alpha + A_\alpha^TR\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}(R^TA_\alpha))^2\big) - f_r\cdot m - \rho_\alpha\,\bar{h}\cdot R_\alpha\Big)\,dx_3\\
&\qquad - g_r\cdot m(1) - \rho_\alpha(1)\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1) - \rho_\alpha(0)\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0).
\end{aligned}$$

On vient de vérifier la convexité de cette énergie. Ainsi pour montrer sa convexité stricte, il suffit de remarquer qu'un de ses termes est strictement convexe (car la somme d'une fonction convexe et d'une fonction strictement convexe est strictement convexe).

Considérons donc le terme $\int_0^1 \|R^T A_m + A_m^T R - 2I\|^2 \, dx_3$. Il faut montrer qu'à $R$ fixée, l'application $U = (m, \rho_\alpha) \longmapsto S(U) = \int_0^1 H(A_m, R) \, dx_3$ est strictement convexe, avec $H(A_m, R) = \|R^T A_m + A_m^T R - 2I\|^2$. Pour cette raison, on se place sur un segment $[0, 1] \ni \theta \longmapsto \theta U_1 + (1-\theta) U_2$ et on vérifie que

$$S(\theta U_1 + (1-\theta) U_2) < \theta S(U_1) + (1-\theta) S(U_2),$$

dès que $U_1 \neq U_2$ et $0 < \theta < 1$.

On pose $j(\theta) = S(\theta U_1 + (1-\theta) U_2)$. Ainsi, vérifier la stricte convexité de $S$ revient à montrer celle de $j$ sur $[0, 1]$ autrement dit, à vérifier que

$$j(\theta) < \theta j(1) + (1-\theta) j(0).$$

Soient $A_{m,1}$ et $A_{m,2}$ les matrices $3 \times 3$ associées à $U_1$ et $U_2$ respectivement. L'énergie en question a la forme particulière $H(A_m) = \|f(A_m)\|^2$ où la norme est la norme euclidienne sur les matrices carrées d'ordre 3 et $f$ est une application affine des matrices $3 \times 3$ dans les matrices $3 \times 3$. En particulier, on a

$$f(\theta A_{m,1} + (1-\theta) A_{m,2}) = \theta f(A_{m,1}) + (1-\theta) f(A_{m,2}).$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned}
j(\theta) &= \int_0^1 \|\theta f(A_{m,1}) + (1-\theta) f(A_{m,2})\|^2 \, dx_3 \\
&= \int_0^1 \|\theta (f(A_{m,1}) - f(A_{m,2})) + f(A_{m,2})\|^2 \, dx_3 \\
&= \int_0^1 \Big( \|(f(A_{m,1}) - f(A_{m,2}))\|^2 \, \theta^2 + 2\big(f(A_{m,1}) - f(A_{m,2})\big) : f(A_{m,2}) \, \theta \\
&\qquad\qquad + \|f(A_{m,2})\|^2 \Big) \, dx_3,
\end{aligned}$$

en développant le carré de la norme euclidienne. La fonction $j$ est alors un polynôme du second degré en $\theta$ qui peut s'écrire sous la forme $j(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$. Un tel polynôme est strictement convexe si et seulement si son coefficient dominant $a > 0$. Or,

$$a = \int_0^1 \|f(A_{m,1}) - f(A_{m,2})\|^2 \, dx_3 \geq 0,$$

et donc dans le cas où $a$ s'annule, $j$ n'est pas strictement convexe. Ceci ne peut se produire que si $f(A_{m,1}) - f(A_{m,2}) = 0$ p.p sur $[0, 1]$ (l'intégrande étant positive). Or,

$$f(A_{m,1}) - f(A_{m,2}) = 0 \text{ p.p sur } [0,1] \Longleftrightarrow R^T A_m + A_m^T R = 0,$$

où l'on a noté, $A_m = A_{m,1} - A_{m,2}$, la matrice associée à $m = m_1 - m_2$ et $\rho_\alpha = \rho_{\alpha,1} - \rho_{\alpha,2}$ (correspondant respectivement à $U_1$ et $U_2$). Ce qui signifie que $R^T A_m$

est presque partout antisymétrique sur $[0,1]$ et par suite que $\rho_\alpha = m' = 0$. Ceci découle directement de la forme particulière de $R^T A_m$ en fonction des $\rho_\alpha$ et $m$ :

$$R^T A_m = (\rho_1 e_1 | \rho_2 e_2 | R^T m').$$

Avoir $\rho_\alpha = m' = 0$ revient à annuler $A_m$ et obtenir par la suite $U_1 = U_2$.

En conclusion, on a pu montrer que $j$ n'est pas strictement convexe si et seulement si $U_1 = U_2$. En d'autres termes, dès que $U_1 \neq U_2$, $j$ est strictement convexe, d'où le résultat voulu. $\square$

Chapitre 4

# Étude du problème d'évolution réduit

# Chapitre 4

# Étude du problème d'évolution mécanique réduit

Ayant établi l'existence et l'unicité du problème réduit de minimisation de l'énergie, il convient également d'étudier celles du problème d'évolution. Pour ce faire, nous déterminons la formulation variationnelle de l'équation d'Euler-Lagrange du problème de minimisation. Nous montrerons par la suite que sa solution faible est en réalité une solution forte. Ce passage est assuré par la régularité elliptique de la solution obtenue par un raisonnement en bootstrap, qui nous permet d'avoir la forme forte de l'équation d'Euler-Lagrange.

Nous commençons par chercher le problème variationnel dont le minimiseur de $J$ est solution.

## 4.1 Équation d'Euler-Lagrange

### 4.1.1 Formulation variationnelle

On rappelle l'expression de l'énergie réduite que l'on souhaite différentier par rapport à $m$, $\rho_1$ et $\rho_2$,

$$\begin{aligned}
&J(m,\rho_1,\rho_2,R)\\
&= \int_0^1 a_h\Big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_m + A_m^TR - 2\,\mathrm{I}\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(R^TA_m - I)\big)^2\Big)dx_3\\
&\quad + \int_0^1 \Big(J_\alpha^h\big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_\alpha + A_\alpha^TR\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}(R^TA_\alpha))^2\big) - f_r\cdot m\\
&\qquad - \rho_\alpha\,\bar{h}\cdot R_\alpha\Big)\,dx_3 - g_r\cdot m(1) - \rho_\alpha(1)\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1) - \rho_\alpha(0)\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

On définit à $R$ fixé les applications $g_1$ et $g_2$ par

$$\begin{aligned} g_1 \colon M_3 \times M_3 &\to \mathbb{R} \\ (A_m, R) &\mapsto \frac{\mu}{4}\|G(A_m,R)\|^2 + \frac{\lambda}{8}\big(\operatorname{tr}(G(A_m,R))\big)^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

et

$$\begin{aligned} g_2 \colon M_3 \times M_3 &\to \mathbb{R} \\ (A_\alpha, R) &\mapsto \frac{\mu}{4}\|L(A_\alpha,R)\|^2 + \frac{\lambda}{8}\big(\operatorname{tr}(L(A_\alpha,R))\big)^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où l'on a $A_m = (\rho_1 R_1 | \rho_2 R_2 | m')$, $A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)')$ et où $G$ est une application affine des matrices $3\times 3$ dans les matrices $3\times 3$ définie par

$$\begin{aligned} G \colon M_3 \times M_3 &\to M_3 \\ (A_m, R) &\mapsto R^T A_m + A_m^T R - 2I \end{aligned}$$

et $L$ est sa partie linéaire. Ainsi l'énergie réduite unidimensionnelle s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} J(m,\rho_1,\rho_2,R) = \int_0^1 \Big( a_h\, g_1(A_m,R) + J_\alpha^h\, g_2(A_\alpha,R) - f_r\cdot m - \rho_\alpha\, \bar{h}\cdot R_\alpha \Big)\, dx_3 \\ - g_r\cdot m(1) - \rho_\alpha(1)\, \bar{g}\cdot R_\alpha(1) - \rho_\alpha(0)\, \bar{e}\cdot R_\alpha(0), \end{aligned} \tag{4.4}$$

la trace étant linéaire et par la propriété $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$ pour toute matrice carrée $A$.

**Théorème 4.1.1.** *On suppose données les rotations $R \in H^1(]0,1[;SO(3))$. Tout point $X = (m,\rho_1,\rho_2) \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^5)$ vérifiant $m(0) = (0,0,0)$ qui minimise $J$ est solution du problème variationnel*

$$\begin{aligned} \int_0^1 a_h\, Dg_1(A_m,R) : H_1\, dx_3 + \int_0^1 J_\alpha^h\, Dg_2(A_\alpha,R) : H_2\, dx_3 \\ = \int_0^1 f_r\cdot n\, dx_3 + \int_0^1 \theta_\alpha\, \bar{h}\cdot R_\alpha\, dx_3 + g_r\cdot n(1) \\ + \theta_\alpha(1)\, \bar{g}\cdot R_\alpha(1) + \theta_\alpha(0)\, \bar{e}\cdot R_\alpha(0), \end{aligned} \tag{4.5}$$

*pour tout $(n,\theta_1,\theta_2) \in H^1(]0,1[);\mathbb{R}^5)$ avec la condition $n(0) = (0,0,0)$ et où l'on a*

$$A_m = (\rho_1 R_1 | \rho_2 R_2 | m'),\ A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)'),$$

$$H_1 = (\theta_1 R_1 | \theta_2 R_2 | n') \ \ et\ \ H_2 = (0|0|(\theta_\alpha R_\alpha)').$$

*Démonstration.* Montrons que la fonctionnelle $J$ donnée par (4.4) est différentiable et calculons ensuite sa différentielle.

Soient $X = (m, \rho_1, \rho_2)$, $Y = (n, \theta_1, \theta_2) \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^5)$, alors pour tout réel $\tau$, on a $X + \tau Y \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^5)$ et l'application $j$ telle que $j(\tau) = J(X + \tau Y, R)$ est bien définie. D'après (4.4), on a

$$\begin{aligned} j(\tau) &= J(X + \tau Y, R) \\ &= \int_0^1 a_h\, g_1(A_m + \tau H_1, R)\, dx_3 + \int_0^1 J_\alpha^h\, g_2(A_\alpha + \tau H_2, R)\Big)\, dx_3 \\ &\quad - \int_0^1 f_r \cdot m\, dx_3 - \tau \int_0^1 f_r \cdot n\, dx_3 - \int_0^1 \rho_\alpha\, \bar{h} \cdot R_\alpha\, dx_3 \\ &\quad - \tau \int_0^1 \theta_\alpha\, \bar{h} \cdot R_\alpha\, dx_3 - g_r \cdot m(1) - \tau\, g_r \cdot n(1) - \rho_\alpha(1)\, \bar{g} \cdot R_\alpha(1) \\ &\quad - \tau\, \theta_\alpha(1)\, \bar{g} \cdot R_\alpha(1) - \rho_\alpha(0)\, \bar{e} \cdot R_\alpha(0) - \tau\, \theta_\alpha(0)\, \bar{e} \cdot R_\alpha(0). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour montrer que $j$ est de classe $C^1$, il suffit de vérifier que les fonctions

$$\tau \mapsto \int_0^1 g_1(A_m + \tau H_1, R)\, dx_3$$

et

$$\tau \mapsto \int_0^1 g_2(A_\alpha + \tau H_2, R)\, dx_3$$

sont de classe $C^1$, les autres termes étant linéaires. On commence par traiter le cas de la première fonction et on pose

$$G_1(x_3, \tau) = g_1(A_m(x_3) + \tau H_1(x_3), R(x_3)).$$

On a

$$g_1(A_m, R) = \frac{\mu}{4} \|A_m^T R + R^T A_m - 2I\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\mathrm{tr}(A_m^T R) - 3)^2,$$

$g_1$ est donc de classe $C^1$ (comme somme de fonctions de classe $C^1$). Par suite, $G_1$ est de classe $C^1$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial \tau}(x_3, \tau) &= \frac{\partial g_1}{\partial \xi_i}\big(A_m(x_3) + \tau H_1(x_3), R\big) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}((A_m + \tau H_1)_i) \\ &= Dg_1\big(A_m(x_3) + \tau H_1(x_3), R\big) : H_1(x_3) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\Big|\frac{\partial G_1}{\partial \tau}(x_3, \tau)\Big| \leq \big\| Dg_1\big(A_m + \tau H_1, R\big) \big\| \, \big\| H_1 \big\|. \tag{4.8}$$

Il s'agit donc de majorer $\left\| Dg_1\big(A_m+\tau H_1,R\big)\right\|$. On a

$$\begin{aligned} g_1(A_m,R) &\leq \frac{\mu}{2}\big(\|A_m^TR+R^TA_m\|^2+\|2I\|^2\big)+\frac{\lambda}{2}\big(\operatorname{tr}(A_m^TR-I)\big)^2 \\ &\leq c(\mu,\lambda)\,\big(1+\|A_m\|^2\big), \end{aligned} \tag{4.9}$$

où l'on a utilisé les inégalités

$$\|A+B\|^2 \leq 2(\|A\|^2+\|B\|^2) \text{ et } (\operatorname{tr}(A))^2 \leq n\|A\|^2,$$

$n$ étant la dimension de l'espace, et les identités $\|A_m^TR\| = \|R^TA_m\| = \|A_m\|$ car $R$ est une rotation. Comme $g_1$ est convexe, alors l'inégalité (4.9) entraîne

$$Dg_1(A_m,R) \leq c_1(\mu,\lambda)\,\big(1+\|A_m\|\big). \tag{4.10}$$

On pourrait également remarquer que $g_1$ est quadratique et par suite que $Dg_1$ est affine. Ainsi, l'inégalité (4.8) devient

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial G_1}{\partial\tau}(x_3,\tau)\Big| &\leq c\big(1+\|A_m+\tau H_1\|\big)\|H_1\| \\ &\leq c\big(\|H_1\|+\|A_m\|\|H_1\|+\|H_1\|^2\big) \end{aligned} \tag{4.11}$$

en se restreignant au cas où $\tau\in[-1,1]$.

Or, on a $H_1=(\theta_1R_1|\theta_2R_2|n')$ où d'une part $n$ appartient à $H^1$ donc sa dérivée $n'$ est dans $L^2$, et d'autre part $\theta_\alpha$ et $R_\alpha$ appartiennent à $H^1$. Comme $H^1$ est une algèbre en dimension 1, alors le produit $\theta_\alpha R_\alpha$ appartient à $H^1$. Par conséquent, on trouve que $H_1$ est dans $L^2$. De la même façon on montre que $A_m$ appartient à $L^2$. Le produit de deux fonctions $L^2$ étant dans $L^1$ et puisque $L^2\subseteq L^1$ (étant dans un borné), on obtient donc que

$$(\|H_1\|+\|A_m\|\|H_1\|+\|H_1\|^2)\in L^1.$$

La fonction $\partial G_1/\partial\tau$ est donc dominée par une fonction intégrable uniformément pour $\tau\in[-1,1]$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que la fonction $\tau\mapsto\int_0^1 G_1(x_3,\tau)\,dx_3$ est de classe $C^1$ et que sa dérivée est donnée par $\tau\mapsto\int_0^1\frac{\partial G_1}{\partial\tau}(x_3,\tau)\,dx_3$. On procède de la même manière pour montrer que la fonction $\tau\mapsto\int_0^1 g_2(A_\alpha+\tau H_2,R)\,dx_3$ est de classe $C^1$. En effet, on pose

$$G_2(x_3,\tau)=g_2(A_\alpha(x_3)+\tau H_2(x_3),R(x_3)),$$

on a donc que $G_2$ est de classe $C^1$ et on montre que

$$\Big|\frac{\partial G_2}{\partial\tau}(x_3,\tau)\Big| \leq c\big(\|A_\alpha\|\|H_2\|+\|H_2\|^2\big) \tag{4.12}$$

en se restreignant toujours au cas où $\tau\in[-1,1]$. Comme $\theta_\alpha$ et $R_\alpha$ appartiennent à $H^1$ alors leur produit est aussi dans $H^1$ et sa dérivée est dans $L^2$. On en déduit

que $H_2 = (0|0|(\theta_\alpha R_\alpha)')$ est dans $L^2$. La fonction $\partial G_2/\partial\tau$ est donc dominée par une fonction intégrable uniformément pour $\tau \in [-1,1]$. Par conséquent, la fonction qui à $\tau$ fait correspondre $\int_0^1 G_2(x_3,\tau)\,dx_3$ est de classe $C^1$ et sa dérivée est donnée par $\tau \mapsto \int_0^1 \frac{\partial G_2}{\partial\tau}(x_3,\tau)\,dx_3$ (toujours par le théorème de dérivation sous le signe somme).

On a ainsi montré que $j$ est de classe $C^1$ et que sa dérivée est égale à

$$\begin{aligned} j'(\tau) = \int_0^1 \Big(a_h Dg_1(A_m+\tau H_1,R) : H_1 + J_\alpha^h Dg_2(A_\alpha+\tau H_2,R) : H_2\Big)\,dx_3 \\ - \int_0^1 f_r\cdot n\,dx_3 - \int_0^1 \theta_\alpha\,\bar h\cdot R_\alpha\,dx_3 - g_r\cdot n(1) \\ - \theta_\alpha(1)\,\bar g\cdot R_\alpha(1) - \theta_\alpha(0)\,\bar e\cdot R_\alpha(0). \end{aligned} \tag{4.13}$$

$X$ est un minimiseur de $J$ autrement dit, $J(X+\tau Y,R) = j(\tau) \geq J(X,R) = j(0)$. Le point 0 est donc un minimum de $j$ et comme $j$ est dérivable alors $j'(0) = 0$, ce qui est équivalent à avoir

$$\begin{aligned} &\int_0^1 a_h Dg_1(A_m,R) : H_1\,dx_3 + \int_0^1 J_\alpha^h Dg_2(A_\alpha,R) : H_2\,dx_3 \\ &= \int_0^1 f_r\cdot n\,dx_3 + \int_0^1 \theta_\alpha\,\bar h\cdot R_\alpha\,dx_3 + g_r\cdot n(1) + \theta_\alpha(1)\,\bar g\cdot R_\alpha(1) + \theta_\alpha(0)\,\bar e\cdot R_\alpha(0), \end{aligned}$$

qui n'est autre que l'équation d'Euler-Lagrange (4.5). □

**Remarque 4.1.2.** Dans le théorème 4.1.1, $R$ appartient à $H^1(]0,1[;SO(3))$ mais plus tard on prendra $R$ dans $W^{1,p}(]0,1[;SO(3))$ avec $p \geq 2$. Dans ce cas, le théorème reste vrai. En effet, on a $W^{1,p}(]0,1[;SO(3)) \subseteq H^1(]0,1[;SO(3))$, pour $p \geq 2$.

Nous passons maintenant au calcul des différentielles des applications $g_1$ et $g_2$ et nous avons le résultat suivant.

**Théorème 4.1.3.** *L'équation d'Euler-Lagrange du problème de minimisation s'écrit*

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \mu\, a_h\big(2(\rho_\alpha-1)\theta_\alpha + m'\cdot n' + (R_3\cdot m'-2)(R_3\cdot n')\big)\,dx_3 \\ &+ \int_0^1 \mu \sum_{\alpha=1}^2 J_\alpha^h\Big(\rho'_\alpha\theta'_\alpha + \rho_\alpha\theta_\alpha\big(|R'_\alpha|^2 + (R_3\cdot R'_\alpha)^2\big)\Big)\,dx_3 \\ &+ \int_0^1 \lambda\, a_h\,(\rho_1+\rho_2+R_3\cdot m'-3)(\theta_1+\theta_2+R_3\cdot n')\,dx_3 \\ &+ \int_0^1 \lambda \sum_{\alpha=1}^2 J_\alpha^h \rho_\alpha\,\theta_\alpha (R'_\alpha\cdot R_3)^2\,dx_3 = \int_0^1 f_r\cdot n\,dx_3 \\ &+ \int_0^1 \theta_\alpha\,\bar h\cdot R_\alpha\,dx_3 + g_r\cdot n(1) + \theta_\alpha(1)\,\bar g\cdot R_\alpha(1) + \theta_\alpha(0)\,\bar e\cdot R_\alpha(0), \end{aligned} \tag{4.14}$$

*pour tous* $\theta_\alpha \in H^1(]0,1[;\mathbb{R})$ *et* $n \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^3)$.

*Démonstration.* Il s'agit de calculer les différentielles des applications $g_1$ et $g_2$ définies ci-dessus par (4.2) et (4.3) respectivement, et donc de calculer les différentielles de $\|G(A_m,R)\|^2$, $\|L(A_\alpha,R)\|^2$, $(\mathrm{tr}(G(A_m,R)))^2$ et $(\mathrm{tr}(L(A_\alpha,R)))^2$. Les différentielles de $\|G(A_m,R)\|^2$ et de $(\mathrm{tr}(G(A_m,R)))^2$ sont respectivement égales à $2G(A_m,R) : L(H_1,R)$ et $2\,\mathrm{tr}(G(A_m,R))\,\mathrm{tr}(L(H_1,R))$. C'est simplement la différentielle d'une application composée, avec le fait que la différentielle d'une application affine est donnée par sa partie linéaire, et la différentielle d'une application linéaire par elle-même. On en déduit donc que les différentielles de $\|L(A_\alpha,R)\|^2$ et de $(\mathrm{tr}(L(A_\alpha,R)))^2$ sont $2L(A_\alpha,R) : L(H_2,R)$ et $2\,\mathrm{tr}(L(A_\alpha,R))\,\mathrm{tr}(L(H_2,R))$ respectivement. Notons que $L(H_\beta,R)$ est égale à $R^T H_\beta + H_\beta^T R$ car $L$ est la partie linéaire de $G$. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} Dg_1(A_m,R) : H_1 = \frac{\mu}{2}(A_m^T R + R^T A_m - 2I) : (R^T H_1 + H_1^T R) \\ + \frac{\lambda}{4}[(A_m^T R + R^T A_m - 2I) : I][(R^T H_1 + H_1^T R) : I] \end{aligned} \tag{4.15}$$

et

$$\begin{aligned} Dg_2(A_\alpha,R) : H_2 = \frac{\mu}{2}(A_\alpha^T R + R^T A_\alpha) : (R^T H_2 + H_2^T R) \\ + \frac{\lambda}{4}[(A_\alpha^T R + R^T A_\alpha) : I][(R^T H_2 + H_2^T R) : I], \end{aligned} \tag{4.16}$$

par définition du produit scalaire usuel de l'espace des matrices (noté par :).
Notons que

$$\begin{aligned} (A_m^T R + R^T A_m - 2I) : (H_1^T R) &:= \mathrm{tr}((A_m^T R + R^T A_m - 2I) H_1^T R) \\ &= \mathrm{tr}(H_1^T R (A_m^T R + R^T A_m - 2I)) \\ &= \mathrm{tr}(H_1^T (R A_m^T R + A_m - 2R)) \\ &:= (R A_m^T R + A_m - 2R) : H_1, \end{aligned} \tag{4.17}$$

où l'on a eu recours à la symétrie de la matrice $A_m^T R + R^T A_m - 2I$, à l'identité $RR^T = I$ et aux propriétés de la trace,

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

pour toutes matrices $A$ et $B$ carrées et de même ordre.

Avec ces mêmes propriétés, on obtient

$$(A_m^T R + R^T A_m - 2I) : I = 2(A_m : R - 3) \tag{4.18}$$

et

$$(R^T H_1 + H_1^T R) : I = 2(R : H_1). \tag{4.19}$$

Ainsi, à l'aide de (4.17), (4.18) et (4.19), (4.15) devient

$$Dg_1(A_m,R):H_1=\big(\mu(RA_m^TR+A_m-2R)+\lambda(R:A_m-3)R\big):H_1. \tag{4.20}$$

Un calcul analogue nous donne

$$Dg_2(A_\alpha,R):H_2=\big(\mu(RA_\alpha^TR+A_\alpha)+\lambda(R:A_\alpha)R\big):H_2. \tag{4.21}$$

Commençons par expliciter chaque terme de (4.20). On a $A_m=(\rho_1R_1|\rho_2R_2|m')$, ainsi

$$A_m^TR=\begin{pmatrix}\rho_1 & 0 & 0\\ 0 & \rho_2 & 0\\ R_1\cdot m' & R_2\cdot m' & R_3\cdot m'\end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

En multipliant la matrice $A_m^TR$ par la rotation $R$, on trouve

$$RA_m^TR=\big(\rho_1R_1+(R_1\cdot m')R_3|\,\rho_2R_2+(R_2\cdot m')R_3|\,(R_3\cdot m')R_3\big). \tag{4.23}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}RA_m^TR+A_m-2R=\big(&2(\rho_1-1)R_1+(R_1\cdot m')R_3|\,2(\rho_2-1)R_2\\ &+(R_2\cdot m')R_3|\,m'+(R_3\cdot m'-2)R_3\big).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Calculons le produit scalaire matriciel de (4.24) par $H_1=(\theta_1R_1|\theta_2R_2|n')$,

$$\begin{aligned}(RA_m^TR+A_m-2R):H_1&:=\mathrm{tr}((RA_m^TR+A_m-2R)H_1^T)\\ &=2(\rho_\alpha-1)\theta_\alpha+m'\cdot n'+(R_3\cdot m'-2)(R_3\cdot n').\end{aligned} \tag{4.25}$$

En effet, $R$ est une rotation et vérifie donc $R_i\cdot R_j=\delta_{ij}$.

Passons au second terme du membre de droite de (4.20).
D'après (4.22), on a

$$R:A_m=\mathrm{tr}(A_m^TR)=\rho_1+\rho_2+R_3\cdot m'. \tag{4.26}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}R:H_1&:=\mathrm{tr}(RH_1^T)\\ &=\theta_1+\theta_2+R_3\cdot n',\end{aligned} \tag{4.27}$$

car $|R_\alpha|^2=1$.
En multipliant (4.26) par (4.27), on obtient

$$\big(R:A_m-3\big)\,R:H_1=(\rho_1+\rho_2+R_3\cdot m'-3)(\theta_1+\theta_2+R_3\cdot n'). \tag{4.28}$$

Par conséquent, il vient

$$Dg_1(A_m,R) : H_1 = \mu\big(2(\rho_\alpha - 1)\theta_\alpha + m' \cdot n' + (R_3 \cdot m' - 2)(R_3 \cdot n')\big) \\ + \lambda(\rho_1 + \rho_2 + R_3 \cdot m' - 3)(\theta_1 + \theta_2 + R_3 \cdot n'). \quad (4.29)$$

Pour ce qui concerne le calcul de la différentielle de $g_2$ ((4.21)), on a sachant que $A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)')$,

$$A_\alpha^T R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (A_\alpha^T R)_{31} & (A_\alpha^T R)_{32} & (A_\alpha^T R)_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

avec

$$(A_\alpha^T R)_{3i} = \sum_{j=1}^{3} (\rho_\alpha R_\alpha)'_j R_{ij},$$

sans sommation sur $\alpha$ et où $(\rho_\alpha R_\alpha)'_j$ est la $j$-ème composante du vecteur $(\rho_\alpha R_\alpha)'$. Notons que pour $\alpha = 1$, on a

$$(A_1^T R)_{31} = \rho_1',\ (A_1^T R)_{32} = \rho_1 R_1' \cdot R_2 \ \text{ et } \ (A_1^T R)_{33} = \rho_1 R_1' \cdot R_3,$$

alors que pour $\alpha = 2$, on a

$$(A_2^T R)_{31} = \rho_2 R_2' \cdot R_1,\ (A_2^T R)_{32} = \rho_2' \ \text{ et } \ (A_2^T R)_{33} = \rho_2 R_2' \cdot R_3,$$

toujours par le fait que $R_i \cdot R_j = \delta_{ij}$ et donc que $R_\alpha \cdot R_\alpha' = 0$.

En multipliant $R$ par (4.30), on trouve

$$RA_\alpha^T R + A_\alpha = \big((A_\alpha^T R)_{31} R_3 | (A_\alpha^T R)_{32} R_3 | (A_\alpha^T R)_{33} R_3 + (\rho_\alpha R_\alpha)'\big). \quad (4.31)$$

Par suite, le produit scalaire matriciel de $RA_\alpha^T R + A_\alpha$ par $H_2 = (0|0|(\theta_\alpha R_\alpha)')$ donne

$$(RA_\alpha^T R + A_\alpha) : H_2 = (A_\alpha^T R)_{33}\, \theta_\alpha R_3 \cdot R_\alpha' + \rho_\alpha' \theta_\alpha' + \rho_\alpha \theta_\alpha |R_\alpha'|^2.$$

Soit en remplaçant $(A_\alpha^T R)_{33}$ par sa valeur, on obtient

$$(RA_\alpha^T R + A_\alpha) : H_2 = \rho_\alpha \theta_\alpha (|R_\alpha'|^2 + (R_3 \cdot R_\alpha')^2) + \rho_\alpha' \theta_\alpha' \quad (4.32)$$

sans sommation sur $\alpha$.

Par ailleurs, à partir de (4.30), on a

$$R : A_\alpha = (A_\alpha^T R)_{33} = \rho_\alpha R_\alpha' \cdot R_3.$$

Or, on a

$$R : H_2 = \theta_\alpha R_3 \cdot R_\alpha' \quad (4.33)$$

car $R_3 \cdot R_\alpha = 0$. Ainsi, on trouve l'égalité

$$(R : A_\alpha)(R : H_2) = \rho_\alpha \theta_\alpha (R'_\alpha \cdot R_3)^2 \tag{4.34}$$

sans sommation sur $\alpha$.

Enfin, en substituant (4.32) et (4.34) dans (4.21), il vient

$$Dg_2(A_\alpha, R) : H_2 = \mu\big(\rho_\alpha \theta_\alpha (|R'_\alpha|^2 + (R_3 \cdot R'_\alpha)^2) + \rho'_\alpha \theta'_\alpha\big) + \lambda \rho_\alpha \theta_\alpha (R'_\alpha \cdot R_3)^2. \tag{4.35}$$

En substituant les valeurs des différentielles des applications $g_1$ et $g_2$ données par (4.29) et (4.35) dans (4.5), on trouve l'expression de l'équation d'Euler-Lagrange du Théorème 4.1.3. □

### 4.1.2 Problème aux limites

Précisons l'équation (4.14) en réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 K_\alpha \rho_\alpha \theta_\alpha \, dx_3 + \int_0^1 a_h \big(\mu (m' \cdot n') + (\mu + \lambda)(R_3 \cdot m')(R_3 \cdot n')\big) \, dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 \lambda \, a_h \big(\rho_1 \theta_2 + \rho_2 \theta_1 + (\rho_1 + \rho_2)(R_3 \cdot n') + (\theta_1 + \theta_2)(R_3 \cdot m')\big) \, dx_3 \\
&\qquad + \int_0^1 \mu \sum_{\alpha=1}^{2} J^h_\alpha \rho'_\alpha \theta'_\alpha \, dx_3 = \int_0^1 a_h (2\mu + 3\lambda)(\theta_1 + \theta_2 + R_3 \cdot n') \, dx_3 \\
&\qquad\qquad + \int_0^1 \big(f_r \cdot n + \bar{h} \cdot \theta_\alpha R_\alpha\big) \, dx_3 + g_r \cdot n(1) \\
&\qquad\qquad\qquad + \theta_\alpha(1) \, \bar{g} \cdot R_\alpha(1) + \theta_\alpha(0) \, \bar{e} \cdot R_\alpha(0),
\end{aligned} \tag{4.36}$$

où l'on note $K_\alpha = (2\mu + \lambda) \, a_h + \sum_{\alpha=1}^{2} J^h_\alpha \big(\mu |R'_\alpha|^2 + (\mu + \lambda)(R_3 \cdot R'_\alpha)^2\big)$.

Dans la suite, on prend $R \in W^{1,p}(]0,1[;SO(3))$, $p \geq 2$, $f_r, \bar{h} \in L^p(]0,1[;\mathbb{R}^3)$, $m \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ et $\rho_\alpha \in H^1(]0,1[;\mathbb{R})$ avec une condition aux limites de Dirichlet, $m(0) = (0,0,0)$.

**Théorème 4.1.4.** *Soit* $(m, \rho) \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^5)$ *solution de l'équation d'Euler-Lagrange* (4.36). *Alors on a*

$$I) \begin{cases} -\mu m'' - (\mu + \lambda)((R_3 \cdot m')R_3)' - \lambda((\rho_1 + \rho_2)R_3)' = -(2\mu + 3\lambda)R'_3 + \dfrac{f_r}{a_h}, \\ -\mu J^h_\alpha \rho''_\alpha + K_\alpha \rho_\alpha + \lambda a_h (R_3 \cdot m' + \rho_\beta) = a_h (2\mu + 3\lambda) + \bar{h} \cdot R_\alpha, \end{cases}$$

*avec* $\beta \neq \alpha$ *et sans sommation sur* $\alpha$*, les équations ci-dessus étant entendues au sens des distributions sur* $]0,1[$.

Pour la preuve du Théorème 4.1.4, on aura besoin du résultat suivant.

**Lemme 4.1.5.** *Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f \in L^r(I)$ et $g \in L^s(I)$ avec $1 \leq r, s \leq \infty$. Alors $fg \in L^{\frac{rs}{r+s}}(I)$ et on a*

$$\|fg\|_{L^{\frac{rs}{r+s}}} \leq \|f\|_{L^r}\|g\|_{L^s}.$$

*Démonstration.* Soit $1 \leq p, q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité de Hölder affirme que pour $F \in L^p$ et $G \in L^q$ on a $FG \in L^1$ et

$$\int |FG| \leq \left(\int |F|^p\right)^{1/p} \left(\int |G|^q\right)^{1/q}.$$

En l'appliquant à $F = |f|^t$ et $G = |g|^t$, on obtient $fg \in L^t$ et

$$\int |fg|^t \leq \left(\int |f|^{tp}\right)^{1/p} \left(\int |g|^{tq}\right)^{1/q}. \tag{4.37}$$

Dans notre cas, on veut avoir $tp = r$ et $tq = s$, soit $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = p - 1$. Pour cette raison, on prend $p = \frac{r+s}{s}$ et donc $t = \frac{rs}{r+s}$. Comme $tp = r$ et $tq = s$, alors l'inégalité (4.37) n'est autre que

$$\|fg\|_{L^t}^t \leq \|f\|_{L^r}^{r/p}\|g\|_{L^s}^{s/q}.$$

Ainsi, en remarquant que $\frac{r}{p} = \frac{s}{q} = t$, on trouve l'inégalité voulue . □

*Démonstration du Théorème 4.1.4.* En prenant $r = s = p$ dans le Lemme 4.1.5 et en utilisant l'injection de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ en dimension 1, on trouve que $|R'_\alpha|^2$ et $(R_3 \cdot R'_\alpha)^2$ appartiennent à $L^{\frac{p}{2}}$ et par conséquent $K_\alpha$ appartient à $L^{\frac{p}{2}}$. Ainsi, par l'injection continue de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^\infty$, $K_\alpha \rho_\alpha$ appartient à $L^{\frac{p}{2}}$. Par suite, pour $p \geq 2$, (4.36) s'écrit avec les crochets de dualité entre $\mathscr{D}$ et son dual $\mathscr{D}'$,

$$\begin{aligned}
&\langle k_\alpha \rho_\alpha, \theta_\alpha\rangle + \mu a_h \langle m', n'\rangle + (\mu+\lambda)\, a_h \langle (R_3 \cdot m')R_3, n'\rangle + \lambda\, a_h \big(\langle \rho_1, \theta_2\rangle \\
&\quad + \langle \rho_2, \theta_1\rangle + \langle (\rho_1+\rho_2)R_3, n'\rangle + \langle \theta_1+\theta_2, R_3 \cdot m'\rangle\big) + \mu \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h \langle \rho'_\alpha, \theta'_\alpha\rangle \\
&\qquad = a_h\,(2\mu+3\lambda)\langle 1, \theta_1+\theta_2+R_3 \cdot n'\rangle + \langle f_r, n\rangle + \langle \theta_\alpha, \bar{h} \cdot R_\alpha\rangle,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

où $n$, $\theta_\alpha$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ à support compact arbitraires et où l'on a identifié toutes les fonctions $L^1_{\text{loc}}$ à des distributions. En dérivant au sens des distributions, (4.38) devient,

$$\begin{aligned}
&\langle k_\alpha \rho_\alpha, \theta_\alpha\rangle - \mu a_h \langle m'', n\rangle - (\mu+\lambda)\, a_h \langle ((R_3 \cdot m')R_3)', n\rangle + \lambda\, a_h \big(\langle \rho_1, \theta_2\rangle \\
&\quad + \langle \rho_2, \theta_1\rangle - \langle ((\rho_1+\rho_2)R_3)', n\rangle + \langle \theta_1+\theta_2, R_3 \cdot m'\rangle\big) - \mu \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h \langle \rho''_\alpha, \theta_\alpha\rangle \\
&\qquad = a_h\,(2\mu+3\lambda)\langle 1, \theta_1+\theta_2-R'_3 \cdot n\rangle + \langle f_r, n\rangle + \langle \theta_\alpha, \bar{h} \cdot R_\alpha\rangle.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

En découplant les équations, on obtient un système de trois équations au sens des distributions : une équation vectorielle pour $m$ (en prenant $\theta_\alpha = 0$ et $n \neq 0$) et deux équations scalaires pour $\rho_\alpha$ (en prenant $n = 0$) qui ne sont autres que celles données dans l'énoncé du théorème. □

Il s'agit maintenant de montrer que la solution faible du système I) est en fait une solution forte. On a donc besoin d'une régularité supplémentaire de la solution.

**Régularité de la solution pour $R \in W^{1,p}$, $2 \leq p \leq +\infty$**

Dans cette partie, on s'intéresse à la régularité des fonctions $m$ et $\rho_\alpha$ pour une rotation $R \in W^{1,p}$, $p \in [2, +\infty]$. Pour ce faire, on passe tous les termes d'ordre inférieur à 2 du système I) ci-dessus dans le membre de droite. Il vient

$$-\mu m'' - (\mu+\lambda)((R_3 \cdot m')R_3)' = \lambda((\rho_1+\rho_2)R_3)' - (2\mu+3\lambda)R_3' + \frac{1}{a_h} f_r \quad (4.40)$$

$$-\mu J_\alpha^h \rho_\alpha'' = -K_\alpha \rho_\alpha - \lambda a_h (R_3 \cdot m' + \rho_\beta) + a_h(2\mu+3\lambda) + \bar{h} \cdot R_\alpha. \quad (4.41)$$

Dans la suite, on aura besoin du résultat suivant.

**Lemme 4.1.6.** *Soient $f \in W^{1,p}(I;\mathbb{R})$, $p \geq 2$, et $g \in H_0^1(I;\mathbb{R})$ avec $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors le produit $fg''$ ($g''$ étant la dérivée seconde de $g$) est bien défini et appartient à $H^{-1}(I)$.*

*Démonstration.* Définissons une forme linéaire $fg''$ sur $\mathscr{D}(I)$ par la formule

$$\langle fg'', \phi \rangle = \langle g'', f\phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Ceci est bien défini car pour $p \geq 2$, $f$ est dans $H^1(I)$. Comme l'espace $H^1(I)$ est une algèbre en dimension un, $f\phi$ appartient alors à $H^1(I)$. Par ailleurs, $\phi$ est nulle au bord, donc $f\phi$ aussi, ce qui implique que $f\phi$ est dans $H_0^1(I)$ et le crochet de dualité du membre de droite est bien défini.

Il suffit maintenant de montrer que cette forme se prolonge par continuité à $H_0^1(I)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C$ telle que

$$\forall \phi \in \mathscr{D}(I), |\langle fg'', \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{H^1}.$$

Or par la propriété d'algèbre, $\|f\phi\|_{H^1} \leq C\|f\|_{H^1}\|\phi\|_{H^1}$. Donc comme $g'' \in H^{-1}(I)$

$$|\langle fg'', \phi \rangle| = |\langle g'', f\phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}| \leq \|g''\|_{H^{-1}} \|(f\phi)'\|_{L^2} \leq C\|g''\|_{H^{-1}}\|f\|_{H^1}\|\phi\|_{H^1},$$

d'où la conclusion. □

**Proposition 4.1.7.** *L'équation* (4.40) *s'écrit sous la forme*

$$m'' = -\frac{1}{\mu}\big[\big((\mu+\lambda)(R_3\cdot m')+\lambda(\rho_1+\rho_2)-(2\mu+3\lambda)\big)(R_3'\cdot R_\alpha)+\frac{1}{a_h}(f_r\cdot R_\alpha)\big]R_\alpha$$
$$-\frac{1}{2\mu+\lambda}\big[(\mu+\lambda)(R_3'\cdot m')+\lambda(\rho_1+\rho_2)'+\frac{1}{a_h}f_r\cdot R_3\big]R_3, \quad (4.42)$$

*où l'égalité est entendue au sens de* $H^{-1}(I)$.

*Démonstration.* Le problème consiste à développer le membre de gauche de l'équation (4.40) afin de pouvoir identifier $m''$. Pour ce faire, on remarque tout d'abord qu'on a l'égalité au sens de $H^{-1}$,

$$((R_3\cdot m')R_3)' = (R_3'\cdot m')R_3+(R_3\cdot m'')R_3+(R_3\cdot m')R_3'. \quad (4.43)$$

Vérifions tout d'abord que chaque terme de (4.43) est bien dans $H^{-1}$. D'une part, par le Lemme 4.1.6, $(R_3\cdot m'')R_3$ a bien un sens en tant qu'élément de $H^{-1}$ (prendre $g=m\in H_0^1$ et $f=R_{3,i}R_{3,j}\in W^{1,p}$ par la propriété d'algèbre de $W^{1,p}$ en dimension 1).

D'autre part, $R_3'\cdot m'\in L^{\frac{2p}{p+2}}$ (prendre $r=p$ et $s=2$ dans le Lemme 4.1.5) et par suite $(R_3'\cdot m')R_3\in L^{\frac{2p}{p+2}}$ ($R_3\in L^\infty$). Par le même raisonnement, on montre que $(R_3\cdot m')R_3'\in L^{\frac{2p}{p+2}}$. Or $p\geq 2$, soit $\frac{2p}{p+2}\geq 1$ et donc $L^{\frac{2p}{p+2}}\subseteq L^1$ (sur $]0,1[$). De plus, comme l'injection $H_0^1\hookrightarrow C_0^0$ est dense, on a alors $(C_0^0)'\hookrightarrow (H_0^1)'=H^{-1}$ et par suite $L^1\hookrightarrow H^{-1}$ ($L^1\hookrightarrow (C_0^0)'$). Ainsi, le membre de droite de (4.43) est dans $H^{-1}$, celui de gauche également puisque c'est une dérivée d'une fonction de $L^2$.

Montrons (4.43) par densité. En fait, la formule est vraie si on remplace $R_3$ par $h\in C^\infty(]0,1[;\mathbb{R}^3)$, car si $T$ est une distribution quelconque et $v\in C^\infty$, on a $(vT)'=vT'+v'T$.

Soit maintenant une suite $h_n\to R_3$ dans $W^{1,p}$. Par l'injection de Sobolev, on a la convergence uniforme $h_n\to R_3$, d'où trivialement

$$(h_n\cdot m')h_n\to (R_3\cdot m')R_3 \text{ dans } L^2 \text{ fort.}$$

En dérivant, il vient

$$((h_n\cdot m')h_n)'\to ((R_3\cdot m')R_3)' \text{ dans } H^{-1}.$$

De même, on trouve les convergences

$$(h_n'\cdot m')h_n\to (R_3'\cdot m')R_3 \text{ dans } L^{\frac{2p}{p+2}}\subseteq L^1,$$

$$(h_n\cdot m')h_n'\to (R_3\cdot m')R_3' \text{ dans } L^{\frac{2p}{p+2}}\subseteq L^1$$

et

$$(h_n\cdot m'')h_n\to (R_3\cdot m'')R_3 \text{ dans } H^{-1}.$$

Ce qui montre qu'on a bien (4.43).

La première équation d'Euler-Lagrange au sens de $\mathscr{D}'$ s'écrit alors comme

$$-\mu m'' - (\mu+\lambda)(R_3 \cdot m'')R_3 = e, \tag{4.44}$$

où

$$e = (\mu+\lambda)[(R_3' \cdot m')R_3 + (R_3 \cdot m')R_3'] + \lambda((\rho_1+\rho_2)R_3)' - (2\mu+3\lambda)R_3' + \frac{1}{a_h} f_r.$$

Pour identifier $m''$ dans le membre de gauche de (4.44), on commence par faire le produit scalaire de cette équation avec $R_\alpha$ et $R_3$, ce qui est bien défini par le Lemme 4.1.6. On obtient respectivement,

$$\begin{aligned} -\mu R_\alpha \cdot m'' = (\mu+\lambda)(R_3 \cdot m')R_3' \cdot R_\alpha + \lambda(\rho_1+\rho_2)(R_3' \cdot R_\alpha) \\ - (2\mu+3\lambda)(R_3' \cdot R_\alpha) + \frac{1}{a_h} f_r \cdot R_\alpha \end{aligned} \tag{4.45}$$

et

$$-(2\mu+\lambda)R_3 \cdot m'' = (\mu+\lambda)(R_3' \cdot m') + \lambda(\rho_1+\rho_2)' + \frac{1}{a_h} f_r \cdot R_3, \tag{4.46}$$

car $R_i$ est de norme 1 et donc en particulier pour $i=3$, $R_3 \cdot R_3' = 0$.

Par ailleurs, on a au sens des distributions l'égalité $m'' = (R_i \cdot m'')R_i$. En effet, vérifions-la composante par composante. Par le Lemme 4.1.6, on a

$$\langle R_{ij} m_j'' R_{ik}, \phi_k \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle m_j'', R_{ij} R_{ik} \phi_k \rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Or $R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}$, par suite

$$\langle R_{ij} m_j'' R_{ik}, \phi_k \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle m_j'', \phi_j \rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

D'où l'égalité voulue.

Enfin, on se sert de cette identité accompagnée des égalités (4.45) et (4.46) qui nous donnent l'égalité (4.42). □

On arrive ainsi au résultat principal de cette section.

**Théorème 4.1.8.** *On suppose les rotations $R \in W^{1,p}(]0,1[;SO(3))$ avec $p \geq 2$, $f_r, \bar{h} \in L^p(]0,1[;\mathbb{R}^3)$, et soit $(\rho, m)$ la solution du problème de minimisation, avec $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. Alors $m \in W^{2,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ pour tout $p \geq 2$ et $\rho \in W^{2,p/2}(]0,1[;\mathbb{R}^2)$ pour $p < 4$, alors que pour $p \geq 4$ $\rho \in H^2(]0,1[;\mathbb{R}^2)$.*

*Démonstration.* Les équations satisfaites par les fonctions $\rho_\alpha$ et $m$ sont

$$m'' = -\frac{1}{\mu}\big[\big((\mu+\lambda)(R_3\cdot m') + \lambda(\rho_1+\rho_2) - (2\mu+3\lambda)\big)(R_3'\cdot R_\alpha) + \frac{1}{a_h}(f_r\cdot R_\alpha)\big]$$
$$R_\alpha - \frac{1}{2\mu+\lambda}\big[(\mu+\lambda)(R_3'\cdot m') + \lambda(\rho_1+\rho_2)' + \frac{1}{a_h}f_r\cdot R_3\big]R_3, \quad (4.47)$$

et

$$-\mu J_\alpha^h \rho_\alpha'' = -K_\alpha\rho_\alpha - \lambda a_h(R_3\cdot m' + \rho_\beta) + a_h(2\mu+3\lambda) + \bar{h}\cdot R_\alpha, \quad (4.48)$$

avec $K_\alpha = (2\mu+\lambda)\,a_h + \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h\big(\mu|R_\alpha'|^2 + (\mu+\lambda)(R_3\cdot R_\alpha')^2\big)$.

Commençons par l'équation donnant $\rho_\alpha$. Pour $R \in W^{1,p}(]0,1[;SO(3))$, on a déjà vu que $K_\alpha\rho_\alpha \in L^{\frac{p}{2}}$. De plus, l'injection $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ montre que $R_3\cdot m' \in L^2$ et que $\bar{h}\cdot R_\alpha \in L^p$ et enfin $a_h(2\mu+3\lambda)$ est une constante. On en déduit que si $p \le 4$, alors le second membre de (4.48) est dans $L^{\frac{p}{2}}$ donc $\rho_\alpha''$ appartient à $L^{\frac{p}{2}}$, c'est-à-dire, $\rho_\alpha \in W^{2,p/2}$, alors que si $p \ge 4$, $L^{\frac{p}{2}} \subseteq L^2$, donc $\rho_\alpha'' \in L^2$, soit $\rho_\alpha \in H^2$.

Passons à la régularité de la fonction $m$. On la montre en utilisant un argument du type bootstrap. Deux étapes suffisent ici. Tout d'abord, pour $R \in W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ et par l'injection de Sobolev, $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$, on a d'une part $R_3\cdot m' \in L^2$ et d'autre part $R_3'\cdot R_\alpha$, $f_r\cdot R_i \in L^p$. Ainsi, le produit $(R_3\cdot m')(R_3'\cdot R_\alpha)$ et le terme $R_3'\cdot m'$ sont dans $L^{\frac{2p}{p+2}}$ par le Lemme 4.1.5 ($r=p$, $s=2$). Par ailleurs, pour $\rho_\alpha \in H^1$, on a $(\rho_1+\rho_2) \in L^\infty$ (par $H^1 \hookrightarrow L^\infty$) et $(\rho_1+\rho_2)' \in L^2$ (comme dérivée d'une fonction $H^1$). Enfin, en réutilisant l'injection $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$, on trouve que le second membre de (4.47) est dans $L^{\frac{2p}{p+2}}$ (car $\frac{2p}{p+2} \le 2, p$) et que donc $m$ appartient à $W^{2,\frac{2p}{p+2}}$.

On recommence alors le raisonnement en partant du fait que $m$ est dans $W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ et en utilisant les deux régularités des $\rho_\alpha$ trouvées ci-dessus suivant la valeur de $p$. Comme pour $p \in [2,+\infty]$, $\frac{2p}{p+2} \ge 1$, on a donc l'injection de Sobolev en dimension 1, $W^{1,\frac{2p}{p+2}} \hookrightarrow L^\infty$. On en déduit que pour tout $p \in [2,+\infty]$, $R_3\cdot m'$ est dans $L^\infty$ et $R_3'\cdot m'$ est dans $L^p$ et par suite que les produits $(R_3\cdot m')(R_3'\cdot R_\alpha)$ et $(R_3'\cdot m')R_3$ appartiennent à $L^p$.

Pour les termes contenant $\rho_\alpha$, on considérera deux cas. En premier lieu, on prend $2 \le p < 4$. Dans ce cas on vient de montrer que $\rho_\alpha \in W^{2,p/2}$. Par suite, les termes $(\rho_1+\rho_2)$ et $(\rho_1+\rho_2)'$ sont dans $L^\infty$ par les injections de Sobolev en dimension 1, $W^{2,p/2}, W^{1,p/2} \hookrightarrow L^\infty$ ($\frac{2}{p}-2, \frac{2}{p}-1 < 0$). Dans l'autre cas, autrement dit pour $p \ge 4$, on a $\rho_\alpha \in H^2$ et donc $(\rho_1+\rho_2)$ et $(\rho_1+\rho_2)'$ sont aussi dans $L^\infty$ par les injections de Sobolev en dimension 1, $H^2, H^1 \hookrightarrow L^\infty$.

Notons donc que pour tout $p \in [2,+\infty]$, $(\rho_1+\rho_2)$ et $(\rho_1+\rho_2)'$ sont dans $L^\infty$. Par conséquent et comme $|R_3| = 1$, les termes $(\rho_1+\rho_2)R_3$ et $(\rho_1+\rho_2)'R_3$ restent dans $L^\infty$.

On conclut alors que le second membre de (4.47) est dans $L^p$ (sachant que le vecteur $(f_r \cdot R_i)R_i$ est dans $L^p$ voir ci-dessus) et donc que $m$ appartient à $W^{2,p}$ et ceci pour tout $p \in [2, +\infty]$ . □

**Remarque 4.1.9.** On n'a pas la régularité $W^{2,p}$ pour les fonctions $\rho_\alpha$ même en poursuivant le raisonnement en bootstrap. En fait, la régularité des $\rho_\alpha$ dépend essentiellement de celle de $K_\alpha$ qui est indépendante des régularités des fonctions $m$ et $\rho_\alpha$. On aura donc toujours $K_\alpha \in L^{p/2}$ dans la mesure où cette fonction ne dépend que de $R$.

Le Théorème 4.1.8 nous permet d'avoir les équations du système I) au sens fort.

### Équations fortes

**Théorème 4.1.10.** *Tout point qui minimise $J$ est solution du problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} m \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^3),\ \rho_\alpha \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}) \\ -\mu m'' - (\mu+\lambda)((R_3\cdot m')R_3)' - \lambda((\rho_1+\rho_2)R_3)' = -(2\mu+3\lambda)R_3' + \dfrac{1}{a_h} f_r, \\ \qquad -\mu J_\alpha^h \rho_\alpha'' + K_\alpha \rho_\alpha + \lambda a_h (R_3\cdot m' + \rho_\beta) = a_h(2\mu+3\lambda) + \bar{h}\cdot R_\alpha, \\ \textit{avec } m(0) = (0,0,0) \textit{ et} \\ \qquad \mu m'(1) + (\mu+\lambda)\big((R_3(1)\cdot m'(1))R_3(1)\big) \\ \qquad\qquad + \lambda\Big(\big(\rho_1(1)+\rho_2(1)\big)R_3(1)\Big) - (2\mu+3\lambda)R_3(1) - \dfrac{1}{a_h} g_r = 0. \\ \textit{et les conditions de Neumann pour } \rho_\alpha : \\ \rho_\alpha'(0) = -\dfrac{1}{\mu J_\alpha^h}\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0) \textit{ et } \rho_\alpha'(1) = \dfrac{1}{\mu J_\alpha^h}\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1). \end{cases}$$

*Démonstration.* On rappelle l'expression de la formulation variationnelle du problème de minimisation réduit

$$\begin{aligned} &\int_0^1 K_\alpha \rho_\alpha \theta_\alpha\, dx_3 + \int_0^1 a_h\big(\mu(m'\cdot n') + (\mu+\lambda)(R_3\cdot m')(R_3\cdot n')\big)\, dx_3 \\ &+ \int_0^1 \lambda\, a_h\big(\rho_1\theta_2 + \rho_2\theta_1 + (\rho_1+\rho_2)(R_3\cdot n') + (\theta_1+\theta_2)(R_3\cdot m')\big)\, dx_3 \\ &\quad + \int_0^1 \mu \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h \rho_\alpha' \theta_\alpha'\, dx_3 = \int_0^1 a_h(2\mu+3\lambda)(\theta_1+\theta_2+R_3\cdot n')\, dx_3 \\ &\qquad + \int_0^1 \big(f_r\cdot n + \theta_\alpha \bar{h}\cdot R_\alpha\big)\, dx_3 + g_r\cdot n(1) \\ &\qquad\qquad + \theta_\alpha(1)\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1) + \theta_\alpha(0)\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0), \end{aligned} \tag{4.49}$$

où l'on note toujours $K_\alpha = (2\mu+\lambda)\,a_h + \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h\big(\mu|R'_\alpha|^2 + (\mu+\lambda)(R_3\cdot R'_\alpha)^2\big)$.

On a déjà démontré que $m \in W^{2,p}$ pour tout $p \geq 2$, et que $\rho_\alpha \in W^{2,p/2}$ pour $p < 4$ et $\rho_\alpha \in H^2$ pour $p \geq 4$. On peut donc intégrer par parties avec des fonctions tests non nulles sur le bord, autrement dit avec $\theta_\alpha, n \in H^1$ quelconques.

Ainsi, on obtient les formules suivantes

$$\begin{aligned}\int_0^1 m'\cdot n'\,dx_3 &= \int_0^1 m'_i n'_i\,dx_3\\ &= -\int_0^1 m''_i n_i\,dx_3 + \big[m'_i n_i\big]_0^1\\ &= -\int_0^1 m''\cdot n\,dx_3 + \big[m'\cdot n\big]_0^1\end{aligned} \tag{4.50}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (R_3\cdot m')(R_3\cdot n')\,dx_3\\ &\quad= -\int_0^1 \big((R_{3j}m'_j)R_{3i}\big)' n_i\,dx_3 + \big[\big((R_{3j}m'_j)R_{3i}\big)n_i\big]_0^1\\ &\quad= -\int_0^1 \big((R_3\cdot m')R_3\big)'\cdot n\,dx_3 + \big[\big((R_3\cdot m')(R_3\cdot n)\big)\big]_0^1.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Notons que $R_3$ et $m'$ appartiennent à $W^{1,p}$, leur produit est donc dans $W^{1,p}$ par la propriété d'algèbre de $W^{1,p}$ en dimension 1.

Pour $2 \leq p < 4$, on a $\rho_\alpha \in W^{2,p/2}$ avec $W^{2,p/2} \subseteq W^{1,\infty} \subseteq W^{1,p}$ (en dimension 1 et dans un borné), alors que pour $p \geq 4$, on a $\rho_\alpha \in H^2$ avec $H^2 \subseteq W^{1,p}$. Par suite, $\rho_\alpha$ est dans $W^{1,p}$ pour tout $p \geq 2$. Par conséquent, $\rho_\alpha R_3$ est dans $W^{1,p}$ car $W^{1,p}$ est une algèbre en dimension 1 et sa dérivée est donc dans $L^p$. D'où l'on a

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (\rho_1+\rho_2)(R_3\cdot n')\,dx_3\\ &\quad= -\int_0^1 \big((\rho_1+\rho_2)R_{3i}\big)' n_i\,dx_3 + \big[\big((\rho_1+\rho_2)R_{3i}\big)n_i\big]_0^1\\ &\quad= -\int_0^1 \big((\rho_1+\rho_2)R_3\big)'\cdot n\,dx_3 + \big[\big((\rho_1+\rho_2)(R_3\cdot n)\big)\big]_0^1.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Enfin, on a

$$\int_0^1 \rho'_\alpha\theta'_\alpha = -\int_0^1 \rho''_\alpha\theta_\alpha + \big[\rho'_\alpha\theta_\alpha\big]_0^1, \tag{4.53}$$

car $\rho''_\alpha$ est soit dans $L^2$ (pour $p \geq 4$), soit dans $L^1$ (pour $2 \leq p < 4$ soit $p/2 \geq 1$) et $\theta_\alpha \in L^\infty$. En substituant ces intégrations par parties dans (4.49) et en utilisant les

équations au sens des distributions suivantes

$$\begin{cases} -\mu m'' - (\mu+\lambda)((R_3\cdot m')R_3)' - \lambda((\rho_1+\rho_2)R_3)' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -(2\mu+3\lambda)R_3' + \dfrac{1}{a_h} f_r, \\ -\mu J_\alpha^h \rho_\alpha'' + K_\alpha \rho_\alpha + \lambda a_h (R_3\cdot m' + \rho_\beta) = a_h(2\mu+3\lambda) + \bar{h}\cdot R_\alpha, \end{cases} \tag{4.54}$$

on en déduit les relations

$$\begin{aligned} &\mu\big(m'(1)\cdot n(1) - m'(0)n(0)\big) + (\mu+\lambda)\big((R_3(1)\cdot m'(1))(R_3(1)\cdot n(1)) \\ &\quad - (R_3(0)\cdot m'(0))(R_3(0)\cdot n(0))\big) + \lambda\Big(\big(\rho_1(1)+\rho_2(1)\big) \\ &\qquad \big(R_3(1)\cdot n(1)\big) - \big(\rho_1(0)+\rho_2(0)\big)\big(R_3(0)\cdot n(0)\big)\Big) \\ &\qquad - (2\mu+3\lambda)\big(R_3(1)\cdot n(1) - R_3(0)\cdot n(0)\big) - g_r\cdot n(1) = 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

et

$$\mu J_\alpha^h\big(\rho_\alpha'(1)\theta_\alpha(1) - \rho_\alpha'(0)\theta_\alpha(0)\big) = \theta_\alpha(1)\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1) + \theta_\alpha(0)\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0), \tag{4.56}$$

sans sommation sur $\alpha$ et pour toute fonction-test admissible.

Or on a considéré, en $x_3 = 0$, une condition aux limites de type Dirichlet homogène pour $m$, $m(0) = (0,0,0)$. On est donc ramené à prendre des fonctions test nulles en $x_3 = 0$, c'est-à dire $n(0) = (0,0,0)$. Dans ce cas, à partir de (4.55), on trouve les conditions aux limites de type Neumann,

$$\begin{aligned} &\mu m'(1) + (\mu+\lambda)\big((R_3(1)\cdot m'(1))R_3(1)\big) \\ &\qquad + \lambda\Big(\big(\rho_1(1)+\rho_2(1)\big)R_3(1)\Big) - (2\mu+3\lambda)R_3(1) - \frac{1}{a_h} g_r = 0. \end{aligned} \tag{4.57}$$

De plus, à l'aide de (4.56), on obtient des conditions de Neumann

$$\rho_\alpha'(0) = -\frac{1}{\mu J_\alpha^h}\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0) \tag{4.58}$$

et

$$\rho_\alpha'(1) = \frac{1}{\mu J_\alpha^h}\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1). \tag{4.59}$$

□

Notons que la condition (4.57) est une condition couplée qui lie $m'(1)$, $\rho_\alpha(1)$ et $R_3(1)$. Ceci est raisonnable puisque le problème considéré couple en fait le problème de minimisation donc la déformation du fil $m$ et les coefficients $\rho_\alpha$ avec celui d'évolution, soit la rotation $R$.

**Remarque 4.1.11.** Pour $g_r = 0$, la tangente à la courbe au point libre est orthogonale aux $R_\alpha$, qui sont égaux aux directeurs, donc à la section du fil. En fait, la condition (4.57) force dans ce cas $m'(1)$ à être colinéaire à $R_3(1)$.

## 4.2 Existence et unicité de la solution du problème d'évolution mécanique

L'existence et l'unicité de la solution du problème d'évolution réduit mécanique se démontrent à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour cette raison, on s'intéresse dans ce paragraphe à l'estimation de dépendance lipschitzienne du second membre de l'équation différentielle en fonction de la rotation $R$ quand $R \in W^{1,p}$. La dépendance de ce second membre en la fonction $m$ (la ligne moyenne du fil solution du problème de minimisation) nécessite l'étude de son caractère localement lipschitzien.

### 4.2.1 Dépendance localement lipschitzienne de la déformation par rapport à la rotation

Le problème d'évolution mécanique est donné par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dR}{dt}(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((A_m(t,x_3)R^T(t,x_3))^a\big)\big(A_m(t,x_3)R^T(t,x_3)\big)^a R(t,x_3), \tag{4.60}$$

où $A_m = (\rho_1 R_1|\rho_2 R_2|m')$ et $(\rho_1,\rho_2,m)$ est la solution unique du problème de minimisation correspondant à la rotation $R$.

Le calcul de la partie antisymétrique de la matrice $A_m R^T$ en remplaçant $A_m$ par sa valeur en fonction des $\rho_\alpha$, $R_\alpha$ et $m'$, nous donne

$$(A_m R^T)^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(R_3\wedge m')_3 & (R_3\wedge m')_2 \\ (R_3\wedge m')_3 & 0 & -(R_3\wedge m')_1 \\ -(R_3\wedge m')_2 & (R_3\wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

Par conséquent, on voit bien la dépendance explicite en $m'$ du second membre du problème d'évolution, d'où la nécessité d'estimer la dépendance lipschitzienne en norme $W^{2,p}$, $p \geq 2$, de $m$ en fonction de $R$. En effet, le Théorème 4.1.8 nous dit que pour $R$ dans $W^{1,p}(]0,1[;SO(3))$, $m$ est dans $W^{2,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ pour tout $p \geq 2$. Pour ce faire, on commence par calculer la dépendance lipschitzienne en norme $H^1$ qui se montre directement à partir de la formulation variationnelle du problème de minimisation et on a le résultat suivant.

**Théorème 4.2.1.** *Soient* $(\rho_\alpha,m)$, $(\tilde\rho_\alpha,\tilde m) \in V = H^1(]0,1[;\mathbb{R}^2)\times H^1_0(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ *deux couples solutions de la formulation variationnelle* (4.36) *correspondant respectivement à* $R,\tilde R \in W^{1,p}(]0,1[;SO(3))$.

*On a alors l'estimation*

$$\|(\rho_\alpha,m)-(\tilde\rho_\alpha,\tilde m)\|_V \leq c\|R-\tilde R\|_{W^{1,p}},$$

*où la constante dépend en fait de $R', \tilde{R}', \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{m}'$ et est localement bornée par rapport à $R$ dans $W^{1,p}$.*

*Démonstration.* La formulation variationnelle (4.36) peut s'écrire sous la forme

$$a_R(Y,Z) = l_R(Z),$$

où $a_R$ est une forme bilinéaire symétrique sur $V$ et $V$-elliptique et $l_R$ est une forme linéaire sur $V$ avec $Y = (\rho_\alpha, m)$ et $Z = (\theta_\alpha, n)$. Ainsi, on obtient

$$a_R(Y,Z) - a_{\tilde{R}}(\tilde{Y},Z) = l_R(Z) - l_{\tilde{R}}(Z) = (l_R - l_{\tilde{R}})(Z).$$

Soit,

$$a_R(Y-\tilde{Y},Z) = a_{\tilde{R}}(\tilde{Y},Z) - a_R(\tilde{Y},Z) + (l_R - l_{\tilde{R}})(Z).$$

En utilisant la $V$-ellipticité de $a_R$ et la linéarité de $l_R$, on trouve

$$\beta \|Y-\tilde{Y}\|_V \leq \sup_{Z\in V} \frac{|a_R(\tilde{Y},Z) - a_{\tilde{R}}(\tilde{Y},Z)|}{\|Z\|_V} + \|l_R - l_{\tilde{R}}\|_{V'}, \tag{4.62}$$

$\beta$ étant la constante d'ellipticité de $a_R$, qui ne dépend pas du paramètre $R$. D'après (4.36), on a d'une part

$$(l_R - l_{\tilde{R}})(Z) = \int_0^1 (2\mu + 3\lambda)\big((R_3 - \tilde{R}_3)\cdot n'\big)\, dx_3, \tag{4.63}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
&a_R(\tilde{Y},Z) - a_{\tilde{R}}(\tilde{Y},Z)\\
&= \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h \big(\mu(|R'_\alpha|^2 - |\tilde{R}'_\alpha|^2) + (\mu+\lambda)((R'_\alpha\cdot R_3)^2 - (\tilde{R}'_\alpha\cdot\tilde{R}_3)^2\big)\tilde{\rho}_\alpha\theta_\alpha\, dx_3\\
&\quad + \int_0^1 \lambda\, a_h\Big(\big((R_3\cdot n') - (\tilde{R}_3\cdot n')\big)(\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2) + (\theta_1+\theta_2)\big((R_3\cdot\tilde{m}')(R_3\cdot n')\\
&\qquad - (\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3\cdot n')\big)\Big)\, dx_3 + \int_0^1 (\mu+\lambda) a_h\big((R_3\cdot\tilde{m}')(R_3\cdot n')\\
&\qquad\qquad - (\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3\cdot n')\big)\, dx_3.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Majorons donc à partir de (4.63), la norme $\|l_R - l_{\tilde{R}}\|_{V'}$. En fait, on a par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$,

$$|(l_R - l_{\tilde{R}})(Z)| \leq (2\mu+3\lambda)\int_0^1 \|R_3 - \tilde{R}_3\|\|n'\|.$$

Soit, par Cauchy-Schwarz dans $L^2$,

$$\begin{aligned}
|(l_R - l_{\tilde{R}})(Z)| &\leq (2\mu+3\lambda)\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^\infty}\|n'\|_{L^2}\\
&\leq (2\mu+3\lambda)\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^\infty}\|n\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $Z \in V$ non nul,

$$\frac{|(l_R - l_{\tilde{R}})(Z)|}{\|Z\|_V} \leq (2\mu + 3\lambda)\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^\infty}.$$

Soit, par l'injection de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$,

$$\frac{|(l_R - l_{\tilde{R}})(Z)|}{\|Z\|_V} \leq c(2\mu + 3\lambda)\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}.$$

Enfin, par la définition de la norme duale sur $V'$, on trouve

$$\|l_R - l_{\tilde{R}}\|_{V'} \leq c(2\mu + 3\lambda)\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}. \tag{4.65}$$

Par ailleurs, on a par (4.64),

$$\begin{aligned}
&|a_R(\tilde{Y}, Z) - a_{\tilde{R}}(\tilde{Y}, Z)| \\
&\leq \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h(\mu + \lambda)\big|(R_3 \cdot R'_\alpha)^2 - (\tilde{R}_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha)^2\big||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h \mu\big||R'_\alpha|^2 - |\tilde{R}'_\alpha|^2\big||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 \lambda\, a_h\,|(R_3 - \tilde{R}_3) \cdot n'|(|\tilde{\rho}_1| + |\tilde{\rho}_2|)\,dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 a_h\,\big(\lambda(1 + |\theta_1| + |\theta_2|) + \mu\big) \\
&\qquad \big|(R_3 \cdot \tilde{m}')(R_3 \cdot n') - (\tilde{R}_3 \cdot \tilde{m}')(\tilde{R}_3 \cdot n')\big|\,dx_3.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Commençons par faire la décomposition

$$\begin{aligned}
&(R_3 \cdot R'_\alpha)^2 - (\tilde{R}_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha)^2 \\
&\quad = ((R_3 - \tilde{R}_3) \cdot R'_\alpha)(R_3 \cdot R'_\alpha) + (\tilde{R}_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha)((R_3 - \tilde{R}_3) \cdot \tilde{R}'_\alpha) \\
&\qquad + (\tilde{R}_3 \cdot R'_\alpha)((R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha) \cdot R_3) + (R_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha)((R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha) \cdot \tilde{R}_3).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Notons que chaque terme de (4.67) est bien défini dans $L^{\frac{p}{2}}$ (comme produit de deux fonctions de $L^p$ tout en remarquant que $R_3$ et $\tilde{R}_3$ sont dans $L^\infty$).

Ainsi, ponctuellement en $x_3$ et par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$, on obtient les inégalités

$$|(R_3 - \tilde{R}_3) \cdot R'_\alpha|\,|R_3 \cdot R'_\alpha| \leq \|R_3 - \tilde{R}_3\|\|R'_\alpha\|^2,$$

$$|\tilde{R}_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha|\,|(R_3 - \tilde{R}_3) \cdot \tilde{R}'_\alpha| \leq \|R_3 - \tilde{R}_3\|\|\tilde{R}'_\alpha\|^2,$$

$$|\tilde{R}_3 \cdot R'_\alpha|\,|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot R_3| \leq \|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|\|R'_\alpha\|$$

et

$$|R_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha|\,|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot \tilde{R}_3| \leq \|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|\|\tilde{R}'_\alpha\|,$$

sachant que $\|R_3\| = \|\tilde{R}_3\| = 1$.

Par suite, en intégrant sur $]0,1[$ tout en utilisant le fait que les espaces $H^1$ et $W^{1,p}$ s'injectent dans $L^\infty$, on trouve

$$\int_0^1 |(R_3 - \tilde{R}_3)\cdot R'_\alpha|\,|R_3 \cdot R'_\alpha||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3 \leq \|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^\infty}\|R'_\alpha\|^2_{L^2}\|\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty}\|\theta_\alpha\|_{L^\infty}$$

et

$$\int_0^1 |\tilde{R}_3 \cdot R'_\alpha|\,|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot R_3||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3$$
$$\leq c\|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|_{L^p}\|R'_\alpha\|_{L^p}\|\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty}\|\theta_\alpha\|_{L^\infty}. \quad (4.68)$$

Pour l'inégalité (4.68), on a eu recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui montre que $\|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|\|R'_\alpha\| \in L^{\frac{p}{2}}$ avec l'estimation

$$\big\|\|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|\|R'_\alpha\|\big\|_{L^{\frac{p}{2}}} \leq \|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|_{L^p}\|R'_\alpha\|_{L^p}.$$

Finalement, à l'aide de ces inégalités, le premier terme du membre droite de l'inégalité (4.66) devient en intégrant,

$$\int_0^1 \big|(R_3 \cdot R'_\alpha)^2 - (\tilde{R}_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha)^2\big||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3$$
$$\leq \|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^\infty}(\|R'_\alpha\|^2_{L^2}\| + \|\tilde{R}'_\alpha\|^2_{L^2})\|\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty}\|\theta_\alpha\|_{L^\infty}$$
$$+ \|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|_{L^p}(\|R'_\alpha\|_{L^p} + \|\tilde{R}'_\alpha\|_{L^p})\|\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty}\|\theta_\alpha\|_{L^\infty}. \quad (4.69)$$

Ainsi, par l'injection de Sobolev continue $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ et par l'inégalité $\|f'\|_{L^p} \leq \|f\|_{W^{1,p}}$ pour tout $f \in W^{1,p}$, (4.69) devient

$$\int_0^1 \big|(R_3 \cdot R'_\alpha)^2 - (\tilde{R}_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha)^2\big||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3 \leq c(R,\tilde{\rho}_\alpha)\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}\|\theta_\alpha\|_{L^\infty}, \quad (4.70)$$

où la constante $c$ dépend en fait de $R'$, $\tilde{R}'$ et $\tilde{\rho}_\alpha$ et est localement bornée quand $\tilde{R}_\alpha$ est dans une boule de $W^{1,p} \subset W^{1,2} := H^1$ et quand $\tilde{\rho}_\alpha$ est dans une boule de $L^\infty$.

Passons au deuxième terme. De même, on écrit

$$\int_0^1 \big||R'_\alpha|^2 - |\tilde{R'_\alpha}|^2\big||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3$$
$$= \int_0^1 \big||R'_\alpha| - |\tilde{R'_\alpha}|\big|(|R'_\alpha| + |\tilde{R'_\alpha}|)|\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3$$
$$\leq \int_0^1 |R'_\alpha - \tilde{R'_\alpha}|(|R'_\alpha| + |\tilde{R'_\alpha}|)|\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3$$
$$\leq \int_0^1 |R'_\alpha - \tilde{R'_\alpha}||R'_\alpha||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3 + \int_0^1 |R'_\alpha - \tilde{R'_\alpha}||\tilde{R'_\alpha}||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3.$$

Toutes ces intégrales ont bien un sens car leurs intégrandes sont dans $L^{\frac{p}{2}}$ (étant un produit de deux fonctions de $L^p$ et sachant que $\tilde{\rho}_\alpha$ et $\theta_\alpha$ sont dans $L^\infty$) avec $\frac{p}{2} \geq 1$ et par suite $L^{\frac{p}{2}} \subseteq L^1$.
Par les mêmes arguments que ceux utilisés précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big||R'_\alpha|^2 - |\tilde{R'_\alpha}|^2\big||\tilde{\rho}_\alpha||\theta_\alpha|\,dx_3 \\ &\leq \|R'_\alpha - \tilde{R'_\alpha}\|_{L^p}(\|R'_\alpha\|_{L^p} + \|\tilde{R'_\alpha}\|_{L^p})\|\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty}\|\theta_\alpha\|_{L^\infty} \\ &\leq c(R',\tilde{R}',\tilde{\rho}_\alpha)\|R_\alpha - \tilde{R}_\alpha\|_{W^{1,p}}\|\theta_\alpha\|_{L^\infty}. \quad (4.71)\end{aligned}$$

La constante $c(R',\tilde{R}',\tilde{\rho}_\alpha)$ est également localement bornée pour les mêmes raisons.

Il reste le terme $\int_0^1((R_3\cdot\tilde{m}')(R_3\cdot n') - (\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3\cdot n'))\,dx_3$. On procède comme pour le premier terme et on fait la décomposition

$$\begin{aligned}&\int_0^1((R_3\cdot\tilde{m}')(R_3\cdot n') - (\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3\cdot n'))_{,}dx_3 \\ &= \int_0^1((R_3-\tilde{R}_3)\cdot\tilde{m}')(R_3\cdot n')\,dx_3 + \int_0^1((\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(R_3-\tilde{R}_3)\cdot n'))\,dx_3.\end{aligned}$$

De même, ces intégrales sont bien définies dans la mesure où leurs intégrandes sont dans $L^1$ par Cauchy-Schwarz. Par suite ponctuellement en $x_3$, on trouve

$$|(R_3-\tilde{R}_3)\cdot\tilde{m}'|\,|R_3\cdot n'| \leq \|R_3-\tilde{R}_3\|\|\tilde{m}'\|\|n'\|,$$

par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ et de même

$$|\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}'|\,|(R_3-\tilde{R}_3)\cdot n'| \leq \|R_3-\tilde{R}_3\|\|\tilde{m}'\|\|n'\|.$$

Finalement, on obtient en intégrant

$$\int_0^1 \big|(R_3\cdot\tilde{m}')(R_3\cdot n') - (\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3\cdot n')\big|\,dx_3 \leq 2\|R_3-\tilde{R}_3\|_{L^\infty}\|\tilde{m}'\|_{L^2}\|n'\|_{L^2},$$

par Cauchy-Schwarz dans $L^2$.
Soit, par l'injection continue $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$

$$\int_0^1 \big|(R_3\cdot\tilde{m}')(R_3\cdot n') - (\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3\cdot n')\big|\,dx_3 \leq c(\tilde{m}')\|R_3-\tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}\|n\|_{H^1}, \quad (4.72)$$

où $c(\tilde{m}')$ est localement bornée quand $\tilde{m}'$ appartient à une boule de $L^2$. Enfin, en injectant les majorations (4.65), (4.69), (4.71) et (4.72) dans (4.62), on obtient (après avoir divisé par $\|Z\|_V$)

$$\|Y-\tilde{Y}\|_V \leq c\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \quad (4.73)$$

où la constante $c$ dépend de $R'$, $\tilde{R}'$, $\tilde{\rho}_\alpha$ et $\tilde{m}'$ et est localement bornée. □

L'inégalité (4.73) montre que l'application

$$R \in W^{1,p}(]0,1[;SO(3)) \mapsto (\rho_\alpha, m) \in V$$

est localement lipschitzienne sur $W^{1,p}$ par rapport à $R$, où le couple $(\rho_\alpha, m)$ est l'unique solution du problème variationnel (4.36).

Revenons à notre but qui est ici d'estimer $\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,p}}$.

Dans toute la suite, on suppose que l'espace de Sobolev $W^{s,p}$, pour $s \geq 2$ et $1 \leq p \leq +\infty$, est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{s} \|D^i u\|_{L^p},$$

où $u \in W^{s,p}(I)$ et $Du, D^2u, ..., D^i u$ sont ses dérivées successives.

**Estimations de la fonction $m$**

On rappelle que nous nous intéressons à montrer la dépendance lipschitzienne de la fonction $m$ en norme $W^{2,p}$ en fonction de $R \in W^{1,p}$ ($p \geq 2$), afin de pouvoir par la suite remonter au caractère lipschitzien du second membre du problème d'évolution.

À partir de la définition de la norme $W^{s,p}$ donnée ci-dessus, on peut écrire

$$\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,p}} = \|m-\tilde{m}\|_{W^{1,p}} + \|m''-\tilde{m}''\|_{L^p}. \tag{4.74}$$

Comme pour $p \geq 2$, l'espace de Sobolev $W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ s'injecte continûment dans $W^{1,\infty}$, lequel s'injecte dans $W^{1,p}$ ($p \leq +\infty$), alors on a

$$\|m-\tilde{m}\|_{W^{1,p}} \leq c\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}}. \tag{4.75}$$

On est amené à estimer $\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}}$ et on a le résultat suivant.

**Proposition 4.2.2.** *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 4.2.1, on a l'estimation*

$$\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.76}$$

*où la constante dépend de $R', \tilde{R}', \rho_\alpha, \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{\rho}'_\alpha, m', \tilde{m}'$ et $f_r$ et est localement bornée.*

*Démonstration.* On sait que

$$\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}} = \|m-\tilde{m}\|_{W^{1,\frac{2p}{p+2}}} + \|m''-\tilde{m}''\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}}. \tag{4.77}$$

Pour ce qui concerne $\|m-\tilde{m}\|_{W^{1,\frac{2p}{p+2}}}$, comme $\frac{2p}{p+2} \leq 2$ pour tout $p \geq 2$, on a alors l'injection continue $H^1 \subseteq W^{1,\frac{2p}{p+2}}$ et par suite l'inégalité

$$\|m-\tilde{m}\|_{W^{1,\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|m-\tilde{m}\|_{H^1}.$$

Soit par le paragraphe précédent sur l'estimation $H^1$,

$$\|m-\tilde{m}\|_{W^{1,\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.78}$$

où la constante $c$ est localement bornée.

Passons au second terme du second membre de l'égalité (4.77). Nous le majorons à l'aide des équations fortes de la fonction $m$ ((4.42)) et l'on a,

$$\begin{aligned}
&m''-\tilde{m}'' \\
&= -\frac{\mu+\lambda}{\mu}\big[(R_3\cdot m')(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-(\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big] \\
&\quad -\frac{\lambda}{\mu}\big[(\rho_1+\rho_2)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-(\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2)(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big]+\frac{2\mu+3\lambda}{\mu} \\
&\qquad \big[(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big]-\frac{1}{\mu\, a_h}\big[(f_r\cdot R_\alpha)R_\alpha-(f_r\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big] \\
&\qquad\quad -\frac{1}{2\mu+\lambda}\big[(\mu+\lambda)\big((R_3'\cdot m')R_3-(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{m}')\tilde{R}_3\big)+\lambda\big((\rho_1+\rho_2)'R_3 \\
&\qquad\qquad -(\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2)'\tilde{R}_3\big)-\frac{1}{a_h}\big((f_r\cdot R_3)R_3-(f_r\cdot\tilde{R}_3)\tilde{R}_3\big)\big].
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Pour la suite, nous décomposons le second membre de cette égalité en ayant recours aux décompositions suivantes,

$$\begin{aligned}
&(R_3\cdot m')(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-(\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha \\
&\quad=\big((R_3-\tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha+\big((m'-\tilde{m}')\cdot\tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha+(\tilde{R}_3\cdot m') \\
&\qquad\big[\big((R_3'-\tilde{R}_3')\cdot R_\alpha\big)R_\alpha+\big((R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\cdot\tilde{R}_3'\big)\tilde{R}_\alpha+(\tilde{R}_3'\cdot R_\alpha)(R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\big],
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_1(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-\tilde{\rho}_1(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha \\
&\qquad=(\rho_1-\tilde{\rho}_1)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha+\tilde{\rho}_1\big((R_3'-\tilde{R}_3')\cdot R_\alpha\big)R_\alpha \\
&\qquad\qquad+\tilde{\rho}_1\big((R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\cdot\tilde{R}_3'\big)\tilde{R}_\alpha+\tilde{\rho}_1(\tilde{R}_3'\cdot R_\alpha)(R_\alpha-\tilde{R}_\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha \\
&\qquad=\big((R_3'-\tilde{R}_3')\cdot R_\alpha\big)R_\alpha+\big((R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\cdot\tilde{R}_3'\big)\tilde{R}_\alpha+(\tilde{R}_3'\cdot R_\alpha)(R_\alpha-\tilde{R}_\alpha),
\end{aligned}$$

$$(f_r \cdot R_\alpha)R_\alpha - (f_r \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha = \big((R_\alpha - \tilde{R}_\alpha)\cdot f_r\big)\tilde{R}_\alpha + (f_r \cdot R_\alpha)(R_\alpha - \tilde{R}_\alpha),$$

$$\begin{aligned}(R_3' \cdot m')R_3 - (\tilde{R}_3' \cdot \tilde{m}')\tilde{R}_3 \\ = \big((R_3' - \tilde{R}_3')\cdot m'\big)R_3 + \big((m' - \tilde{m}')\cdot \tilde{R}_3'\big)\tilde{R}_3 + (\tilde{R}_3' \cdot m')(R_3 - \tilde{R}_3)\end{aligned}$$

et

$$\rho_1' R_3 - \tilde{\rho}_1' \tilde{R}_3 = (\rho_1' - \tilde{\rho}_1')R_3 + (R_3 - \tilde{R}_3)\tilde{\rho}_1'.$$

Notons que tous les termes de ces décompositions sont bien définis pour $R \in W^{1,p}$, $\rho \in H^1$ et $m \in W^{2,p}$. En fait, ils sont dans $L^{\frac{p}{2}}$ (comme produits de deux fonctions $L^p$), dans $L^{\frac{2p}{p+2}}$ (comme produits d'une fonction $L^2$ avec une fonction $L^p$) ou dans $L^p$, et ce tout en utilisant le fait que $R_i$ et $\tilde{R}_i$ sont dans $L^\infty(]0,1[;\mathbb{R}^3)$, $\rho_\alpha$ et $\tilde{\rho}_\alpha$ sont dans $L^\infty(]0,1[;\mathbb{R})$ et la propriété d'algèbre de $L^\infty$.

Considérons la décomposition (4.80) et calculons la norme $L^{\frac{2p}{p+2}}$ du premier terme de son membre de droite. On a par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$

$$\|\big((R_3 - \tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3' \cdot R_\alpha)R_\alpha\| \leq \|R_3 - \tilde{R}_3\|\|m'\|\|R_3'\|,$$

car $R_\alpha$ est de norme égale à 1. Ainsi, par l'inégalité de Hölder (prendre $r = 2$ et $s = p$ dans le Lemme 4.1.5), on trouve que le produit $\|m'\|\|R_3'\|$ est dans $L^{\frac{2p}{p+2}}$ et l'on a

$$\big\|\|m'\|\|R_3'\|\big\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq \|m'\|_{L^2}\|R_3'\|_{L^p}.$$

Par suite, en utilisant le fait que $(R_3 - \tilde{R}_3) \in L^\infty$, on trouve

$$\|\big((R_3 - \tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3' \cdot R_\alpha)R_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq \|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^\infty}\|m'\|_{L^2}\|R_3'\|_{L^p}.$$

Soit,

$$\|\big((R_3 - \tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3' \cdot R_\alpha)R_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(R_3', m')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}},$$

par l'injection de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$.

En suivant la même démarche pour les autres termes de la décomposition (4.80), il vient

$$\begin{aligned}\|\big((m' - \tilde{m}')\cdot \tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3' \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} &\leq \|m' - \tilde{m}'\|_{L^2}\|\tilde{R}_3'\|_{L^p} \\ &\leq c(\tilde{R}_3')\|m - \tilde{m}\|_{H^1}.\end{aligned}$$

D'où, l'estimation $H^1$ démontrée ci-dessus (cf.Théorème 4.2.1) nous donne

$$\|\big((m' - \tilde{m}')\cdot \tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3' \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(R', \tilde{R}', \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{m}')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}.$$

De même, on a

$$\|(\tilde{R}_3 \cdot m')\big((R_3' - \tilde{R}_3')\cdot R_\alpha\big)R_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(m')\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}.$$

Enfin, pour les deux derniers termes de (4.80), on utilise également l'inégalité de Hölder (pour $m' \in L^2$ et $\tilde{R}_3' \in L^p$), puis l'injection $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ (pour $R_\alpha - \tilde{R}_\alpha$) et l'on obtient

$$\begin{aligned}\big\|(\tilde{R}_3 \cdot m')\big[\big((R_\alpha - \tilde{R}_\alpha)\cdot \tilde{R}_3'\big)\tilde{R}_\alpha + (\tilde{R}_3' \cdot R_\alpha)(R_\alpha - \tilde{R}_\alpha)\big]\big\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \\ \leq 2c(m', \tilde{R}_3')\|R_\alpha - \tilde{R}_\alpha\|_{W^{1,p}},\end{aligned}$$

sachant que $\|R_i\| = \|\tilde{R}_i\| = 1$.

Finalement, on a bien pu montrer la dépendance lipschitzienne par rapport à $R$ de la décomposition (4.80),

$$\begin{aligned}\|(R_3 \cdot m')(R_3' \cdot R_\alpha)R_\alpha - (\tilde{R}_3 \cdot \tilde{m}')(\tilde{R}_3' \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \\ \leq c(R', \tilde{R}', \tilde{\rho}_\alpha, m', \tilde{m}')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}.\end{aligned}$$

On procède de même pour les autres décompositions et l'on trouve

$$\begin{aligned}&\|\rho_1(R_3' \cdot R_\alpha)R_\alpha - \tilde{\rho}_1(\tilde{R}_3' \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \\ &\leq \|R_3'\|_{L^p}\|\rho_1 - \tilde{\rho}_1\|_{L^2} + \|\tilde{\rho}_1\|_{L^2}\big(\|R_3' - \tilde{R}_3'\|_{L^p} + 2\|\tilde{R}_3'\|_{L^p}\|R_\alpha - \tilde{R}_\alpha\|_{L^\infty}\big) \\ &\leq c(R_3')\|\rho_1 - \tilde{\rho}_1\|_{H^1} + c(\tilde{\rho}_1, \tilde{R}_3')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}.\end{aligned}$$

Soit, par le Théorème 4.2.1,

$$\|\rho_1(R_3' \cdot R_\alpha)R_\alpha - \tilde{\rho}_1(\tilde{R}_3' \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(\tilde{\rho}_\alpha, R', \tilde{R}', \tilde{m}')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}.$$

On a aussi,

$$\|(R_3' \cdot R_\alpha)R_\alpha - (\tilde{R}_3' \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(\tilde{R}_3')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}},$$

$$\|(f_r \cdot R_\alpha)R_\alpha - (f_r \cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq 2c(f_r)\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}$$

et

$$\begin{aligned}\|(R_3' \cdot m')R_3 - (\tilde{R}_3' \cdot \tilde{m}')\tilde{R}_3\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} &\leq c(m', \tilde{R}_3')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}} + c(\tilde{R}_3')\|m' - \tilde{m}'\|_{L^2} \\ &\leq c(R', \tilde{R}', \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{m}')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}},\end{aligned}$$

par le Théorème 4.2.1.
Enfin, on a

$$\begin{aligned}\|\rho_1' R_3 - \tilde{\rho}_1' \tilde{R}_3\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} &\leq \|\rho_1' - \tilde{\rho}_1'\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} + \|\tilde{\rho}_1'\|_{L^2}\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^p} \\ &\leq c\|\rho_1 - \tilde{\rho}_1\|_{H^1} + c(\tilde{\rho}_1')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}},\end{aligned}$$

car $\|\rho_1' - \tilde{\rho}_1'\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|\rho_1' - \tilde{\rho}_1'\|_{L^2}$. Ainsi, en utilisant l'estimation variationnelle donnée par le Théorème 4.2.1, on obtient

$$\|\rho_1' R_3 - \tilde{\rho}_1' \tilde{R}_3\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(R', \tilde{R}', \tilde{\rho}_1', \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{m}')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}.$$

Notons que toutes les constantes de Lipschitz apparues ci-dessus sont localement bornées quand $\tilde{R}_i$ appartient à une boule de $W^{1,p}$ (autrement dit $\tilde{R}_i'$ est dans une boule de $L^p$), $\tilde{m}'$ est dans une boule de $L^2$ ou quand $\tilde{\rho}_\alpha, \tilde{\rho}_\alpha'$ appartiennent à des boules de $L^\infty$ et de $L^2$ respectivement. □

En injectant le résultat de la Proposition 4.2.2 dans (4.75), on montre que

$$\|m - \tilde{m}\|_{W^{1,p}} \leq c\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.81}$$

avec une constante localement bornée. Il reste donc à majorer le second terme de l'identité (4.74) qui n'est autre autre que $\|m'' - \tilde{m}''\|_{L^p}$. Cette majoration fait appel à l'estimation suivante des fonctions $\rho_\alpha$.

**Proposition 4.2.3.** *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 4.2.1, on a l'estimation*

$$\|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}. \tag{4.82}$$

**Remarque 4.2.4.** Nous avons vu dans le Théorème 4.1.8 que deux cas se présentent pour la régularité des fonctions $\rho_\alpha$. En effet, pour $2 \leq p < 4$, on a $\rho_\alpha \in W^{2,\frac{p}{2}}$ alors que pour tout $p \geq 4$ on a $\rho_\alpha \in H^2$. Or, on a les injections $W^{2,\frac{p}{2}} \subseteq W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ ($\frac{2p}{p+2} \leq \frac{p}{2}$ pour $p \geq 2$) et $H^2 \subset W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ (pour tout $p$). Pour cette raison, il suffit de traiter dans la suite le cas où $\rho_\alpha$ appartient à $W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ pour tout $p \geq 2$.

Revenons à la preuve de la Proposition 4.2.3.

*Démonstration.* À partir de la valeur de $\rho_\alpha''$ donnée par

$$\begin{aligned}\rho_\alpha'' = \frac{1}{\mu J_\alpha^h}\big[(2\mu+\lambda)\,a_h + J_\alpha^h\big(\mu|R_\alpha'|^2 + (\mu+\lambda)(R_3\cdot R_\alpha')^2\big)\big] \\ + \frac{1}{\mu\, J_\alpha^h}\big[\lambda\, a_h(R_3\cdot m' + \rho_\gamma) - a_h(2\mu+3\lambda) - \bar{h}\cdot R_\alpha\big],\end{aligned} \tag{4.83}$$

où $\gamma \neq \alpha$, on a

$$\begin{aligned}\rho_\alpha'' - \tilde{\rho}_\alpha'' = \big(|R_\alpha'|^2\rho_\alpha - |\tilde{R}_\alpha'|^2\tilde{\rho}_\alpha\big) + \frac{\mu+\lambda}{\mu J_\alpha^h}\big((R_3\cdot R_\alpha')^2\rho_\alpha - (\tilde{R}_3\cdot\tilde{R}_\alpha')^2\tilde{\rho}_\alpha\big) \\ + \frac{1}{\mu\, J_\alpha^h}\big[\lambda\, a_h\big(R_3\cdot m' - \tilde{R}_3\cdot\tilde{m}' + \rho_\gamma - \tilde{\rho}_\gamma\big) - \bar{h}\cdot(R_\alpha - \tilde{R}_\alpha)\big].\end{aligned} \tag{4.84}$$

Soit à l'aide de décompositions convenables,

$$\begin{aligned}
&\rho''_\alpha - \tilde{\rho}''_\alpha \\
&= (R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot(R'_\alpha\rho_\alpha + \tilde{R}'_\alpha\tilde{\rho}_\alpha) + (\tilde{R}'_\alpha\cdot R'_\alpha)(\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha) \\
&\quad + \frac{\mu+\lambda}{\mu J^h_\alpha}\big[\big((R_3-\tilde{R}_3)\cdot R'_\alpha\big)(R_3\cdot R'_\alpha + \tilde{R}_3\cdot R'_\alpha)\rho_\alpha + (\tilde{R}_3\cdot\tilde{R}'_\alpha)^2(\rho_\alpha-\tilde{\rho}_\alpha) \\
&\quad + \big((R'_\alpha-\tilde{R}'_\alpha)\cdot\tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3\cdot\tilde{R}'_\alpha + \tilde{R}_3\cdot R'_\alpha)\tilde{\rho}_\alpha\big] + \frac{1}{\mu J^h_\alpha}\big[\lambda\, a_h\big((R_3-\tilde{R}_3)\cdot m' \\
&\quad + (m'-\tilde{m}')\cdot\tilde{R}_3 + \rho_\gamma - \tilde{\rho}_\gamma\big)\bar{h}\cdot(R_\alpha - \tilde{R}_\alpha)\big].
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Par définition de la norme $W^{s,p}$ donnée ci-dessus, on a

$$\|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}} = \|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{W^{1,\frac{2p}{p+2}}} + \|\rho''_\alpha - \tilde{\rho}''_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}}. \tag{4.86}$$

Par l'injection continue $W^{1,2} = H^1 \subset W^{1,\frac{2p}{p+2}}$ ($\frac{2p}{p+2} \leq 2$), on a

$$\|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{W^{1,\frac{2p}{p+2}}} < c\|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{H^1}.$$

Ainsi, par l'estimation $H^1$ trouvée ci-dessus, on obtient

$$\|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{W^{1,\frac{2p}{p+2}}} < c\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}. \tag{4.87}$$

Il reste donc à majorer le second terme de l'égalité (4.86). Pour ce faire, nous considérons l'égalité (4.85) et nous commençons par majorer la norme $L^{\frac{2p}{p+2}}$ du premier terme de son membre de droite. Il vient

$$\begin{aligned}
&\|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot(R'_\alpha\rho_\alpha + \tilde{R}'_\alpha\tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \\
&\qquad \leq \|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot(R'_\alpha\rho_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} + \|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot(\tilde{R}'_\alpha\tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}},
\end{aligned} \tag{4.88}$$

par l'inégalité triangulaire.

Or, toujours par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$, on a l'inégalité

$$\|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha)\cdot(R'_\alpha\rho_\alpha)\| \leq \|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|\|R'_\alpha\||\rho_\alpha|.$$

Comme $R'_\alpha$ et $\tilde{R}'_\alpha$ sont dans $L^p(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ (étant des dérivées de fonctions de $W^{1,p}$), on trouve alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que le produit $\|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|\|R'_\alpha\|$ est dans $L^{\frac{p}{2}}$ avec

$$\big\|\|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|\|R'_\alpha\|\big\|_{L^{\frac{p}{2}}} \leq \|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|_{L^p}\|R'_\alpha\|_{L^p}.$$

Soit, par l'injection continue $L^{\frac{p}{2}} \subseteq L^{\frac{2p}{p+2}}$,

$$\big\| \|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\| \|R'_\alpha\| \big\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|_{L^p} \|R'_\alpha\|_{L^p}. \tag{4.89}$$

Ainsi, en se servant de l'injection de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^\infty$, autrement dit du fait que $\rho_\alpha$ est dans $L^\infty$, on trouve

$$\|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha) \cdot (R'_\alpha \rho_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha\|_{L^p} \|R'_\alpha\|_{L^p} \|\rho_\alpha\|_{L^\infty}.$$

Par suite,

$$\|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha) \cdot (R'_\alpha \rho_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(R'_\alpha, \rho_\alpha)\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}. \tag{4.90}$$

De même, on montre que

$$\|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha) \cdot (\tilde{R}'_\alpha \tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(\tilde{R}'_\alpha, \tilde{\rho}_\alpha)\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}. \tag{4.91}$$

À l'aide de (4.90) et (4.91), l'inégalité (4.88) devient

$$\|(R'_\alpha - \tilde{R}'_\alpha) \cdot (R'_\alpha \rho_\alpha + \tilde{R}'_\alpha \tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(R'_\alpha, \rho_\alpha, \tilde{R}'_\alpha, \tilde{\rho}_\alpha)\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}. \tag{4.92}$$

En utilisant les mêmes arguments, on trouve

$$\|(\tilde{R}'_\alpha \cdot R'_\alpha)(\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|\tilde{R}'_\alpha\|_{L^p} \|R'_\alpha\|_{L^p} \|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty}.$$

Soit, par l'injection $H^1 \hookrightarrow L^\infty$

$$\|(\tilde{R}'_\alpha \cdot R'_\alpha)(\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c(\tilde{R}'_\alpha, R'_\alpha)\|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{H^1}. \tag{4.93}$$

D'où, par l'estimation $H^1$ calculée précédemment,

$$\|(\tilde{R}'_\alpha \cdot R'_\alpha)(\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \leq c\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.94}$$

avec une constante $c$ localement bornée.

Concernant le troisième terme de (4.85), on a sachant que $\|R_3\| = \|\tilde{R}_3\| = 1$,

$$\begin{aligned} &\|\big((R_3 - \tilde{R}_3) \cdot R'_\alpha\big)(R_3 \cdot R'_\alpha + \tilde{R}_3 \cdot R'_\alpha)\rho_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} \\ &\qquad \leq 2c\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^\infty} \|\rho_\alpha\|_{L^\infty} \|R'_\alpha\|^2_{L^p} \\ &\qquad \leq c(\rho_\alpha, R'_\alpha)\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}, \end{aligned} \tag{4.95}$$

toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'injection $L^{\frac{p}{2}} \subseteq L^{\frac{2p}{p+2}}$ (pour $R'_\alpha \in L^p$) et les injections de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ (pour $R_3 - \tilde{R}_3$) et $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ (pour $\rho_\alpha$).
Par les mêmes arguments, on a d'une part

$$\begin{aligned} \|(\tilde{R}_3 \cdot \tilde{R}'_\alpha)^2(\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha)\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}} &\leq \|\tilde{R}'_\alpha\|^2_{L^p} \|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty} \\ &\leq c(\tilde{R}'_\alpha)\|\rho_\alpha - \tilde{\rho}_\alpha\|_{H^1} \\ &\leq c(R', \tilde{R}', \rho_\alpha, \tilde{m}')\|R_\alpha - \tilde{R}_\alpha\|_{W^{1,p}}, \end{aligned} \tag{4.96}$$

par le Théorème 4.2.1.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|\big((R'_\alpha-\tilde{R}'_\alpha)\cdot\tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3\cdot\tilde{R}'_\alpha+\tilde{R}_3\cdot R'_\alpha)\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}}&\\ \leq \|R'_\alpha-\tilde{R}'_\alpha\|_{L^p}\|\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^\infty}\big(\|\tilde{R}'_\alpha\|_{L^p}+\|R'_\alpha\|_{L^p}\big)&\\ \leq c(\tilde{\rho}_\alpha,R'_\alpha,\tilde{R}'_\alpha)\|R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\|_{W^{1,p}}.&\end{aligned} \tag{4.97}$$

De plus, pour les deux premiers termes du dernier crochet de l'égalité (4.85), on a de même par l'inégalité de Hölder généralisée

$$\begin{aligned}\|(R_3-\tilde{R}_3)\cdot m'\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}}&\leq \|R_3-\tilde{R}_3\|_{L^p}\|m'\|_{L^2}\\ &\leq c(m')\|R_3-\tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}\end{aligned} \tag{4.98}$$

et

$$\begin{aligned}\|(m'-\tilde{m}')\cdot\tilde{R}_3\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}}&\leq \|m'-\tilde{m}'\|_{L^2}\\ &\leq c\|m-\tilde{m}\|_{H^1}\\ &\leq c(R',\tilde{R}',\rho_\alpha,\tilde{m}')\|R_3-\tilde{R}_3\|_{W^{1,p}},\end{aligned} \tag{4.99}$$

par le Théorème 4.2.1. Pour ce qui concerne le terme $\rho_\alpha-\tilde{\rho}_\alpha$, il se majore à l'aide de l'inclusion continue $L^2\subset L^{\frac{2p}{p+2}}$ comme suit,

$$\begin{aligned}\|\rho_\alpha-\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^{\frac{2p}{p+2}}}&\leq c\|\rho_\alpha-\tilde{\rho}_\alpha\|_{L^2}\\ &\leq c\|\rho_\alpha-\tilde{\rho}_\alpha\|_{H^1}\\ &\leq c(R',\tilde{R}',\rho_\alpha,\tilde{m}')\|R_3-\tilde{R}_3\|_{W^{1,p}},\end{aligned} \tag{4.100}$$

en se servant de même du Théorème 4.2.1.

Il reste le dernier terme de (4.85) qui se majore comme suit,

$$\begin{aligned}\|\bar{h}\cdot(R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\|_{L^{2p/p+2}}&\leq \|\bar{h}\|_{L^p}\|R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\|_{L^\infty}\\ &\leq c(\bar{h})\|R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\|_{W^{1,p}},\end{aligned}$$

par l'injection continue de Sobolev $W^{1,p}\hookrightarrow L^\infty$. □

À l'aide des dépendances lipschitziennes des fonctions $m$ et $\rho_\alpha$ en norme $W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ montrées dans les deux propositions précédentes, on arrive à estimer $\|m''-\tilde{m}''\|_{L^p}$ (le second membre de (4.74)) et l'on a le résultat suivant.

**Proposition 4.2.5.** *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 4.2.1, on a l'estimation*

$$\|m''-\tilde{m}''\|_{L^p}\leq c\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.101}$$

*où la constante dépend de $R',\tilde{R}',\rho_\alpha,\tilde{\rho}_\alpha,\tilde{\rho}'_\alpha,m',\tilde{m}'$ et $f_r$ et est localement bornée.*

*Démonstration.* Nous majorons comme précédemment $\|m'' - \tilde{m}''\|_{L^p}$ à partir de la différence des équations fortes des fonctions $m$ et $\tilde{m}$ écrite à l'aide des décompositions précédentes que l'on rappelle son expression

$$\begin{aligned}
&m'' - \tilde{m}'' \\
&= -\frac{\mu+\lambda}{\mu}\big[(R_3\cdot m')(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha - (\tilde{R}_3\cdot \tilde{m}')(\tilde{R}_3'\cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big] \\
&\quad -\frac{\lambda}{\mu}\big[(\rho_1+\rho_2)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha - (\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2)(\tilde{R}_3'\cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big] + \frac{2\mu+3\lambda}{\mu} \\
&\quad \big[(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha - (\tilde{R}_3'\cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big] - \frac{1}{\mu\, a_h}\big[(f_r\cdot R_\alpha)R_\alpha - (f_r\cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\big] \\
&\quad -\frac{1}{2\mu+\lambda}\big[(\mu+\lambda)\big((R_3'\cdot m')R_3 - (\tilde{R}_3'\cdot \tilde{m}')\tilde{R}_3\big) + \lambda\big((\rho_1+\rho_2)'R_3 \\
&\qquad\qquad - (\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2)'\tilde{R}_3\big) - \frac{1}{a_h}\big((f_r\cdot R_3)R_3 - (f_r\cdot \tilde{R}_3)\tilde{R}_3\big)\big].
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Nous détaillons juste la majoration en norme $L^{\frac{2p}{p+2}}$ du premier crochet de cette décomposition qui s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&(R_3\cdot m')(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha - (\tilde{R}_3\cdot \tilde{m}')(\tilde{R}_3'\cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha \\
&\quad = \big((R_3-\tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha + \big((m'-\tilde{m}')\cdot \tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3'\cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha + (\tilde{R}_3\cdot m') \\
&\quad \big[\big((R_3'-\tilde{R}_3')\cdot R_\alpha\big)R_\alpha + \big((R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\cdot \tilde{R}_3'\big)\tilde{R}_\alpha + (\tilde{R}_3'\cdot R_\alpha)(R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\big],
\end{aligned} \tag{4.103}$$

et nous n'écrivons que le résultat final pour les autres décompositions. Commençons par le premier terme du membre de droite de (4.103). On a par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$

$$\|\big((R_3-\tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha\| \le \|R_3-\tilde{R}_3\|\|m'\|\|R_3'\|,$$

car $R_\alpha$ est de norme égale à 1. Or, $R_3$, $\tilde{R}_3$ et $m'$ sont dans $W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ ($m$ étant dans $W^{2,p}$), ainsi par l'injection de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$, on obtient

$$\|\big((R_3-\tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha\|_{L^p} \le \|R_3-\tilde{R}_3\|_{L^\infty}\|m'\|_{L^\infty}\|R_3'\|_{L^p}.$$

Soit,

$$\|\big((R_3-\tilde{R}_3)\cdot m'\big)(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha\|_{L^p} \le c(R_3',m')\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}},$$

toujours par l'injection continue de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$.

En suivant la même démarche pour les autres termes de la décomposition (4.103), il vient

$$\begin{aligned}
\|\big((m'-\tilde{m}')\cdot \tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3'\cdot \tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^p} &\le \|m'-\tilde{m}'\|_{L^\infty}\|\tilde{R}_3'\|_{L^p} \\
&\le c(\tilde{R}_3')\|m-\tilde{m}\|_{W^{1,\infty}} \\
&\le c(\tilde{R}_3')\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}},
\end{aligned}$$

par l'injection continue $W^{2,\frac{2p}{p+2}} \hookrightarrow W^{1,\infty}$. D'où l'on trouve par la Proposition 4.2.2,

$$\|\big((m'-\tilde{m}')\cdot\tilde{R}_3\big)(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^p} \leq c(R',\tilde{R}',\tilde{\rho}_\alpha,\tilde{m}')\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\|(\tilde{R}_3\cdot m')\big((R_3'-\tilde{R}_3')\cdot R_\alpha\big)R_\alpha\|_{L^p} &\leq \|m'\|_{L^\infty}\|R_3'-\tilde{R}_3'\|_{L^p}\\ &\leq c(m')\|R_3-\tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}.\end{aligned}$$

Enfin, pour les deux derniers termes de (4.103), on trouve

$$\begin{aligned}&\|(\tilde{R}_3\cdot m')\big[\big((R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\cdot\tilde{R}_3'\big)\tilde{R}_\alpha+(\tilde{R}_3'\cdot R_\alpha)(R_\alpha-\tilde{R}_\alpha)\big]\|_{L^p}\\ &\qquad\leq 2c(m',\tilde{R}_3')\|R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\|_{W^{1,p}},\end{aligned}$$

sachant que $\|R_i\|=\|\tilde{R}_i\|=1$, $\tilde{R}_3'\in L^p$, $m'$, $R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\in L^\infty$ et toujours par l'injection continue $W^{1,p}\hookrightarrow L^\infty$.

Finalement, on a bien pu montrer la dépendance lipschitzienne par rapport à $R$ de la décomposition (4.103),

$$\|(R_3\cdot m')(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-(\tilde{R}_3\cdot\tilde{m}')(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^p} \leq c(R',\tilde{R}',\tilde{\rho}_\alpha,m',\tilde{m}')\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}.$$

On procède de même pour les autres décompositions et l'on trouve

$$\begin{aligned}&\|\rho_1(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-\tilde{\rho}_1(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^p}\\ &\quad\leq \|R_3'\|_{L^p}\|\rho_1-\tilde{\rho}_1\|_{L^\infty}+\|\tilde{\rho}_1\|_{L^\infty}(\|R_3'-\tilde{R}_3'\|_{L^p}+2\|\tilde{R}_3'\|_{L^p}\|R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\|_{L^\infty})\\ &\quad\leq c(R_3')\|\rho_1-\tilde{\rho}_1\|_{H^1}+c(\tilde{\rho}_1,\tilde{R}_3')\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}.\end{aligned}$$

Soit, par le Théorème 4.2.1,

$$\|\rho_1(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-\tilde{\rho}_1(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^p} \leq c(\tilde{\rho}_\alpha,R',\tilde{R}',\tilde{m}')\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}\|(R_3'\cdot R_\alpha)R_\alpha-(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^p} &\leq \|R_3'-\tilde{R}_3'\|_{L^p}+2\|R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\|_{L^\infty}\|\tilde{R}_3'\|_{L^p}\\ &\leq c(\tilde{R}_3')\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(f_r\cdot R_\alpha)R_\alpha-(f_r\cdot\tilde{R}_\alpha)\tilde{R}_\alpha\|_{L^p} &\leq 2\|R_\alpha-\tilde{R}_\alpha\|_{L^\infty}\|f_r\|_{L^p}\\ &\leq c(f_r)\|R-\tilde{R}\|_{W^{1,p}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\|(R_3'\cdot m')R_3-(\tilde{R}_3'\cdot\tilde{m}')\tilde{R}_3\|_{L^p}\\ &\quad\leq \|m'\|_{L^\infty}\|R_3'-\tilde{R}_3'\|_{L^p}+\|m'-\tilde{m}'\|_{L^\infty}\|\tilde{R}_3'\|_{L^p}+\|\tilde{R}_3'\|_{L^\infty}\|R_3-\tilde{R}_3\|_{L^\infty}\\ &\quad\leq c(m',\tilde{R}_3')\|R_3-\tilde{R}_3\|_{W^{1,p}}+c(\tilde{R}_3')\|m-\tilde{m}\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}},\end{aligned}$$

par l'injection continue $W^{2,\frac{2p}{p+2}} \hookrightarrow W^{1,\infty}$. Ainsi, l'estimation trouvée dans la Proposition 4.2.2 nous donne

$$\|(R_3' \cdot m')R_3 - (\tilde{R}_3' \cdot \tilde{m}')\tilde{R}_3\|_{L^p} \leq c\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}},$$

avec une constante $c$ localement bornée.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\|\rho_1' R_3 - \tilde{\rho}_1' \tilde{R}_3\|_{L^p} &\leq \|\rho_1' - \tilde{\rho}_1'\|_{L^p} + c(\tilde{\rho}_1')\|R_3 - \tilde{R}_3\|_{L^p} \\ &\leq c\|\rho_1 - \tilde{\rho}_1\|_{W^{2,\frac{2p}{p+2}}} + c(\tilde{\rho}_1')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}} \\ &\leq c(R', \tilde{R}', \tilde{\rho}_1', \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{m}')\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}},\end{aligned}$$

par la Proposition 4.2.3.

Notons que toutes les constantes de Lipschitz apparues ci-dessus sont localement bornées quand $\tilde{R}_i$ appartient à une boule de $W^{1,p}$ (autrement dit quand $\tilde{R}_i'$ est dans une boule de $L^p$), $\tilde{m}'$ est dans une boule de $L^2$ ou quand $\tilde{\rho}_\alpha, \tilde{\rho}_\alpha'$ appartiennent à des boules de $L^\infty$ et de $L^2$ respectivement. □

Finalement, en injectant les majorations (4.81) et (4.101) dans l'égalité (4.74), on trouve l'estimation souhaitée

$$\|m - \tilde{m}\|_{W^{2,p}} \leq c\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.104}$$

où la constante $c$ dépend en fait de $f, R', \tilde{R}', \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{\rho}_\alpha', m'$ et $\tilde{m}'$ et est également localement bornée. Cette estimation montre que l'application

$$\begin{aligned} S\colon W^{1,p}(]0,1[;SO(3)) &\longrightarrow W^{2,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3) \\ R &\mapsto m \end{aligned}$$

est localement lipschitzienne sur $W^{1,p}$.

Nous pouvons ainsi revenir au but principal de ce chapitre, montrer le caractère lipschitzien du second membre de l'équation différentielle qui nous donne l'existence et l'unicité du problème d'évolution mécanique.

### 4.2.2 Caractère localement lipschitzien du second membre du problème d'évolution

Nous commençons par rappeler l'expression du problème d'évolution mécanique

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((A_m R^T)^a\big)\big(A_m R^T\big)^a R, \tag{4.105}$$

où $A_m = (\rho_1 R_1 | \rho_2 R_2 | m')$ et $(\rho_1, \rho_2, m)$ est la solution unique du problème de minimisation correspondant à la rotation $R$.

La matrice $(A_m R^T)^a := \frac{1}{2}(A_m R^T - R A_m^T)$ est égale à

$$(A_m R^T)^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(R_3 \wedge m')_3 & (R_3 \wedge m')_2 \\ (R_3 \wedge m')_3 & 0 & -(R_3 \wedge m')_1 \\ -(R_3 \wedge m')_2 & (R_3 \wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.106}$$

ce qui montre qu'elle ne dépend pas des coefficients $\rho_\alpha$. Pour cette raison, nous la noterons dans toute la suite par la matrice $B_{m',R}$ mettant en évidence la dépendance en $m'$ et $R$. Ainsi, l'équation différentielle ordinaire (4.105) peut s'écrire sous la forme $\frac{d}{dt}R(t) = G(R(t))$, avec

$$G(R) := g(m'(R), R) = \frac{1}{\eta} \nu^+(B_{m',R}) B_{m',R} R \tag{4.107}$$

et

$$\nu^+(B_{m',R}) = (1 + \|B_{m',R}\|^{r+1})^k \|B_{m',R}\|^{r-1},$$

$r, k \geq 1$.

**Théorème 4.2.6.** *Soit $I = [0,1]$, on suppose $f_r, \bar{h} \in C^0([0,+\infty[; L^p(I;\mathbb{R}^3))$ et la condition initiale sur la rotation $R_0 \in W^{1,p}(I; SO(3))$ avec $p \in [2,+\infty]$. Alors il existe un temps $T^\star$ maximal tel que le problème d'évolution réduit admette une unique solution $R \in C^1([0,T^\star[; W^{1,p}(I; SO(3)))$.*

*Démonstration.* Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}R(t) = G(R(t))$ avec $G$ donné par (4.107), nous allons appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'application $G$. Il faut donc commencer par vérifier que pour $R \in W^{1,p}(]0,1[; SO(3))$, son image par $G$ est bien dans l'espace $W^{1,p}(]0,1[; M_3)$.

Pour ce faire, on définit l'application

$$\begin{aligned} h\colon W^{1,p}(]0,1[; M_3^a) &\longrightarrow W^{1,p}(]0,1[; M_3^a) \\ X &\mapsto \frac{1}{\eta}(1 + \|X\|^{r+1})^k \|X\|^{r-1} X. \end{aligned}$$

Cette application a la forme particulière :

$$h(X) = \frac{1}{(k+1)(r+1)\eta} \nabla (1 + \|X\|^{r+1})^{k+1}.$$

Pour $r = k = 1$, $h$ est $C^3(M_3^a; M_3^a)$ (le carré de la norme étant $C^4$) et elle est donc localement lipschitzienne sur $M_3^a$.

Avec la définition de $h$, l'application $g$ s'écrit, $g\colon (\tau,R) \longmapsto h(B_{\tau,R})R$, à condition que la matrice $B_{\tau,R}$ soit dans $W^{1,p}(]0,1[;M_3^a)$. Pour le vérifier, on se sert d'un résultat antérieur sur la régularité de la fonction $m$. En fait, on a que $m$ est dans $W^{2,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)$ pour $R \in W^{1,p}(]0,1[;SO(3))$, ainsi $m'$ est dans $W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)$. Par suite, par la propriété d'algèbre de $W^{1,p}$ en dimension 1, on obtient que $R_3 \wedge m'$ est dans $W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3)$. Ainsi d'après (4.106), $B_{m',R}$ est bien dans $W^{1,p}(]0,1[;M_3^a)$.

Or, on vient de montrer que $h$ est lipschitzienne, c'est-à-dire, $h \in C^{0,1}$. En utilisant donc l'identification $W^{1,\infty} = C^{0,1}$ et la propriété d'algèbre de $W^{1,p}$ en dimension 1, on trouve que $G(R)$ est bien dans $W^{1,p}(]0,1[;M_3)$.

Par ailleurs, il faut montrer que le second membre de l'EDO ci-dessus, autrement dit $G(R)$ ((4.107)), est localement lipschitzien par rapport à $R$ pour la norme de Sobolev $W^{1,p}$.

On définit alors pour $R \in W^{1,p}$ les deux applications

$$\begin{aligned} L_R\colon W^{1,p}(]0,1[;M_3^a) &\longrightarrow W^{1,p}(]0,1[;M_3) \\ X &\mapsto XR \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K\colon W^{1,p}(]0,1[;\mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(]0,1[;SO(3)) &\longrightarrow W^{1,p}(]0,1[;M_3^a) \\ (\tau,R) &\mapsto B_{\tau,R}. \end{aligned}$$

Pour montrer que $G$ est localement lipschitzien, on décide de l'écrire comme une composée des trois applications suivantes,

$$G(R) := g(m',R) = (L_R \circ h \circ K)(m',R).$$

Le problème revient donc à montrer que ces trois applications sont localement lipschitziennes. Commençons donc par la plus simple qui n'est autre que $L_R$. À l'aide des décompositions du type $ab - \tilde{a}\tilde{b} = (a-\tilde{a})b + \tilde{a}(b-\tilde{b})$, on a pour presque tout $x_3$

$$\begin{aligned} &\|L_R(X(x_3)) - L_{\tilde{R}}(\tilde{X}(x_3))\| \\ &\qquad = \|(X(x_3) - \tilde{X}(x_3))R(x_3) + \tilde{X}(x_3)(R(x_3) - \tilde{R}(x_3))\| \\ &\qquad \leq \|X(x_3) - \tilde{X}(x_3)\| + \|\tilde{X}(x_3)\|\|R(x_3) - \tilde{R}(x_3)\|, \end{aligned}$$

tout en prenant une norme matricielle vérifiant $\|R\| = 1$.
Par l'inégalité triangulaire,

$$\|L_R(X) - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})\|_{L^p} \leq \|X - \tilde{X}\|_{L^p} + \|R - \tilde{R}\|_{L^\infty}\|\tilde{X}\|_{L^p}. \tag{4.108}$$

Soit, par l'injection de Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$,

$$\|L_R(X) - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})\|_{L^p} \leq \|X - \tilde{X}\|_{W^{1,p}} + c\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.109}$$

où la constante $c$ est localement bornée quand $\tilde{X}$ appartient à une boule de $W^{1,p}$.

Par ailleurs, ayant $X$, $R \in W^{1,p}$, on a la formule habituelle de la dérivée au sens des distributions $L(X)' = X'R + XR'$. Ainsi, en suivant la même démarche, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|L_R(X)' - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})'\|_{L^p} \\
&\qquad = \|X'R - \tilde{X}'\tilde{R} + XR' - \tilde{X}\tilde{R}'\|_{L^p} \\
&\qquad \leq \|(X' - \tilde{X}')R + \tilde{X}'(R - \tilde{R})\|_{L^p} + \|(X - \tilde{X})R' + \tilde{X}(R' - \tilde{R}')\|_{L^p} \\
&\qquad \leq \|X' - \tilde{X}'\|_{L^p} + \|\tilde{X}'\|_{L^p}\|R - \tilde{R}\|_{L^\infty} \\
&\qquad\qquad + \|X - \tilde{X}\|_{L^\infty}\|R'\|_{L^p} + \|\tilde{X}\|_{L^\infty}\|R' - \tilde{R}'\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Par suite, par l'inégalité $\|f'\|_{L^p} \leq \|f\|_{W^{1,p}}$ pour tout $f \in W^{1,p}$ et toujours par l'injection $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$, on trouve

$$\|L_R(X)' - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})'\|_{L^p} \leq c\|X - \tilde{X}\|_{W^{1,p}} + c_1\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}}. \tag{4.110}$$

Notons que les constantes $c$ et $c_1$ sont localement bornées ($\tilde{X}$ appartenant à une boule de $W^{1,p}$ et par suite d'une part $\tilde{X}'$ est dans une boule de $L^p$ et d'autre part $\tilde{X}$ est dans une boule de $L^\infty$ par l'injection de Sobolev).

Enfin, comme

$$\|L_R(X) - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})\|_{W^{1,p}} = \|L_R(X) - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})\|_{L^p} + \|L_R(X)' - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})'\|_{L^p},$$

les inégalités (4.109) et (4.110) montrent alors que

$$\|L_R(X) - L_{\tilde{R}}(\tilde{X})\|_{W^{1,p}} \leq c_2\|X - \tilde{X}\|_{W^{1,p}} + c_3\|R - \tilde{R}\|_{W^{1,p}},$$

les constantes étant également localement bornées.

Passons à l'application $h$. Celle-ci est de classe $C^3$ de l'ensemble des matrices antisymétriques $3 \times 3$ dans lui-même, elle est donc localement lipschitzienne sur $M_3^a$. Par suite, il existe sur chaque boule de $M_3$ de centre 0 et de rayon $r$ une constante $k(r)$ telle que $\|h(F) - h(\tilde{F})\| \leq k(r)\|F - \tilde{F}\|$ où $F, \tilde{F} \in B(0,r)$.

Supposons que $\|X\|_{W^{1,p}(]0,1[;M_3)}$, $\|\tilde{X}\|_{W^{1,p}(]0,1[;M_3)} \leq r$, ainsi on peut écrire d'une part

$$\|h(X(x_3)) - h(\tilde{X}(x_3))\| \leq c(r)\|X(x_3) - \tilde{X}(x_3)\|.$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|h(X) - h(\tilde{X})\|_{L^p} \leq c(r)\|X - \tilde{X}\|_{L^p} \leq c(r)\|X - \tilde{X}\|_{W^{1,p}}. \tag{4.111}$$

D'autre part, $h$ étant dérivable et $X$ étant dans $W^{1,p}$, on a donc au sens des distributions $h(X)' = Dh(X)X'$ où l'application $F \mapsto Dh(F)$ est de classe $C^2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|h(X)' - h(\tilde{X})'\|_{L^p} &= \|Dh(X)X' - Dh(\tilde{X})\tilde{X}'\|_{L^p} \\
&\leq \|\big(Dh(X) - Dh(\tilde{X})\big)\tilde{X}'\|_{L^p} + \|Dh(\tilde{X})(X' - \tilde{X}')\|_{L^p} \\
&\leq \|Dh(X) - Dh(\tilde{X})\|_{L^\infty}\|\tilde{X}'\|_{L^p} + \|Dh(\tilde{X})\|_{L^\infty}\|X' - \tilde{X}'\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Or, $F \mapsto Dh(F)$ est de classe $C^2$ donc localement lipschitzienne de $M_3$ dans $\mathscr{L}(M_3)$. D'où l'on a

$$\|Dh(F) - Dh(\tilde{F})\| \leq c(r)\|F - \tilde{F}\|,$$

pour $F, \tilde{F} \in B(0,r)$. Soit,

$$\|Dh(F) - Dh(\tilde{F})\|_{L^\infty} \leq c(r)\|F - \tilde{F}\|_{L^\infty} \leq c(r)\|F - \tilde{F}\|_{W^{1,p}}, \tag{4.112}$$

la dernière majoration étant obtenue par l'injection $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$.
De plus, $Dh$ étant continue sur le compact $[0,1]$ est donc localement bornée, autrement dit on a $\|Dh(X)\|_{L^\infty} = M(r) < +\infty$. Par suite et à l'aide de (4.112), on obtient

$$\begin{aligned} &\|h(X)' - h(\tilde{X})'\|_{L^p} \\ &\qquad \leq rc(r)\|X - \tilde{X}\|_{W^{1,p}} + M(r)\|X - \tilde{X}\|_{W^{1,p}} \leq C(r)\|X - \tilde{X}\|_{W^{1,p}}, \end{aligned} \tag{4.113}$$

où $C(r) = \max(rc(r), M(r))$.

Enfin, comme

$$\|h(X) - h(\tilde{X})\|_{W^{1,p}} = \|h(X) - h(\tilde{X})\|_{L^p} + \|h(X)' - h(\tilde{X})'\|_{L^p},$$

les inégalités (4.111) et (4.113) montrent alors que l'application $h$ est localement lipschitzienne sur $W^{1,p}$.

Il reste à montrer le caractère lipschitzien de l'application $K$ qui au couple $(m', R)$ fait correspondre la matrice $B_{m',R}$. Or, on vient de voir que les coefficients de $B_{m',R}$ sont des produits de $m'$ et $R_3$. Ainsi, comme le produit de deux fonctions lipschitziennes est localement lipschitzien, il suffit alors de vérifier que l'application

$$R \in W^{1,p}(]0,1[; SO(3)) \mapsto m \in W^{2,p}(]0,1[; M_3)$$

est localement lipschitzienne. Ceci a bien été démontré antérieuremment (inégalité (4.104)) à partir des estimations obtenues à l'aide de la formulation variationnelle et des formes fortes de l'équation d'Euler-Lagrange. □

**Remarque 4.2.7.** La raison pour laquelle on était amené à travailler dans $W^{2,p}$ au lieu de $W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ se manifeste ici. En fait, pour $m \in W^{2,\frac{2p}{p+2}}$ on a $m' \in W^{1,\frac{2p}{p+2}}$. Or $W^{1,p} \subset W^{1,\frac{2p}{p+2}}$ ($\frac{2p}{p+2} < p$) et par suite le second membre de l'équation différentielle ordinaire ci-dessus n'est pas dans $W^{1,p}$.

**Proposition 4.2.8.** *L'unique solution du problème d'évolution trouvée ci-dessus est une rotation.*

*Démonstration.* Nous rappelons l'expression de l'équation d'évolution

$$\frac{d}{dt}R = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{méca}})^a\big)(\bar{B}_{\text{méca}})^a R,$$

où $\nu^+$ est une fonction à valeurs scalaires. Le but est de montrer que $R(t,x_3) \in SO(3)$ pour tout $x_3 \in [0,1]$ et $t \in [0,T^\star[$, autrement dit, que $R(t,x_3)$ est une matrice orthogonale de déterminant égal à 1.

Nous venons de montrer que $R$ est de classe $C^1([0,T^*[;W^{1,p}(]0,1[;M_3))$. Ainsi, on obtient par les injections de Sobolev que $R \in C^1([0,T^*[;C^0([0,1];M_3))$. Par conséquent, l'équation différentielle est également valable pour tout $x_3$ fixé. De plus, $R(.,x_3)R^T(.,x_3) \in C^1([0,T^*[;M_3)$. Ce qui nous permet donc, à $x_3$ fixé, de dériver cette expression au sens classique comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(R(t,x_3)R^T(t,x_3)) &= \dot{R}(t,x_3)R^T(t,x_3) + R(t,x_3)\dot{R}(t,x_3)^T \\ &= \frac{1}{\eta}\,\nu^+\big((\bar{B}_{\text{méca}})^a\big)\big[(\bar{B}_{\text{méca}})^a RR^T + RR^T\big((\bar{B}_{\text{méca}})^a\big)^T\big],\end{aligned}$$

car $\nu^+$ est un scalaire (égal donc à sa transposée). De plus, par définition de la partie antisymétrique d'une matrice, on a $\big((\bar{B}_{\text{méca}})^a\big)^T = -(\bar{B}_{\text{méca}})^a$. D'où, l'on a

$$\frac{d}{dt}(R(t,x_3)R^T(t,x_3)) = 0,$$

soit $R(t,x_3)R^T(t,x_3) = \text{cst} = R(0,x_3)R^T(0,x_3) = I$, vu que $R(0,x_3) \in SO(3)$. On a donc montré que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall t \in [0,T^*[,\ R(.,x_3)R^T(.,x_3) = I,$$

c'est-à-dire $R(t,x_3) \in O(3)$.

Pour conclure que $R(t,x_3) \in SO(3)$, il reste à noter que

$$\det(R(.,x_3)) \in C^0([0,T^*[),\ \det(R(.,x_3)) = \pm 1 \text{ et } \det(R(0,x_3)) = 1,$$

($R_0$ étant une rotation). Une fonction continue à valeurs dans $\{-1,+1\}$ étant constante, on en déduit que $\det(R(.,x_3)) = 1$ pour tout $t$ et d'où le résultat annoncé. □

**Remarque 4.2.9.** La solution du problème d'évolution thermodynamique :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)\,(\bar{B}_{\text{thermo}})^a R$$

est également une rotation. En fait, il suffit de remplacer $\bar{B}_{\text{méca}}$ par $\bar{B}_{\text{thermo}}$ dans la preuve de la proposition précédente.

Chapitre 5

# Étude du problème couplé simplifié

# Chapitre 5

# Étude du problème couplé simplifié

Dans les chapitres précédents, nous avons utilisé la théorie de Cosserat appelée « full 2-director Cosserat theory » par S. Antman ([8]). Cette théorie consiste à décrire le mouvement d'un fil à l'aide de sa ligne moyenne $m$, deux vecteurs directeurs de normes égales à $\rho_1$ et $\rho_2$ décrivant la déformation de ses sections. Dans ce chapitre, nous supposons que les directeurs sont des vecteurs normés autrement dit, que les coefficients $\rho_\alpha$ sont égaux à 1. Ainsi, l'Ansatz cinématique se simplifie et devient,

$$\widetilde{\varphi}(t,x_1,x_2,x_3) = m(t,x_3) + R_1(t,x_3)x_1 + R_2(t,x_3)x_2. \tag{5.1}$$

Par conséquent, le gradient de la déformation approchée est

$$\begin{aligned} \nabla\widetilde{\varphi}(x_1,x_2,x_3) &= \big(R_1(x_3)|R_2(x_3)|\,m'(x_3)\big) + \big(0|\,0|\,R'_\alpha(x_3)\big)x_\alpha \\ &:= A_m + A_\alpha x_\alpha. \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'énergie est dans ce cas minimisée seulement par rapport à la déformation $m$ du fil (toujours à $R$ fixé) et prend donc la forme simplifiée

$$\begin{aligned} J(m,\bar{R}) = &\int_0^1 a_h\Big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_m + A_m^TR - 2\,\mathrm{I}\,\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(R^TA_m - \mathrm{I})\big)^2\Big)dx_3 \\ &+ \int_0^1 \Big(J_\alpha^h\big(\frac{\mu}{4}\|R^TA_\alpha + A_\alpha^TR\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}(R^TA_\alpha))^2\big) - f_r\cdot m \\ &\quad - \bar{h}\cdot R_\alpha\Big)dx_3 - g_r\cdot m(1) - \bar{g}\cdot R_\alpha(1) - \bar{e}\cdot R_\alpha(0), \end{aligned}$$

sur l'espace fonctionnel

$$\Phi = \{m \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^3), m(0) = (0,0,0)\}.$$

On rappelle que les termes de force $f_r$, $g_r$, $\bar{h}$, $\bar{g}$, $\bar{e}$ sont donnés antérieurement à la Section 2.4.2 du Chapitre 2. D'après les valeurs de $A_m$ et de $A_\alpha$ données dans (5.2),

on a $R^T A_m = (e_1|e_2|R^T m')$ et $R^T A_\alpha = (0|0|R^T R'_\alpha)$ et par suite l'énergie devient

$$\begin{aligned} J(m,R) = &\int_0^1 a_h\Big(\frac{\mu}{2}\big((R_1\cdot m')^2+(R_2\cdot m')^2\big)+(\mu+\frac{\lambda}{2})(R_3\cdot m'-1)^2\Big)dx_3 \\ &+\int_0^1\Big(\frac{\mu}{2}(J_1+J_2)(R_2\cdot R'_1)^2+(\mu+\frac{\lambda}{2})J_\alpha(R_3\cdot R'_\alpha)^2\Big)dx_3 \\ &-\int_0^1\big(f_r\cdot m-\bar{h}\cdot R_\alpha\big)dx_3-g_r\cdot m(1)-\bar{g}\cdot R_\alpha(1)-\bar{e}\cdot R_\alpha(0), \end{aligned} \tag{5.3}$$

où l'on a utilisé le fait que $R_\alpha\cdot R'_\alpha = 0$ (car le vecteur $R_\alpha$ est de norme égale à 1 et sans sommation sur $\alpha$) et que $R_1\cdot R_2 = 0$ et donc que $R'_1\cdot R_2 = -R_1\cdot R'_2$ soit $(R'_1\cdot R_2)^2 = (R_1\cdot R'_2)^2$.

Le problème simplifié de minimisation est bien posé. L'existence des solutions est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 5.0.10.** *Soit l'intervalle $I=[0,1]$. On suppose données les rotations $R\in L^\infty(I,SO(3))$, $p\geq 2$, et les forces extérieures $f_r,\bar{h}\in L^2(I;\mathbb{R}^3)$ et $g_r,\bar{g},\bar{e}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe $m\in H^1(I;\mathbb{R}^3)$ qui minimise $J$ sur $\Phi$.*

*Démonstration.* Nous utilisons comme dans le cas général avec les coefficients $\rho_\alpha$, la méthode directe du calcul des variations pour montrer l'existence des solutions de ce problème de minimisation. Nous considérons donc une suite minimisante $X_k=(m_k)$ de la fonctionnelle $J$. Tout d'abord, J est fortement continue. En effet, si $m_k\to m$ dans $H^1$, alors

$$R_i\cdot m'_k\to R_i\cdot m' \text{ dans } L^2(]0,1[;\mathbb{R}), \tag{5.4}$$

car $R\in L^\infty$ étant une rotation à $x_3$ fixé. Par suite, en élevant au carré on obtient

$$(R_i\cdot m'_k)^2\to(R_i\cdot m')^2 \text{ dans } L^1(]0,1[;\mathbb{R}). \tag{5.5}$$

De plus, ayant $f_r\in L^2$, on a la convergence forte dans $L^2$ :

$$f_r\cdot m_k\to f_r\cdot m.$$

Notons que le terme $g_r\cdot m_k(1)$, est un scalaire donc converge dans $\mathbb{R}$ vers $g_r\cdot m(1)$. On a ainsi montré la semi-continuité inférieure séquentielle faible de la fonctionnelle $J$ car elle est fortement continue et convexe.

Il reste donc à vérifier que $X_k$ est bornée. Montrons donc que la fonctionnelle $J$ est coercive. L'énergie réduite (5.3) peut s'écrire sous la forme,

$$\begin{aligned} J(m,R) = &\int_0^1\frac{\mu\, a_h}{2}\big((R_1\cdot m')^2+(R_2\cdot m')^2+2(R_3\cdot m')^2-4R_3\cdot m'+2\big)dx_3 \\ &+\int_0^1\Big(\frac{\lambda\, a_h}{2}(R_3\cdot m'-1)^2+\frac{\mu}{2}(J_1+J_2)(R_2\cdot R'_1)^2 \\ &+J_\alpha(\mu+\frac{\lambda}{2})(R_3\cdot R'_\alpha)^2\Big)dx_3-\int_0^1\big(f_r\cdot m+\bar{h}\cdot R_\alpha\big)dx_3 \\ &-g_r\cdot m(1)-\bar{g}\cdot R_\alpha(1)-\bar{e}\cdot R_\alpha(0). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$J(m,\bar{R}) \geq \int_0^1 \mu\, a_h\Big(\frac{1}{2}\|R^T\cdot m'\|^2 - 2R_3\cdot m'\Big)dx_3 - c(f_r)\|m\|_{H^1} \\ - c_1(\bar{h}) - \|g_r\|\|m(1)\| - \|\bar{g}\| - \|\bar{e}\|, \tag{5.6}$$

les autres termes étant positifs et par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ (pour les termes de force contenant $g_r$, $\bar{g}$ et $\bar{e}$) tout en utilisant le fait que $\|R_\alpha\| = 1$. Pour les forces extérieures $f_r$ et $\bar{h}$, on a eu recours à Cauchy-Schwarz dans $L^2$, et les constantes $c(f_r)$ et $c(\bar{h})$ ainsi obtenues sont bornées car $f_r$ et $\bar{h}$ sont dans $L^2$. Or, on a

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{2}\|R^T\cdot m'\|^2 - 2R_3\cdot m'\Big)dx_3 \geq \frac{1}{2}\|m'\|_{L^2}^2 - 2\|m'\|_{L^2}, \tag{5.7}$$

car $R^T$ préserve la norme (étant une rotation) et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par suite, $J$ est coercive grâce à l'inégalité de Poincaré et bornée inférieurement pour la norme $H^1(I;\mathbb{R}^5)$ dans $\Phi$. Ce qui montre que $m_k$ est bornée dans l'espace réflexif $H^1(I;\mathbb{R}^3)$. L'argument standard du calcul des variations mous donne ainsi l'existence d'un minimiseur $m$ de $J$. □

**Remarque 5.0.11.** La régularité $L^\infty(I,SO(3))$ de la rotation $R$ suffit pour montrer le théorème d'existence 5.0.10. En fait, on n'a pas besoin que $R$ soit $W^{1,p}(I,SO(3))$ comme c'était le cas avec l'hypothèse cinématique

$$\widetilde{\varphi}(t,x_1,x_2,x_3) = m(t,x_3) + \rho_1(t,x_3)R_1(t,x_3)x_1 + \rho_2(t,x_3)R_2(t,x_3)x_2.$$

Nous avons également l'unicité du minimiseur de la fonctionnelle $J$.

**Théorème 5.0.12.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, la solution du problème réduit de minimisation est unique.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que le terme

$$S(m) := \int_0^1 \big((R_1\cdot m')^2 + (R_2\cdot m')^2 + 2(R_3\cdot m')^2\big)dx_3$$

est strictement convexe. Pour le montrer, on définit comme précédemment, le polynôme du second degré $j$ par $j(\theta) = S(\theta m + (1-\theta)\tilde{m})$ pour $\theta \in [0,1]$ et $m \neq \tilde{m}$. Son coefficient dominant est strictement positif dès que $m \neq \tilde{m}$. Ce qui assure la convexité stricte de $S$ donc de $J$, et par suite nous donne l'unicité de son minimiseur. □

**Remarque 5.0.13.** Avec l'Ansatz général, le second membre de l'équation différentielle (dans le cas mécanique) étudiée au Chapitre 4 était couplé au problème de minimisation à partir de la dérivée de la déformation de la ligne moyenne du fil. En fait, il ne dépendait pas explicitement des coefficients $\rho_\alpha$. Pour cette raison, on ne fera pas l'étude du problème d'évolution dans le cas où $\rho_\alpha = 1$ étant analogue à celle du cas général.

Seconde partie

# Résolution numérique

# Introduction

# Introduction

La deuxième partie est consacrée à la simulation numérique des deux modèles viscoélastiques réduits, le modèle mécanique et le modèle thermodynamique, introduits dans la partie I du travail.

Nous rappelons que ces modèles sont des problèmes non linéaires couplés minimisation-évolution. Nous commençons par étudier séparément le problème de minimisation et le problème d'évolution. Le problème de minimisation est approché numériquement par la méthode des éléments finis. La primitive « ode » du logiciel Scilab a été utilisée pour la résolution de l'équation différentielle ordinaire non linéaire (dans le cas mécanique), ainsi que de l'équation aux dérivées partielles (dans le cas thermodynamique). Ensuite, nous passons à l'approximation numérique des deux problèmes couplés qui se fait par une méthode de « splitting ».

Chapitre 6

# Implémentation du problème de minimisation réduit

# Chapitre 6

# Implémentation du problème de minimisation réduit

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'approximation numérique du problème de minimisation de l'énergie totale introduit dans la partie I.

## 6.1 Problème variationnel

On rappelle que le problème de minimisation admet une formulation variationnelle et peut-être posé sous la forme :

pour $l_R$ donné dans $V'$, chercher $(\rho, m) \in V$ tel que

$$\forall (\theta, n) \in V,\ a_R((\rho, m), (\theta, n)) = l_R((\theta, n)), \tag{6.1}$$

où $V = H^1(]0,1[;\mathbb{R}^2) \times H^1_0(]0,1[;\mathbb{R}^3)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. De plus, $a_R$ est une forme bilinéaire symétrique sur $V$ et $V$-elliptique donnée par

$$\begin{aligned}
&a_R((\rho, m), (\theta, n)) \\
&= \int_0^1 K_{\alpha,R} \rho_\alpha \theta_\alpha \, dx_3 + \int_0^1 a_h \left( \mu (m' \cdot n') + (\mu + \lambda)(R_3 \cdot m')(R_3 \cdot n') \right) dx_3 \\
&\quad + \int_0^1 \lambda \, a_h \left( \rho_1 \theta_2 + \rho_2 \theta_1 + (\rho_1 + \rho_2)(R_3 \cdot n') + (\theta_1 + \theta_2)(R_3 \cdot m') \right) dx_3 \\
&\qquad + \int_0^1 \mu \sum_{\alpha=1}^{2} J^h_\alpha \rho'_\alpha \theta'_\alpha \, dx_3,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

où

$$K_{\alpha,R} = (2\mu + \lambda)\, a_h + \sum_{\alpha=1}^{2} J^h_\alpha \left( \mu |R'_\alpha|^2 + (\mu + \lambda)(R_3 \cdot R'_\alpha)^2 \right),$$

et $l_R$ est une forme linéaire sur $V$ égale à

$$l_R((\theta,n)) = \int_0^1 \left(a_h(2\mu+3\lambda)(\theta_1+\theta_2+R_3\cdot n') + f_r\cdot n + \bar{h}\cdot\theta_\alpha R_\alpha\right) dx_3 \\ + g_r\cdot n(1) + \bar{g}\cdot\theta_\alpha(1)R_\alpha(1) + \bar{e}\cdot\theta_\alpha(0)R_\alpha(0). \quad (6.3)$$

On rappelle également les expressions des termes de force intervenant dans le second membre (6.3),

$$f_r(x_3) = \int_{h\omega} f(x_1,x_2,x_3)\,da + \int_{\partial(h\omega)} N(x_1,x_2,x_3)\,dS, \quad (6.4)$$

$$g_r = \int_{\Gamma_h^1} g\,da, \quad (6.5)$$

$$\bar{h}(x_3) = \int_{h\omega} x_\alpha f(x_1,x_2,x_3)\,da + \int_{\partial(h\omega)} x_\alpha N(x_1,x_2,x_3)\,dS, \quad (6.6)$$

$$\bar{g} = \int_{\Gamma_h^1} x_\alpha g(x_1,x_2)\,da \quad (6.7)$$

et

$$\bar{e} = \int_{\Gamma_h^0} x_\alpha g(x_1,x_2)\,da. \quad (6.8)$$

Parmi les méthodes d'approximation numérique, on distingue les méthodes des différences finies, les méthodes des volumes finis et les méthodes des éléments finis. Dans notre cas, le problème se met sous forme variationnelle, d'où l'on utilise la méthode des éléments finis.

La formulation (6.1) permet d'approcher numériquement les solutions par la résolution du problème approché :

chercher $(\rho_h, m_h) \in V_h$ tel que

$$\forall(\theta_h,n_h)\in V_h,\ a_R((\rho_h,m_h),(\theta_h,n_h)) = l_R((\theta_h,n_h)), \quad (6.9)$$

où $V_h$ est un sous-espace de dimension finie de $V$.

## 6.2 Approximation variationnelle par la méthode des éléments finis

Il s'agit tout d'abord de construire par la méthode des éléments finis l'espace fonctionnel $V_h$ de dimension finie qui approche l'espace continu

$$V = H^1(]0,1[;\mathbb{R}^2)\times H_0^1(]0,1[;\mathbb{R}^3).$$

### 6.2.1 Construction de l'espace d'approximation

On veut résoudre le problème (6.9) par la méthode des éléments finis. Cette méthode consiste à partitionner l'ouvert, sur lequel les fonctions sont définies, en un grand nombre de petits morceaux de forme simple, appelés éléments. L'ensemble de ces éléments s'appelle un maillage. Dans notre cas, il s'agit de découper l'intervalle $[0,1]$ et le maillage est simplement constitué d'une collection de points $(x_j)_{0\leq j\leq N+1}$, appelés sommets ou nœuds du maillage, et est de la forme

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1, \tag{6.10}$$

avec un pas de discrétisation

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad 0 \leq i \leq N.$$

Nous posons $h = \max\limits_{0\leq i\leq N} h_i$.

Pour des raisons de simplicité, nous choisissons un maillage uniforme où les points sont équidistants, c'est-à-dire que,

$$x_j = jh, \qquad h = \frac{1}{N+1}, \qquad 0 \leq j \leq N+1.$$

Le pas de discrétisation en espace est destiné à tendre vers 0 et pour chaque $h$ on définit $V_h$ comme un sous-espace de $V$ de dimension finie.

La discrétisation provient uniquement du choix de l'espace $V_h$, puisque c'est la seule chose qui différencie le problème discret du problème continu. L'espace $V_h$ est censé approcher l'espace $V$ avec une bonne précision.

La méthode des éléments finis suppose que la restriction des fonctions de $V_h$ à chaque élément est un polynôme de degré borné et même généralement assez petit. Ici, on utilisera les éléments finis du type $\mathbb{P}_1$. Les cinq espaces fonctionnels d'approximation de dimension finie sont donc constitués des fonctions continues et affines par morceaux

$$X_h^\alpha = \{\theta \in C([0,1]);\, \theta|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1,\, 0 \leq j \leq N\}, \tag{6.11}$$

et

$$M_h^i = \{v \in C([0,1]);\, v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1,\, 0 \leq j \leq N,\, v(0) = 0\}, \tag{6.12}$$

où $\alpha = 1,2,\ i = 1,2,3$ et $\mathbb{P}_1 = \{p(x) = d + cx,\, c,d \in \mathbb{R}\}$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Dans toute la suite, l'espace d'approximation est noté $V_h = X_h^\alpha \times M_h^i$.

Soit $5N+7$ la dimension de l'espace $V_h$. On prend les fonctions de base de la forme $(\varphi_0,0,0,0,0)$, $(0,\varphi_0,0,0,0)$, $(\varphi_l,0,0,0,0)$, $(0,\varphi_l,0,0,0)$, $(0,0,\varphi_l,0,0)$, $(0,0,0,\varphi_l,0)$ ou $(0,0,0,0,\varphi_l)$ avec $l = 1,\ldots,N+1$, les quatre premières correspondant aux $\rho$ et les trois dernières aux composantes du vecteur $m$. Ainsi, si $\psi_k$,

$k = 1, \ldots, 5N+7$ désigne un de ces $5-$uplets, on a alors

$$\psi_k = \begin{cases} (\varphi_l, 0, 0, 0, 0) \text{ si } k = 1 \\ (0, \varphi_l, 0, 0, 0) \text{ si } k = 2 \\ (\varphi_l, 0, 0, 0, 0) \text{ si } k = 3 \mod 5 \\ (0, \varphi_l, 0, 0, 0) \text{ si } k = 4 \mod 5 \\ (0, 0, \varphi_l, 0, 0) \text{ si } k = 5 \mod 5 \\ (0, 0, 0, \varphi_l, 0) \text{ si } k = 6 \mod 5 \\ (0, 0, 0, 0, \varphi_l) \text{ si } k = 7 \mod 5, \end{cases}$$

où l'on pose $l = l(k) = \left[\frac{k+2}{5}\right]$ et l'on a

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

$i = 0, ..., N+1$. Ces fonctions $\varphi_i$ sont parfois appelées fonctions chapeau en référence à la forme de leur graphe.

Le système (6.9) est donc un système linéaire carré de dimension $5N+7$, dont les inconnues sont les composantes de $Y_h = (\rho_h, m_h)$ dans la base canonique $(\psi_k)$ de $V_h$. $Y_h$ peut se décomposer suivant

$$Y_h = \sum_{k=1}^{5N+7} Y_{h,k} \psi_k,$$

et on voit que $Y_h$ est solution de (6.9) si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{5N+7} Y_{k,h} a_R(\psi_k, \psi_j) = l_R(\psi_j), \quad 1 \leq j \leq 5N+7. \tag{6.13}$$

Les équations (6.13) peuvent se reformuler sous la forme du système

$$A_h Z_h = b_h, \tag{6.14}$$

où l'on a $Z_h := (Y_{h,k})_{k=1,\ldots,5N+7}$, $b_h := l_R(\psi_k)_{k=1,\ldots,5N+7}$ et $(A_h)_{j,k} = a_R(\psi_k, \psi_j)$ pour $j, k = 1, \ldots, 5N+7$. Notons que la forme $a$ étant symétrique, la matrice $A$ l'est aussi car

$$A_{j,k} = a_R(\psi_k, \psi_j) = a_R(\psi_j, \psi_k) = A_{k,j}.$$

D'après leurs expressions données ci-dessus ((6.2)-(6.3)), les formes $a_R$ et $l_R$ dépendent de la rotation $R$. Ainsi, même si pour l'instant on cherche la solution du système linéaire (6.14) à $R$ fixé, on est amené à discrétiser également la rotation $R$ qui dépend de la variable $x_3$.

### 6.2.2 Discrétisation spatiale de la rotation

On utilise également des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ pour la rotation $R$ et on l'écrit donc sous la forme

$$R(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h} R(x_i) + \frac{x - x_i}{h} R(x_{i+1}),$$

où $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Le choix de $\mathbb{P}_1$ peut-être justifié par l'apparition des dérivées premières de $R$ dans l'expression de la forme bilinéaire $a_R$.

Il faut noter que ce choix simple d'interpolation affine par morceaux fait que $R(x) \notin SO(3)$ si $x$ n'est pas un point du maillage. P. Neff a utilisé une interpolation plus sophistiquée pour le modèle mécanique. En effet, il résout l'équation différentielle par un schéma d'Euler implicite suivi d'un développement limité permettant d'écrire la rotation comme l'exponentielle d'une matrice antisymétrique (voir la Remarque 7.1.1 du Chapitre 7 et la référence [35]). Nous avons songé à adopter une approche analogue. Mais en raison de l'efficacité de la primitive « ode » du logiciel Scilab qui permet de résoudre numériquement des équations différentielles à valeurs matricielles, nous n'avons pas poursuivi cette direction et nous avons gardé notre approche beaucoup plus simple (voir Chapitre 7).

### 6.2.3 Mise en œuvre numérique

Nous présentons ici la démarche que nous avons suivie pour la résolution numérique du système linéaire (6.14). Il s'agit de simuler la déformation d'un fil mince homogène isotrope, à partir des données suivantes :

- **Les caractéristiques du matériau :**
  le diamètre de la section du fil noté $h_{\text{section}}$ et les constantes de Lamé $\mu$ et $\lambda$.
- **Les forces appliquées :**
  la force volumique $f$, la force surfacique $N_s$ et le terme de force $g$ appliqué à l'extrémité $x_3 = 1$ du fil.
- **Les conditions aux limites :**
  on impose des conditions de type Dirichlet homogène et non homgène sur $m$, et on laisse libres $\rho$ et $R$ pour des raisons qu'on verra ultérieurement.
- **La rotation :**
  la rotation est discrétisée et est donc donnée en chaque nœud du fil dans cette partie.

L'implémentation informatique du problème de minimisation se fait à l'aide du logiciel Scilab. On résout le système linéaire (6.14) à l'aide des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$. La difficulté principale consiste à construire la matrice et le second membre.

Dans ce qui suit, nous vérifions par plusieurs tests l'efficacité et la justesse de notre code permettant de minimiser l'énergie totale du système à $t$ fixé et à $R$ donnée.

### 6.2.4 Premier test

Ce test consiste à annuler toutes les forces appliquées au fil et à prendre la rotation comme la matrice identité, ce qui nous ramène au cas de l'élasticité.

Ici, on impose une condition de type Dirichlet homogène sur $m$ au point $x_3 = 0$, $m(0) = (0,0,0)$. Dans ce cas, les solutions du système (6.1) sont faciles à calculer et sont égales à

$$m^e(x_3) = (0,0,x_3) \quad \text{et} \quad \rho_\alpha^e(x_3) = 1. \tag{6.15}$$

Par l'exposant « e » nous désignons « exact ».

On considère un matériau synthétique rigide dont les constantes de Lamé sont égales à

$$\mu = 26316\,\text{MPa} \quad \text{et} \quad \lambda = 51084\,\text{MPa},$$

où MPa est le mégapascal.

Le tableau suivant nous donne la norme $L^\infty$ du résidu du système (6.14) pour $h_{\text{section}} = 0.1$.

| N | résidu | résidu préconditionné |
|---|---|---|
| 500 | 0.0012366 | 5.114E-15 |
| 700 | 0.0016470 | 3.886E-16 |
| 1000 | 0.0018587 | 4.562E-16 |

La matrice $A_h$ du système (6.14) est mal conditionnée, autrement dit son conditionnement ne permettait pas de résoudre le système linéaire avec une très grande précision. Pour l'améliorer, on a eu recours à la technique du préconditionnement qui consiste à introduire une matrice $C$ et à résoudre par la suite le système

$$C^{-1}(A_h Z_h) = C^{-1} b_h,$$

tel que le nouveau conditionnement soit plus petit. On a choisi le préconditionneur de Jacobi dont le $C$ est égal à la matrice diagonale, $\text{diag}(A_h)$, formée donc par les éléments diagonaux de la matrice $A_h$. Comme le tableau l'indique, on a pu avoir, avec ce préconditionneur, un meilleur résidu qui est de l'ordre de $10^{-16}$.

Dans le tableau suivant sont calculées (aussi pour $h_{\text{section}} = 0.1$) les normes $L^\infty$ de la différence entre les solutions exactes et les solutions calculées par Scilab, autrement dit, on calcule

$$\text{erreur } \rho_\alpha := \|\rho_\alpha - \rho_\alpha^e\|_{L^\infty} \quad \text{et} \quad \text{erreur } m_i = \|m_i - m_i^e\|_{L^\infty},$$

où $\rho_\alpha^e$ et $m^e$ sont donnés par (6.15).

| N | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 3.137E-13 | 3.297E-13 | 0 | 0 | 5.181E-13 |
| 700 | 1.569E-12 | 1.564E-12 | 0 | 0 | 3.384E-12 |
| 1000 | 1.629E-12 | 1.614E-12 | 0 | 0 | 3.246E-12 |

Au lieu de faire varier le nombre de points du maillage, on décide de faire varier le diamètre de la section, autrement dit on teste le code pour des corps plus minces. Ainsi pour $N = 500$, on trouve le tableau

| $h_{\text{section}}$ | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 0.0000086 | 2.107E-11 | 4.174E-12 | 0 | 0 | 5.899E-13 |
| 0.001 | 8.359E-08 | 7.414E-11 | 8.651E-11 | 0 | 0 | 1.547E-13 |
| 0.0001 | 8.316E-10 | 1.063E-10 | 1.039E-10 | 0 | 0 | 1.405E-12 |
| 0.00001 | 6.208E-12 | 8.457E-11 | 1.008E-10 | 0 | 0 | 3.689E-13 |

Notons qu'en faisant varier $h_{\text{section}}$ autrement dit, quand $h_{\text{section}} \neq 0.1$, le préconditionneur n'améliore plus le conditionnement de la matrice. Ce qui nous amène à ne plus mettre le résidu préconditionné dans le tableau précédent.

La figure 6.1 correspond au cas où l'on n'applique pas de forces au matériau synthétique rigide et où l'on a pris 1000 nœuds et un diamètre de la section égal à 0.1. Le trait continu représente $\rho$ et le trait interrompu fin représente $m$.

Passons à un autre test de notre code.

### 6.2.5 Second test

Ce test est plus pertinent que le premier test dans le sens suivant. En fait, il s'agit de calculer, à l'aide des équations fortes, le second membre et les conditions aux limites qui correspondent à des solutions simples que l'on se donne au départ. Ceci nous permet donc d'avoir un ensemble de données non triviales pour lesquelles on connaît une solution exacte. Ensuite, on calcule à partir de ces données la solution approchée par Scilab puis on la compare à la solution exacte. De plus, on ne considère plus ici que la rotation est constante. En effet, on l'écrit en fonction de $\cos(\theta x_3)$ et $\sin(\theta x_3)$, $\theta \in \mathbb{R}$, et par suite on fait varier les angles avec la variable $x_3$ discrétisée.

On prend les solutions comme suit :

$$m(x_3) = v_2 x_3^2 + v_1 x_3 \quad \text{et} \quad \rho_\alpha(x_3) = s_\alpha x_3^2 + r_\alpha x_3 + c, \tag{6.16}$$

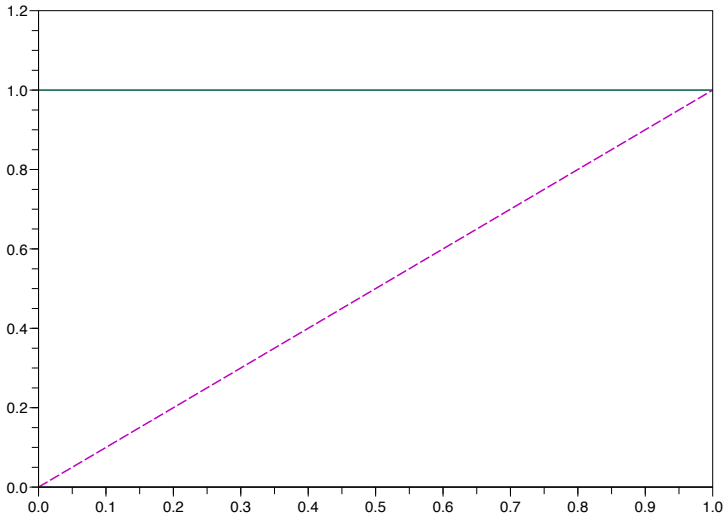


FIG. 6.1 – forces nulles et $R = I$

où $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ et $s_\alpha, r_\alpha \in \mathbb{R}$ sont des paramètres à notre disposition.

Ce choix de solutions vérifie bien la condition $m(0) = (0,0,0)$.

## Calcul des forces

Le but de ce paragraphe est de calculer, à partir des équations fortes et en se donnant des solutions exactes au départ, les différentes forces appliquées au fil qui apparaissent dans le second membre de (6.14).

On commence par rappeler les expressions des équations fortes.

$$-\mu m'' - (\mu+\lambda)((R_3 \cdot m')R_3)' - \lambda((\rho_1+\rho_2)R_3)' = -(2\mu+3\lambda)R_3' + \frac{1}{a_h} f_r, \quad (6.17)$$

$$-\mu J_\alpha^h \rho_\alpha'' + K_{\alpha,R}\rho_\alpha + \lambda a_h (R_3 \cdot m' + \rho_\beta) = a_h(2\mu+3\lambda) + \bar{h} \cdot R_\alpha, \quad (6.18)$$

où

$$K_{\alpha,R} = (2\mu+\lambda)\, a_h + \sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h \big(\mu |R_\alpha'|^2 + (\mu+\lambda)(R_3 \cdot R_\alpha')^2\big),$$

avec les conditions aux limites

$$\mu m'(1) + (\mu+\lambda)\big((R_3(1) \cdot m'(1))R_3(1)\big) + \lambda\Big(\big(\rho_1(1)+\rho_2(1)\big)R_3(1)\Big) - (2\mu+3\lambda)R_3(1) - \frac{1}{a_h} g_r = 0, \quad (6.19)$$

$$\rho'_\alpha(0) = -\frac{1}{\mu J^h_\alpha}\,\bar{e}\cdot R_\alpha(0) \tag{6.20}$$

et

$$\rho'_\alpha(1) = \frac{1}{\mu J^h_\alpha}\,\bar{g}\cdot R_\alpha(1). \tag{6.21}$$

On considère, pour simplifier le calcul, qu'il s'agit d'une rotation par rapport à l'axe $z$

$$R(x_3) = \begin{pmatrix} \cos(\theta x_3) & -\sin(\theta x_3) & 0 \\ \sin(\theta x_3) & \cos(\theta x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$.

On calcule à partir de (6.16) les termes apparaissant dans l'équation (6.17) :

$$m''(x_3) = 2v_2$$

et

$$(R_3\cdot m')R_3 = (v_{13} + 2v_{23}x_3)e_3 \Longrightarrow ((R_3\cdot m')R_3)' = 2v_{23}e_3.$$

De plus, on a $((\rho_1+\rho_2)R_3)' = (r_1 + r_2 + 2x_3(s_1+s_2))e_3$ et $R'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, en injectant ces calculs dans (6.17), on obtient

$$f_{r,1} = -2v_{21}\mu\, a_h,\ f_{r,2} = -2v_{22}\mu\, a_h$$

et

$$f_{r,3} = -\big(4v_{23}\mu + \lambda\,(2v23 + r_1 + r_2 + 2x(s_1+s_2))\big)a_h.$$

Pour trouver $\bar{h}$, on calcule de même tous les termes de l'équation (6.18). On a

$$\rho''_\alpha = 2s_\alpha,\ |R'_\alpha|^2 = \theta^2 \ et\ R_3\cdot R'_\alpha = 0.$$

Par suite,

$$K_{\alpha,R} = (2\mu+\lambda)a_h + \mu J^h_\alpha\theta^2.$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}\bar{h}_1\cos(\theta x_3) + \bar{h}_2\sin(\theta x_3)\\ = \lambda\, a_h P(x_3) + \mu\big(J^h_1(-2s_1+\theta^2) + Q_1(x_3)(2a_h + J^h_1\theta^2)\big)\end{aligned} \tag{6.22}$$

et

$$\begin{aligned}-\bar{h}_1\sin(\theta x_3) + \bar{h}_2\cos(\theta x_3)\\ = \lambda\, a_h P(x_3) + \mu\big(J^h_2(-2s_2+\theta^2) + Q_2(x_3)(2a_h + J^h_2\theta^2)\big),\end{aligned} \tag{6.23}$$

où $P$ et $Q_\alpha$ sont des polynômes du second degré en $x$ donnés par

$$P(x_3) = (-1 + v_{13} + x_3(r_1 + r_2 + 2v_{23}) + x_3^2(s_1 + s_2))$$

et

$$Q_\alpha(x_3) = r_\alpha x_3 + s_\alpha x_3^2.$$

En résolvant le système formé par les équations (6.22)-(6.23), on trouve

$$\begin{aligned}\bar{h}_1 = P(x_3)(\cos(\theta x_3) - \sin(\theta x_3))\lambda\, a_h + \mu\big(J_1^h(-2s_1 + \theta^2)\\ + Q_1(x_3)(2a_h + J_1^h\theta^2)\big)\cos(\theta x_3) - \mu\big(J_2^h(-2s_2 + \theta^2)\\ + Q_2(x_3)(2a_h + J_2^h\theta^2)\big)\sin(\theta x_3)\end{aligned} \tag{6.24}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{h}_2 = P(x_3)(\cos(\theta x_3) + \sin(\theta x_3))\lambda\, a_h + \mu\big(J_2^h(-2s_2 + \theta^2)\\ + Q_2(x_3)(2a_h + J_2^h\theta^2)\big)\cos(\theta x_3) + \mu\big(J_1^h(-2s_1 + \theta^2)\\ + Q_1(x_3)(2a_h + J_1^h\theta^2)\big)\sin(\theta x_3).\end{aligned} \tag{6.25}$$

Par ailleurs, les conditions aux limites ci-dessus nous permettent de déterminer les densités de forces $g_r$ et $\bar{g}$. En effet, on a d'une part

$$m'(1) = v_1 + 2v_2, \quad (R_3(1)\cdot m'(1))R_3(1) = (v_{13} + 2v_{23})e_3$$

et

$$(\rho_1(1) + \rho_2(1))R_3(1) = (2c + r_1 + r_2 + s_1 + s_2)e_3.$$

Ainsi, on trouve à l'aide de (6.19)

$$g_{r,1} = (v_{11} + 2v_{21})\mu\, a_h,\ g_{r,2} = (v_{12} + 2v_{22})\mu\, a_h$$

et

$$g_{r,3} = \big(2(v_{13} + 2v_{23} - 1)\mu + (v_{13} + 2v_{23} + (2c - 3) + r_1 + r_2 + s_1 + s_2)\lambda\big)\, a_h.$$

D'autre part, on a $\rho'_\alpha(0) = r_\alpha$. Ainsi, à partir de (6.20) on trouve

$$\bar{e}_1 = -\mu J_1^h r_1 \ \text{ et } \ \bar{e}_2 = -\mu J_2^h r_2.$$

De plus, on a $\rho'_\alpha(1) = r_\alpha + 2s_\alpha$. Ainsi, l'équation (6.21) nous donne

$$\cos\theta\,\bar{g}_1 + \sin\theta\,\bar{g}_2 = C_1\mu \ \text{ et } \ -\sin\theta\,\bar{g}_1 + \cos\theta\,\bar{g}_2 = C_2\mu,$$

où $C_\alpha = (r_\alpha + 2s_\alpha)J_\alpha^h$ (sans sommation sur $\alpha$). D'où l'on obtient

$$\bar{g}_1 = (C_1\cos\theta - C_2\sin\theta)\mu \ \text{ et } \ \bar{g}_2 = (C_1\sin\theta + C_2\cos\theta)\mu.$$

Ayant calculé toutes les forces correspondant aux solutions exactes données par (6.16), il s'agit donc de passer au calcul du second membre du système discrétisé (6.14). Pour ce faire, on a eu recours au calcul numérique en utilisant la commande « integrate » du logiciel Scilab. Il reste donc à calculer par Scilab la solution approchée (correspondante aux forces trouvées ci-dessus) pour la comparer par la suite à la solution exacte.

On a testé le code pour un matériau synthétique rigide (matériau 1) et un matériau élastique souple (matériau 2) et ce dans deux cas différents. Nous résumons les cas envisagés dans les deux tableaux suivants.

| | $v_1$ | $v_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $s_1$ | $s_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cas 1 | $(1,2,3)$ | $(1,4,2)$ | 4 | 3 | 1 | 2 |
| Cas 2 | $(1,2,1)$ | $(1,3,0)$ | 2 | 4 | 1 | 1 |

et

| | $\mu$ | $\lambda$ |
|---|---|---|
| Matériau 1 | 26316 MPa | 51084 MPa |
| Matériau 2 | 1358 MPa | 2036 MPa |

où $v_1$ et $v_2$ sont les vecteurs intervenant dans l'expression de $m$, et $r_1$, $r_2$, $s_1$ et $s_2$ sont les scalaires donnant la valeur des $\rho_\alpha$. Enfin $\mu$ et $\lambda$ sont les constantes de Lamé du matériau.

Dans la suite de ce paragraphe, on teste le code pour une rotation d'angle $\theta$ égal à $\pi/3$.

On commence pas traiter le cas 1. D'une part, on considère le matériau 1 en faisant varier le diamètre de la section noté $h_{\text{section}}$. Les trois tableaux suivants correspondent aux valeurs $h_{\text{section}} = 0.1, 0.01, 0.001$ respectivement.

| **Cas 1, matériau 1,** $h_{\textbf{section}} = 0.1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu pcd | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 8.597E-15 | 0.0001671 | 0.0001711 | 4.841E-14 | 1.403E-13 | 0.0000141 |
| 500 | 8.207E-15 | 0.0000269 | 0.0000276 | 3.715E-13 | 1.093E-12 | 0.0000023 |
| 1000 | 1.887E-15 | 0.0000068 | 0.0000069 | 2.003E-12 | 6.080E-12 | 0.0000006 |

| **Cas 1, matériau 1,** $h_{\textbf{section}} = 0.01$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 0.0000152 | 0.0013254 | 0.0013296 | 3.637E-13 | 1.043E-12 | 0.0000155 |
| 500 | 0.0000625 | 0.0002502 | 0.0002509 | 5.822E-13 | 1.720E-12 | 0.0000025 |
| 1000 | 0.0001309 | 0.0000645 | 0.0000646 | 2.543E-12 | 7.659E-12 | 0.0000006 |

| **Cas 1, matériau 1,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 0.0000001 | 0.0022905 | 0.0022947 | 4.419E-14 | 1.421E-13 | 0.0000163 |
| 500 | 0.0000004 | 0.0008727 | 0.0008734 | 2.072E-13 | 4.832E-13 | 0.0000026 |
| 1000 | 0.0000010 | 0.0003772 | 0.0003774 | 2.440E-13 | 6.768E-13 | 0.0000006 |

D'autre part, on considère le matériau 2 toujours dans le cas 1, pour pouvoir par la suite le comparer au matériau 1. On fait de même varier $h_{\text{section}}$ et on obtient les trois tableaux suivants correspondant aux valeurs $h_{\text{section}} = 0.1, 0.01, 0,001$ respectivement.

| **Cas 1, matériau 2,** $h_{\textbf{section}} = 0.1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu pcd | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 3.325E-15 | 0.0001344 | 0.0001385 | 2.454E-13 | 7.221E-13 | 0.0000106 |
| 500 | 1.721E-15 | 0.0000217 | 0.0000223 | 7.383E-13 | 2.117E-12 | 0.0000017 |
| 1000 | 1.925E-15 | 0.0000054 | 0.0000056 | 4.621E-13 | 1.279E-12 | 0.0000004 |

| **Cas 1, matériau 2,** $h_{\textbf{section}} = 0.01$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 0.0000007 | 0.0010862 | 0.0010903 | 9.237E-14 | 2.887E-13 | 0.0000116 |
| 500 | 0.0000021 | 0.0002011 | 0.0002017 | 1.175E-12 | 3.415E-12 | 0.0000019 |
| 1000 | 0.0000045 | 0.0000516 | 0.0000517 | 8.240E-13 | 2.474E-12 | 0.0000005 |

| **Cas 1, matériau 2,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 4.442E-09 | 0.0019812 | 0.0019853 | 7.305E-14 | 2.114E-13 | 0.0000123 |
| 500 | 1.627E-08 | 0.0007486 | 0.0007493 | 1.859E-13 | 5.791E-13 | 0.0000020 |
| 1000 | 3.578E-08 | 0.0003174 | 0.0003176 | 2.220E-12 | 6.591E-12 | 0.0000005 |

Notons que pour les deux matériaux quand $h_{\text{section}} = 0.1$, le préconditionneur utilisé auparavant améliore le conditionnement de la matrice (ce qui n'est pas le cas pour $h_{\text{section}} = 0.01, 0.001$). On n'a donc fait figurer le résidu préconditionné (noté « pcd ») que dans le tableau correspondant à $h_s = 0.1$. Ceci correspond au cas du premier test où le préconditionneur n'était non plus utile que pour $h_s \geq 0.1$.

À partir de ces six tableaux, on remarque que les résultats du matériau élastique souple (matériau 2) sont plus satisfaisants (au sens où les erreurs sont plus petites) que ceux du matériau synthétique rigide (matériau 1), et ceci pour les différentes épaisseurs du fil.

On passe au cas 2 et on suit la même démarche que plus haut pour les deux matériaux. Pour le matériau 1, on a les trois tableaux (correspondant aux valeurs $h_{\text{section}} = 0.1, 0.01, 0.001$ respectivement).

| **Cas 2, matériau 1,** $h_{\textbf{section}} = 0.1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu pcd | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 6.298E-15 | 0.0000149 | 0.0000193 | 4.841E-14 | 1.164E-13 | 0.0000060 |
| 500 | 2.672E-15 | 0.0000024 | 0.0000031 | 3.715E-13 | 9.104E-13 | 0.0000010 |
| 1000 | 1.788E-15 | 0.0000006 | 0.0000008 | 2.003E-12 | 5.041E-12 | 0.0000002 |

| **Cas 2, matériau 1,** $h_{\textbf{section}} = 0.01$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 0.0000034 | 0.0000152 | 0.0000197 | 3.637E-13 | 8.855E-13 | 0.0000061 |
| 500 | 0.0000065 | 0.0000025 | 0.0000032 | 5.822E-13 | 1.444E-12 | 0.0000010 |
| 1000 | 0.0000249 | 0.0000006 | 0.0000008 | 2.543E-12 | 6.374E-12 | 0.0000002 |

| **Cas 2, matériau 1,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 3.117E-08 | 0.0000152 | 0.0000198 | 4.419E-14 | 1.146E-13 | 0.0000061 |
| 500 | 0.0000001 | 0.0000025 | 0.0000032 | 2.072E-13 | 4.470E-13 | 0.0000010 |
| 1000 | 0.0000002 | 0.0000006 | 0.0000008 | 2.440E-13 | 4.967E-13 | 0.0000002 |

Alors que pour le matériau 2 (cas 2), on a pour $h_{\text{section}} = 0.1, 0.01, 0.001$ respectivement,

| **Cas 2, matériau 2,** $h_{\textbf{section}} = 0.1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu pcd | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 2.921E-15 | 0.0000137 | 0.0000181 | 2.454E-13 | 6.075E-13 | 0.0000048 |
| 500 | 1.622E-15 | 0.0000022 | 0.0000029 | 7.383E-13 | 1.801E-12 | 0.0000008 |
| 1000 | 1.795E-15 | 0.0000006 | 0.0000007 | 4.621E-13 | 1.096E-12 | 0.0000002 |

| **Cas 2, matériau 2,** $h_{\textbf{section}} = 0.01$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 0.0000002 | 0.0000140 | 0.0000185 | 9.237E-14 | 2.363E-13 | 0.0000048 |
| 500 | 0.0000006 | 0.0000023 | 0.0000030 | 1.175E-12 | 2.882E-12 | 0.0000008 |
| 1000 | 0.0000009 | 0.0000006 | 0.0000007 | 8.240E-13 | 2.059E-12 | 0.0000002 |

| **Cas 2, matériau 2,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | résidu | erreur $\rho_1$ | erreur $\rho_2$ | erreur $m_1$ | erreur $m_2$ | erreur $m_3$ |
| 200 | 1.147E-09 | 0.0000140 | 0.0000186 | 7.305E-14 | 1.767E-13 | 0.0000048 |
| 500 | 3.525E-09 | 0.0000023 | 0.0000030 | 1.859E-13 | 4.805E-13 | 0.0000008 |
| 1000 | 9.574E-09 | 0.0000006 | 0.0000007 | 2.220E-12 | 5.518E-12 | 0.0000002 |

On remarque d'une part que le matériau 2 donne toujours de meilleurs résultats que le matériau 1 et d'autre part que le cas 2 est plus satisfaisant que le cas 1 et ceci pour les deux matériaux.

Enfin, tous les résultats étant satisfaisants, ils permettent la validation de la partie minimisation de notre code. Ils assurent que les fonctions calculant les coefficients de la matrice et ceux du second membre sont selon toute vraisemblance correctes.

Chapitre 7

# Implémentation des problèmes d'évolution réduits

# Chapitre 7

# Implémentation du problème d'évolution réduit

Dans le Chapitre 2, on a réduit le problème d'évolution tridimensionnel en un problème unidimensionnel, et ce dans les cas mécanique et thermodynamique. Dans cette partie, on passe à l'implémentation de ces deux problèmes d'évolution unidimensionnels tout en les découplant du problème de minimisation. On supposera en conséquence donné le triplet $(m', \rho_1, \rho_2)$.

On commence par le cas mécanique.

## 7.1 Cas mécanique

On rappelle l'expression de l'équation différentielle ordinaire non linéaire que l'on souhaite résoudre numériquement

$$\frac{d}{dt}R(t) = \frac{1}{\eta}\nu^+(B_{m',R})\,B_{m',R}R, \tag{7.1}$$

avec

$$B_{m',R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(R_3 \wedge m')_3 & (R_3 \wedge m')_2 \\ (R_3 \wedge m')_3 & 0 & -(R_3 \wedge m')_1 \\ -(R_3 \wedge m')_2 & (R_3 \wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\nu^+(m', R) = (1 + \|B_{m',R}\|^{r+1})^k \|B_{m',R}\|^{r-1},$$

$r, k \geq 1$ .

La résolution numérique de cette équation différentielle se fait à l'aide de la primitive « ode » du logiciel Scilab. Notons qu'avec cette primitive, on peut résoudre

des équations différentielles non seulement à valeurs vectorielles mais également à valeurs matricielles (d'où son intérêt dans notre cas). L'appel à ode dans ce cas se fait par la syntaxe suivante :

$$R = ode(R0, t0, t, f),$$

où $R0$ est une matrice représentant les conditions initiales, $t0$ est le temps initial, $t$ est un vecteur correspondant aux différents temps pour lesquels la solution est calculée et enfin $f$ est le second membre de l'équation en question qu'il faut écrire comme une fonction de $M_{m,n} \times \mathbb{R} \longrightarrow M_{m,n}$. C'est dans la programmation de cette fonction $f$ que réside la difficulté.

Il s'agit donc d'écrire le second membre de (7.1) comme $f(R,t)$. D'après son expression, ce second membre dépend de $R_3$ et de la dérivée de la déformation de la ligne moyenne $m$ du fil qui est supposée être calculée à partir de la résolution du problème de minimisation. Dans ce paragraphe, on se contente de résoudre séparément le problème d'évolution dans le but de tester la fiabilité de la résolution utilisant « ode ». Ceci nous amène à nous donner un $m$, par exemple $m(x_3) = ax_3 + b$, $a, b \in \mathbb{R}^3$ donnés. Notons que ce choix de $m$ est cohérent avec la suite quand on considérera le problème couplé puisqu'on approchera $m$ à l'aide d'éléments finis de type $\mathbb{P}_1$, donc par des fonctions affines par morceaux. Ainsi en se donnant $a$ (on n'a pas besoin de la valeur de $b$ car seule la dérivée de $m$ intervient dans le second membre), une donnée initiale, un temps initial et un temps final, on résout notre équation différentielle ordinaire non linéaire par « ode ». Notons que l'on ne dispose pas ici de solution exacte de référence pour $R$.

**Remarque 7.1.1.** P. Neff a utilisé un schéma d'Euler implicite pour résoudre l'équation différentielle ordinaire du modèle mécanique :

$$\frac{dR}{dt} = \nu^+ (FR^T)^a R,$$

où $\nu^+ = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((FR^T)^a\big)$. Ainsi, la forme discrétisée devient :

$$\frac{R^n - R^{n-1}}{\Delta t} = \nu_n^+ \left(F^n (R^n)^T\right)^a R^n$$

En regroupant les termes qui multiplient $R^n$, il vient

$$\Big(I - \Delta t\, \nu_n^+ \left(F^n (R^n)^T\right)^a\Big) R^n = R^{n-1}.$$

Soit,

$$R^n = \Big(I - \Delta t\, \nu_n^+ \left(F^n (R^n)^T\right)^a\Big)^{-1} R^{n-1}.$$

Ainsi, un dévéloppement limité nous donne

$$\begin{aligned} R^n &= \Big(I + \Delta t\, \nu_n^+ \left(F^n (R^n)^T\right)^a\Big) R^{n-1} + O(\Delta t^2) \\ &= e^{\Delta t\, \nu_n^+ \left(F^n (R^n)^T\right)^a} R^{n-1} + O(\Delta t^2). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ce qui suggère un nouveau schéma

$$R^n = e^{\Delta t\, v_n^+ \left(F^n (R^n)^T\right)^a} R^{n-1}$$

dont l'avantage est que pour $R^0 \in SO(3)$, on a bien $R^n \in SO(3)$ pour tout $n$.

### 7.1.1 Test pour ode

Dans ce paragraphe, il s'agit de tester le résultat que fournit la fonction « ode » dans notre contexte. On entend par tester, vérifier si la solution calculée par « ode » est assez proche d'une rotation. En effet, la solution du problème d'évolution continu est une rotation pour tout $t$ et $x_3$ (voir la Proposition 4.2.8 du Chapitre 4). Pour ce faire, on vérifie tout d'abord que c'est une matrice orthogonale en calculant la norme euclidienne de la différence entre le produit de sa transposée par elle-même et la matrice identité. Ensuite, on calcule son déterminant, que l'on compare à 1. Quelques résultats sont présentés dans le tableau suivant.

| donnée initiale | $a$ | $\det R - 1$ | $\|R^T R - \mathrm{I}\|^2$ |
|---|---|---|---|
| matrice identité | $(5,2,7)$ | -9.919D-08 | 1.968D-14 |
| rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ | $(1,1,0)$ | - 4.026D-08 | 3.243D-15 |
| rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ | $(1,0,1)$ | 8.255D-08 | 1.363D-14 |

où l'on a pris $t0 = 0$ et $t = 0 : 0.01 : 10$. On rappelle que $a$ est la dérivée de $m$ par rapport à $x_3$, que $R$ est la solution approchée de notre équation différentielle et que $\|.\|$ est la norme de Frobenius. Ici, on considère que $R$ ne dépend pas de $x_3$ puisque le but est simplement de tester la primitive « ode » et que son usage dans le code se fait point par point à $x_3$ fixé. Ce tableau montre l'efficacité de la primitive « ode » dans la mesure où la solution obtenue par « ode » est très proche d'une rotation.

Un autre moyen pour tester le code de la résolution du problème d'évolution est de chercher la condition d'équilibre.

### 7.1.2 Condition d'équilibre mécanique

La condition d'équilibre pour le problème d'évolution est

$$\frac{d}{dt} R(t, x_3) = 0 \Longleftrightarrow B_{m',R} = 0. \tag{7.3}$$

On rappelle que

$$B_{m',R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(R_3 \wedge m')_3 & (R_3 \wedge m')_2 \\ (R_3 \wedge m')_3 & 0 & -(R_3 \wedge m')_1 \\ -(R_3 \wedge m')_2 & (R_3 \wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

où $R_3 = \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \end{pmatrix}$ est la troisième colonne de la rotation $R$ et $m'$ est la dérivée de la ligne moyenne du fil par rapport à $x_3$.

Une condition nécessaire et suffisante pour annuler $B_{m',R}$ est donc la relation $R_3 \wedge m' = 0$, soit

$$B_{m',R} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} m'_2 R_{33} = m'_3 R_{23} \\ \\ m'_1 R_{33} = m'_3 R_{13} \\ \\ m'_1 R_{23} = m'_2 R_{13}. \end{cases}$$

Un choix de $m'$ qui vérifie ce système d'équilibre peut être par exemple

$$m'_1 = \frac{R_{13}}{R_{33}},\ m'_2 = \frac{R_{23}}{R_{33}} \text{ et } m'_3 = 1.$$

Pour la condition initiale, on prend

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Avec ces choix, le code du problème d'évolution donne les résultats suivants.

| $R_0$ | $\det R - 1$ | $\|R^T R - \mathrm{I}\|^2$ | $\|R - R_0\|_{L^\infty}$ |
|---|---|---|---|
| $\theta = 0$ | 0 | 0 | 0 |
| $\theta = \frac{\pi}{4}$ | 0 | 2.055E-34 | 0 |
| $\theta = \frac{\pi}{3}$ | 0 | 4.429E-34 | 0 |

Dans les trois cas, la solution est égale à la donnée initiale ($\|R - R_0\|_{L^\infty}$=0), ce qui assure l'équilibre du problème d'évolution.

Nous passons maintenant au problème d'évolution thermodynamique.

## 7.2 Cas thermodynamique

Le cas thermodynamique est un peu plus délicat à traiter. En fait, le problème d'évolution s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}R(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big)(\bar{B}_{\text{thermo}})^a R(t,x_3), \tag{7.6}$$

avec

$$\bar{B}_{\text{thermo}} = (2\mu+3\lambda)A_m R^T - \mu(A_m R^T)^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(A_m R^T)A_m R^T \\ - \frac{J^h_\alpha}{a_h}\Big(\mu(A_\alpha R^T)^2 + \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)A_\alpha R^T\Big), \tag{7.7}$$

$A_m = (\rho_1 R_1|\rho_2 R_2|m')$ et $A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)')$ et où la fonction $\nu^+$ est donnée par

$$\nu^+\big((\bar{B}_{\text{thermo}})^a\big) = \Big(1 + \Big\|\frac{(\bar{B}_{\text{thermo}})^a}{\sigma}\Big\|\Big)^2.$$

Il ne s'agit plus d'une équation différentielle ordinaire mais plutôt d'une équation aux dérivées partielles. En fait, le second membre de l'équation en question fait intervenir des dérivées par rapport à la variable d'espace $x_3$ des première et deuxième colonnes de la rotation, et ce à partir de l'expression de $A_\alpha$. De plus, le second membre contient les coefficients $\rho_\alpha$ ainsi que leurs dérivées, alors que dans le cas mécanique, il ne dépendait que de $m'$. Le dernier point ne pose aucune difficulté car on suppose dans ce cas données les quantités $m'$, $\rho_\alpha$ et $\rho'_\alpha$. En effet, ce paragraphe s'occupe de la résolution numérique du problème d'évolution découplé du problème de minimisation. Par contre, la difficulté apparaît avec la forme $f(R,R',t)$ du second membre, $R' = \frac{\partial R}{\partial x_3}$ étant la dérivée de $R$ par rapport à $x_3$. Ainsi, nous devons l'écrire comme une fonction de $R$ seulement, pour pouvoir par la suite résoudre numériquement (7.6) par la primitive « ode ». On choisit alors d'approcher les dérivées spatiales de $R_\alpha$ à partir des valeurs discrètes de $R_\alpha$. Pour ce faire, on discrétise la variable d'espace,

$$x_3(i) = ih, \qquad h = \frac{1}{N+1}, \qquad 0 \le i \le N+1,$$

et on se donne une rotation discrétisée en espace autrement dit, on écrit $R$ sous la forme

$$R(x_3) = \big(R(x_3(0))|R(x_3(2))|\dots|R(x_3(N+1))\big)$$

où

$$R(x_3(i)) = \big(R_1(x_3(i))|R_2(x_3(i))|R_3(x_3(i))\big)$$

est une rotation au nœud $x_3(i)$. La matrice $R$ est donc de taille $3\times 3(N+2)$ composée de $(N+2)$ blocs de taille $3\times 3$. Le $i$-ème bloc représente une rotation en dimension 3 au $i$-ème noeud du maillage. Ainsi, on a que $R_1(x_3)$ (respectivement

$R_2(x_3)$) est une matrice de taille $3 \times (N+2)$ dont les colonnes sont les premières colonnes (respectivement les deuxièmes colonnes) des $(N+2)$ blocs (de taille $3 \times 3$) de la matrice $R$. Plus précisément, on a

$$R_\alpha(x_3) = \begin{pmatrix} R_{\alpha 1}(x_3(0)) & \dots & R_{\alpha 1}(x_3(N+1)) \\ R_{\alpha 2}(x_3(0)) & \dots & R_{\alpha 2}(x_3(N+1)) \\ R_{\alpha 3}(x_3(0)) & \dots & R_{\alpha 3}(x_3(N+1)) \end{pmatrix},$$

$\alpha = 1,2$. On approche donc $R'_\alpha$ comme suit :

$$R'_{\alpha j}(x_3(0)) = \frac{R_{\alpha j}(x_3(1)) - R_{\alpha j}(x_3(0))}{h},$$

$$R'_{\alpha j}(x_3(N+1)) = \frac{R_{\alpha j}(x_3(N+1)) - R_{\alpha j}(x_3(N))}{h}$$

et

$$R'_{\alpha j}(x_3(k)) = \frac{R_{\alpha j}(x_3(k+1)) - R_{\alpha j}(x_3(k-1))}{2h},$$

où $j = 1,2,3$ et $k = 2,\dots,N$. Ainsi, on arrive à écrire le second membre sous la forme $f(R,t)$ tout en se donnant des valeurs pour $m'$, $\rho_\alpha$ et $\rho'_\alpha$.

### 7.2.1 Test pour ode

On sait, d'apres la remarque 4.2.9 du Chapitre 4, que la solution du problème d'évolution continu (dans le cas thermodynamique) est une rotation. Ceci nous permet donc de tester « ode » comme on avait fait dans le cas mécanique. On vérifie alors que les solutions calculées par « ode » sont assez proches d'une rotation. On donne quelques résultats correspondants à

$$\rho_\alpha = \begin{pmatrix} x_3(0)+1 \\ \vdots \\ x_3(N+1)+1 \end{pmatrix} \text{ et } \rho'_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

où l'on a discrétisé $x_3$ en $N+2$ points (voir le paragraphe précédent). D'après leur définition, $\rho_\alpha$ et $\rho'_\alpha$ sont donc des vecteurs colonne de taille $(N+2)$. De même, les données initiales (les rotations) sont des matrices de taille $3 \times 3(N+2)$. De plus, la derivée de la ligne moyenne $m$ est une matrice de taille $3 \times (N+2)$ autrement dit, la $i$-ème colonne de cette matrice correspond à la valeur du vecteur $m'$ au nœud $x_3(i)$ du maillage. Il s'agit donc de vérifier que la solution de « ode » est proche d'une rotation en chaque point du maillage. Le tableau suivant correspond à $N = 100$, $t_0 = 0$ (temps initial) et $t = 0 : 0.01 : 10$.

| donnée initiale | $m'$ | $\max \|R^T(i)R(i) - I_3\|^2$ | $\max\big(\|\det(R(i)) - 1\|\big)$ |
|---|---|---|---|
| $I_{3,3(N+2)}$ | $I_{3,N+2}$ | 5.768E-20 | 1.693E-10 |
| $I_{3,3(N+2)}$ | $(x_3;x_3;x_3)$ | 1.012E-18 | 7.115E-10 |
| Rot($\pi/3$) | $I_{3,N+2}$ | 1.364E-20 | 8.076E-11 |

Où $I_{3,3(N+2)}$ est une matrice composée de $(N+2)$ blocs de taille $3\times 3$ dont chacun est la matrice identité en dimension 3, et $\mathrm{Rot}(\frac{\pi}{3}) \in M_{3,3(N+2)}$ et est donnée par

$$\mathrm{Rot}(\frac{\pi}{3}) = \big(C(x_3(1))\,|\ldots|\,C(x_3(N+2))\big),$$

avec

$$C(x_3(i)) = \begin{pmatrix} \cos\big(\frac{\pi}{3}x_3(i)\big) & -\sin\big(\frac{\pi}{3}x_3(i)\big) & 0 \\ \sin\big(\frac{\pi}{3}x_3(i)\big) & \cos\big(\frac{\pi}{3}x_3(i)\big) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $x_3(i)$ sont les points du maillage. Pour ce qui concerne les données de la dérivée de $m$ notée $m'$ dans le tableau ci-dessus, on a que $(x_3;x_3;x_3)$ correspond à la matrice dont les 3 lignes sont égales à $x_3 = (x_3(0),\ldots,x_3(N+1))$. De plus, $I_{3,N+2}$ est une matrice formée par 34 blocs de taille $3\times 3$ (car on prend ici $N = 100$ et donc $N+2$ est bien divisible par 3), chaque bloc étant la matrice identité en dimension 3. Finalement, on rappelle que $R(i) := R(x_3(i))$ est le i-ème bloc $3\times 3$ de la solution $R$ approchée par « ode ». Le tableau montre donc que tous ces blocs sont très proches d'une rotation en dimension 3, ce qui confirme l'efficacité de « ode ».

### 7.2.2 Condition d'équilibre thermodynamique

Nous testons également notre code du problème d'évolution thermodynamique en cherchant la condition d'équilibre correspondante (comme nous l'avait fait pour le cas mécanique). Mais pour simplifier le calcul, nous considérons le cas où les coefficients $\rho_\alpha$ sont égaux à 1. Notons que le problème de minimisation dans ce cas simplifié a été étudié dans la première partie du travail (Chapitre 5). De plus, nous donnerons dans le chapitre suivant des exemples numériques correspondant au modèle couplé simplifié autrement dit, au modèle pour lequel la seule inconnue du problème de minimisation est la ligne moyenne $m$ du fil.

Dans ce cas simplifié, l'équation aux dérivées partielles s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}R(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\Big(1 + \Big\|\frac{(\bar{B}_{\text{thermo}})^a}{\sigma}\Big\|\Big)^2 (\bar{B}_{\text{thermo}})^a R(t,x_3), \tag{7.8}$$

avec

$$\begin{aligned}(\bar{B}_{\text{thermo}})^a = (2\mu+3\lambda)(A_mR^T)^a - \mu\big((A_mR^T)^2\big)^a - \lambda\,\mathrm{tr}(A_mR^T)(A_mR^T)^a \\ - \frac{J^h_\alpha}{a_h}\Big(\mu\big((A_\alpha R^T)^2\big)^a + \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)(A_\alpha R^T)^a\Big),\end{aligned} \tag{7.9}$$

$A_m = (R_1|R_2|m')$ et $A_\alpha = (0|0|R'_\alpha)$.

Annuler le second membre de (7.8) revient à annuler la matrice antisymétrique $(\bar{B}_{\text{thermo}})^a$ car $R$ est une rotation et $\frac{1}{\eta}\Big(1+\Big\|\frac{(\bar{B}_{\text{thermo}})^a}{\sigma}\Big\|\Big)^2$ ne s'annule jamais. Pour cette raison, il faut calculer chaque terme de (7.9) soit les scalaires $\mathrm{tr}(A_mR^T)$ et $\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)$, et les matrices $(A_mR^T)^a$, $\big((A_mR^T)^2\big)^a$, $\big((A_\alpha R^T)^2\big)^a$ et $(A_\alpha R^T)^a$. On donne directement les valeurs de ces termes sans détailler le calcul. Tout d'abord, on a

$$\mathrm{tr}(A_mR^T) = |R_1|^2 + |R_2|^2 + R_3\cdot m' = 2 + R_3\cdot m' \ \text{ et } \ \mathrm{tr}(A_\alpha R^T) = R'_\alpha\cdot R_3.$$

Pour ce qui concerne les matrices, $(A_mR^T)^a$ n'est autre que $B_{m',R}$ calculée dans la section précédente et donnée par

$$(A_mR^T)^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(R_3\wedge m')_3 & (R_3\wedge m')_2 \\ (R_3\wedge m')_3 & 0 & -(R_3\wedge m')_1 \\ -(R_3\wedge m')_2 & (R_3\wedge m')_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

où $(R_3\wedge m')_i$ désigne la i-ème composante ($i=1,2,3$) du produit vectoriel de $R_3$ et de $m'$. De plus, on a

$$\big((A_mR^T)^2\big)^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.11}$$

avec

$$\begin{aligned} a_{12} &= (R_1\cdot m')(R_1\wedge R_3)_3 + (R_2\cdot m')(R_2\wedge R_3)_3 - (R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_3 \\ &= -(R_1\cdot m')R_{32} + (R_2\cdot m')R_{31} - (R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_3, \end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= -(R_1\cdot m')(R_1\wedge R_3)_2 - (R_2\cdot m')(R_2\wedge R_3)_2 + (R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_2 \\ &= (R_1\cdot m')R_{22} - (R_2\cdot m')R_{21} + (R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_2 \end{aligned} \tag{7.13}$$

et

$$\begin{aligned} a_{23} &= (R_1\cdot m')(R_1\wedge R_3)_1 + (R_2\cdot m')(R_2\wedge R_3)_1 - (R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_1 \\ &= -(R_1\cdot m')R_{12} + (R_2\cdot m')R_{11} - (R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_1. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Ainsi, à l'aide des matrices (7.10) et (7.11), on trouve

$$(2\mu+3\lambda-\lambda\,\mathrm{tr}(A_mR^T))(A_mR^T)^a-\mu\big((A_mR^T)^2\big)^a=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & b_{12} & b_{13}\\ -b_{12} & 0 & b_{23}\\ -b_{13} & -b_{23} & 0\end{pmatrix}, \tag{7.15}$$

avec

$$b_{12}=-(\mu+\frac{\lambda}{2})(R_3\wedge m')_3-\frac{\mu}{2}\big(-(R_1\cdot m')R_{32} + (R_2\cdot m')R_{31}\big)+\frac{\mu+\lambda}{2}(R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_3, \tag{7.16}$$

$$b_{13}=(\mu+\frac{\lambda}{2})(R_3\wedge m')_2-\frac{\mu}{2}\big((R_1\cdot m')R_{22} - (R_2\cdot m')R_{21}\big)-\frac{\mu+\lambda}{2}(R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_2 \tag{7.17}$$

et

$$b_{23}=-(\mu+\frac{\lambda}{2})(R_3\wedge m')_1-\frac{\mu}{2}\big(-(R_1\cdot m')R_{12} + (R_2\cdot m')R_{11}\big)+\frac{\mu+\lambda}{2}(R_3\cdot m')(R_3\wedge m')_1. \tag{7.18}$$

Passons au calcul des matrices contenant $A_\alpha=(0|0|R'_\alpha)$. D'une part, on a

$$(A_\alpha R^T)^a=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & (R'_\alpha\wedge R_3)_3 & -(R'_\alpha\wedge R_3)_2\\ -(R'_\alpha\wedge R_3)_3 & 0 & (R'_\alpha\wedge R_3)_1\\ (R'_\alpha\wedge R_3)_2 & -(R'_\alpha\wedge R_3)_1 & 0\end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

D'autre part, on a

$$\big((A_\alpha R^T)^2\big)^a=\frac{R'_\alpha\cdot R_3}{2}\begin{pmatrix}0 & (R'_\alpha\wedge R_3)_3 & -(R'_\alpha\wedge R_3)_2\\ -(R'_\alpha\wedge R_3)_3 & 0 & (R'_\alpha\wedge R_3)_1\\ (R'_\alpha\wedge R_3)_2 & -(R'_\alpha\wedge R_3)_1 & 0\end{pmatrix} \tag{7.20}$$

$$=(R'_\alpha\cdot R_3)\,(A_\alpha R^T)^a.$$

Par suite, sachant que $\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)=R'_\alpha\cdot R_3$, on obtient

$$\Big(\mu\big((A_\alpha R^T)^2\big)^a+\lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)(A_\alpha R^T)^a\Big)=(\mu+\lambda)(R'_\alpha\cdot R_3)\,(A_\alpha R^T)^a. \tag{7.21}$$

Enfin, en substituant (7.15) et (7.21) dans (7.9), il vient

$$(\bar{B}_{\text{thermo}})^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.22}$$

où

$$c_{12} = b_{12} + (\mu+\lambda)(R'_\alpha \cdot R_3)(R'_\alpha \wedge R_3)_3,$$
$$c_{13} = b_{13} + (\mu+\lambda)(R'_\alpha \cdot R_3)(R'_\alpha \wedge R_3)_2$$

et

$$c_{23} = b_{23} + (\mu+\lambda)(R'_\alpha \cdot R_3)(R'_\alpha \wedge R_3)_1.$$

On remarque ainsi qu'une condition suffisante pour annuler $(\bar{B}_{\text{thermo}})^a$ est la suivante

$$R_3 \wedge m' = R'_\alpha \wedge R_3 = 0.$$

En effet, si $R_3 \neq 0$, alors

$$R_3 \wedge m' = 0 \Rightarrow R_\alpha \cdot m' = 0 \Rightarrow b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0.$$

La condition nécessaire pour annuler $(\bar{B}_{\text{thermo}})^a$ est beaucoup plus difficile à déterminer en raison de la complexité de la matrice (7.22), et l'on se contente de la condition suffisante pour tester l'équilibre de l'équation différentielle.

Notons qu'on retrouve la condition d'équilibre mécanique, $R_3 \wedge m' = 0$, dans le cas thermodynamique. Mais dans ce dernier cas, elle est accompagnée de la relation $R'_\alpha \wedge R_3 = 0$, ce qui est cohérent avec l'aspect d'équation aux dérivées partielles. Pour vérifier numériquement que les relations $R_3 \wedge m' = 0$ et $R'_\alpha \wedge R_3 = 0$ assurent l'équilibre thermodynamique, on considère le même choix de $m'$ du cas mécanique soit,

$$m'_1 = \frac{R_{13}}{R_{33}},\ m'_2 = \frac{R_{23}}{R_{33}} \ \text{ et } \ m'_3 = 1.$$

Pour ce qui concerne les valeurs de $R'_\alpha$, on prend $R'_1 = m'$ et $R'_2$ comme suit

$$R'_{12} = \frac{R_{13}}{R_{23}},\ R'_{22} = 1 \ \text{ et } \ R'_{32} = \frac{R_{33}}{R_{23}}.$$

Enfin, pour la donnée initiale, on la prend comme dans le cas mécanique, soit

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Ces choix donnent le tableau suivant.

| $R_0$ | $\det R - 1$ | $\|R^T R - \mathrm{I}\|^2$ | $\|R - R_0\|_{L^\infty}$ |
|---|---|---|---|
| $\theta = \pi/6$ | 0 | 1.103E-34 | 0 |
| $\theta = \pi/4$ | 0 | 2.055E-34 | 0 |
| $\theta = \pi/3$ | 0 | 4.429E-34 | 0 |

Nous remarquons que la solution donnée par le code est égale à la donnée initiale (car $\|R - R_0\|_{L^\infty}$=0, et ce pour les trois cas considérés), et par suite l'équilibre du problème d'évolution thermodynamique est bien vérifié numériquement.

Chapitre 8

# Résolution numérique des problèmes couplés réduits

# Chapitre 8

# Résolution numérique du problème couplé réduit

Le modèle continu viscoélastique unidimensionnel introduit au Chapitre 2, consistait à trouver un couple $(X,R) \in \mathbb{R}^5 \times SO(3)$ tel que $X = (m, \rho_1, \rho_2)$ soit solution, à $R$ fixé, d'un problème de minimisation d'énergie, et $R$ soit solution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire (dans le cas mécanique) ou d'une équation aux dérivées partielles (dans le cas thermodynamique). L'analyse mathématique c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution, a été faite seulement pour le problème couplé mécanique (Chapitres 3 et 4), le cas thermodynamique étant beaucoup plus compliqué. Par contre, dans ce chapitre on s'intéresse à l'implémentation des deux modèles viscoélastiques unidimensionnels, le modèle mécanique et le modèle thermodynamique. Il s'agit en fait de « combiner » le code du problème de minimisation implémenté dans le Chapitre 6 avec ceux des problèmes d'évolution (mécanique et thermodynamique) implémentés dans le Chapitre 7.

L'approximation numérique du problème couplé dans les deux cas mécanique et thermodynamique, se fait par une méthode de « splitting ». Les problèmes discrétisés de minimisation et d'évolution sont donc résolus à tour de rôle, de manière à ce que la solution du problème de minimisation puisse être utilisée pour la résolution d'un pas de temps du problème d'évolution. Ensuite, la solution de ce dernier problème sert à calculer les coefficients de la matrice et le second membre, et donc à résoudre le problème de minimisation à l'étape suivante.

On commence par implémenter le problème couplé mécanique.

## 8.1 Cas mécanique

On rappelle la formulation variationnelle du problème continu de minimisation ainsi que l'équation différentielle ordinaire non linéaire du modèle viscoélastique

mécanique que l'on souhaite approcher

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^1 K_{\alpha,R}\rho_\alpha\theta_\alpha\,dx_3+\int_0^1 a_h\left(\mu(m'\cdot n')+(\mu+\lambda)(R_3\cdot m')(R_3\cdot n')\right)dx_3\\
\displaystyle\quad+\int_0^1 \lambda\, a_h\left(\rho_1\theta_2+\rho_2\theta_1+(\rho_1+\rho_2)(R_3\cdot n')+(\theta_1+\theta_2)(R_3\cdot m')\right)dx_3\\
\displaystyle\qquad+\int_0^1 \mu\sum_{\alpha=1}^{2} J_\alpha^h\rho'_\alpha\theta'_\alpha=\int_0^1\left(a_h(2\mu+3\lambda)(\theta_1+\theta_2+R_3\cdot n')+f_r\cdot n\right.\\
\qquad\qquad\left.+\bar{h}\cdot\theta_\alpha R_\alpha\right)dx_3+g_r\cdot n(1)+\bar{g}\cdot\theta_\alpha(1)R_\alpha(1)+\bar{e}\cdot\theta_\alpha(0)R_\alpha(0),\\
\\
\displaystyle\frac{d}{dt}R(t)=\frac{1}{\eta}(1+\|B_{m',R}\|)^2B_{m',R}R
\end{array}\right. \tag{8.1}$$

où

$$K_{\alpha,R}=(2\mu+\lambda)\,a_h+\sum_{\alpha=1}^{2}J_\alpha^h\left(\mu|R'_\alpha|^2+(\mu+\lambda)(R_3\cdot R'_\alpha)^2\right),$$

$a_h$ et $J_\alpha^h$ sont respectivement l'aire et les moments d'inertie principaux de la section $h\omega$ et la matrice antisymétrique $B_{m',R}$ est donnée par

$$B_{m',R}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -(R_3\wedge m')_3 & (R_3\wedge m')_2\\ (R_3\wedge m')_3 & 0 & -(R_3\wedge m')_1\\ -(R_3\wedge m')_2 & (R_3\wedge m')_1 & 0\end{pmatrix},$$

$(R_3\wedge m')_i$ étant la ième composante du produit vectoriel de la troisième colonne de la rotation et de $m'$.

La démarche de la résolution numérique du modèle viscoélastique approché est structurée comme suit : on se donne une rotation initiale qui est une rotation en chaque nœud du maillage donc une matrice $3\times 3(N+2)$ ($N+2$ étant le nombre de points du maillage). On résout ainsi le problème discret de minimisation, implémenté dans le Chapitre 6, et on en trouve une solution approchée par les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$, qu'on note $(\rho_{1,h},\rho_{2,h},m_h)$ ($h$ étant le pas du maillage). Pour résoudre numériquement le problème d'évolution, on remarque que le second membre de l'équation différentielle ci-dessus dépend de la valeur de $m'_h$ en chaque nœud du maillage. Mais $m_h$ est affine par morceaux, sa dérivée n'existe donc pas aux points $x_i$ du maillage. Pour cette raison, on décide de l'approcher par la moyenne des valeurs qu'elle prend à droite et à gauche du nœud $x_i$ ($i=1,\dots,N$) qu'on note $m'_{h,i,+}$ et $m'_{h,i,-}$ respectivement. Ainsi, on trouve la pente de la corde joignant les nœuds précédent et suivant de $x_i$

$$\begin{aligned}m'_h(x_i):=m'_{h,i}&=\frac{m'_{h,i,+}+m'_{h,i,-}}{2}\\&=\frac{m_h(x_{i+1})-m_h(x_{i-1})}{2h}\end{aligned} \tag{8.2}$$

pour tout $i = 1, \ldots, N$.

Pour les extrémités du maillage (pour $i = 0, N+1$), on ne dispose que d'une seule valeur (à gauche ou à droite), et l'on choisit donc

$$m_h'(x_0) = \frac{m_h(x_1) - m_h(x_0)}{h} \quad \text{et} \quad m_h'(x_{N+1}) = \frac{m_h(x_{N+1}) - m_h(x_N)}{h}.$$

Ayant la valeur de $m_h'$ aux différents nœuds, le second membre de l'équation différentielle s'écrit ainsi comme une fonction ne dépendant que de $R$. On peut donc résoudre cette équation différentielle en utilisant le code du problème d'évolution mécanique implémenté dans le Chapitre 7. La solution qu'on obtient non seulement permet la résolution du problème de minimisation discrétisé, mais sert également comme donnée initiale pour l'appel suivant à « ode » permettant de résoudre le problème d'évolution.

Pour résumer, on a dans le cas mécanique l'algorithme suivant :

$R_i^0$ donnée initiale
pour $k = 0, \ldots, T/\delta t$
- Résolution du problème de minimisation avec $R_i^k$ comme donnée
- Calcul de $(m_{h,i}^k)'$
- Résolution de l'équation différentielle sur l'intervalle $(k\delta t, (k+1)\delta t)$
- $R_i^0 = R_i^{k+1}$

fin

où $T$ est le temps final et $\delta t$ est le pas de temps du splitting.

Nous présentons maintenant quelques tests numériques du code du problème couplé mécanique.

### 8.1.1 Résultats numériques

On rappelle qu'on laisse libres les normes des vecteurs directeurs de la section du fil (les coefficients rhos) et les rotations aux extrémités. En fait, en imposant des conditions aux limites de type Dirichlet pour les rhos, un phénomène de couche limite apparaît (voir [29]). De plus, imposer des conditions aux limites sur les rhos revient à en imposer sur les rotations. Or, on a vu dans le Chapitre 3 (Section 3.1.1) que ces conditions aux limites ne sont pas compatibles avec l'équation différentielle en question.

Pour ce qui concerne les conditions aux limites imposées sur la déformation de la ligne moyenne du fil, on traite les deux cas suivants :
- Fixation en une seule extrémité du fil : condition aux limites de type Dirichlet à l'origine, $m(0) = (0,0,0)$.

– Fixation aux deux extrémités du fil : conditions de Dirichlet homogène en $x_3 = 0$, $m(0) = (0,0,0)$, et non homogène en $x_3 = 1$, $m(1) = (0,0,b)$ avec $b \in \mathbb{R}$. On considérera d'une part le cas où $b \geq 1$, et d'autre part le cas où $b < 1$ autrement dit, où l'on comprime le fil en rapprochant ses extrémités.

**Remarque 8.1.1.** On a utilisé le terme « fixation » au lieu du terme standard « encastrement » car les sections aux extrémités bougent puisqu'on n'a imposé des conditions aux limites que sur la ligne moyenne du fil.

Il reste à choisir les termes de forces qui apparaissent dans le second membre de la formulation variationnelle discrète correspondante à (8.1). Pour simplifier, on prend une section circulaire de rayon $h_{\text{section}}/2$, et l'on considère que les forces volumique $f$ et surfacique $N_s$ ainsi que le terme de force $g$ (appliqué à l'extrémité $x_3 = 1$, dans le cas où l'on y laisse libre $m$) sont constants (ne dépendent donc pas de la variable $x_3$). Dans ce cas, on obtient

$$f_r = f a_h + \pi h_{\text{section}} N_s, \quad g_r = g\, a_h \quad \text{et} \quad \bar{h} = \bar{g} = \bar{e} = 0, \tag{8.3}$$

où $a_h$ est l'aire de la section $h\omega$. Ainsi, le second membre de (8.1) devient

$$\int_0^1 \big(a_h (2\mu + 3\lambda)(\theta_1 + \theta_2 + R_3 \cdot n') + f_r \cdot n\big)\, dx_3 + g_r \cdot n(1).$$

Dans la partie théorique, on avait noté le diamètre de la section $h\omega$ et la force surfacique par $h$ et $N$ respectivement. Tout au long de cette deuxième partie du travail, nous les noterons $h_{\text{section}}$ et $N_s$ pour ne pas les confondre avec le pas ($h$) du maillage et son nombre de nœuds ($N$).

### Fixation en une seule extrémité

Dans cette section, on laisse libre $m$ en $x_3 = 1$ et on ne lui impose donc qu'une condition aux limites de type Dirichlet homogène au point $x_3 = 0$, $m(0) = (0,0,0)$. On rappelle que dans ce cas, les espaces fonctionnels d'approximation sont donnés par

$$X_h^\alpha = \{\theta \in C([0,1]);\, \theta|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1,\, 0 \leq j \leq N\}, \tag{8.4}$$

et

$$M_h^i = \{v \in C([0,1]);\, v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1,\, 0 \leq j \leq N,\, v(0) = 0\}. \tag{8.5}$$

Les deux premiers espaces correspondent aux coefficients $\rho_{\alpha,h}$, les trois derniers au vecteur $m_h$.

On donne quelques résultats pour $h_{\text{section}} = 0.1$ (l'epaisseur du fil), $\eta = 10^2$Pa (le terme qui apparaît dans le second membre de l'équation différentielle) et une rotation initiale (par blocs de taille $3 \times 3$) $R^0$ discrétisée en espace comme suit :

$$R^0 = (R^0(x_0)|\ldots|R^0(x_{N+1})) \tag{8.6}$$

avec

$$R^0(x_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta x_i) & -\sin(\theta x_i) & 0 \\ \sin(\theta x_i) & \cos(\theta x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $i = 0, \ldots, N+1$. Ici on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$. On fait varier le nombre de nœuds $N$ du maillage et les forces $f$, $N_s$ et $g$, et ce pour deux matériaux. Tout d'abord, on considère un matériau synthétique rigide noté matériau 1, et ayant pour constantes de Lamé $\mu = 26316$ MPa et $\lambda = 51084$ MPa. Le tableau suivant y correspond avec $f = 2.5 * 10^{10}(1,1,1)$ et $g = -2.5 * 10^{10}(1,1,1)$.

| **Cas mécanique, matériau 1 fixé en** 0 | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\lvert \det(R(T_f)_i) - 1\rvert\right)$ |
| 50 | 3.739E-13 | 8.564E-11 | 0.0000065 |
| 100 | 1.392E-12 | 7.383E-11 | 0.0000061 |
| 200 | 6.666E-12 | 6.765E-11 | 0.0000058 |

L'estimation affichée dans ce tableau correspond à l'estimation d'erreur en norme euclidienne entre la solution exacte $Z_e$ et la solution approchée $Z_h$ de notre système discret $A_h Z_h = b_h$. Il s'agit donc d'estimer $|Z_e - Z_h|$ en norme euclidienne. Or, on sait que

$$\begin{aligned} |Z_e - Z_h| &\leq \|(A_h)^{-1}\| |r| \\ &\leq \frac{\mathrm{cond}(A_h)}{\|A_h\|} |r|, \end{aligned} \tag{8.7}$$

où toutes les normes sont des normes euclidiennes (vectorielle et matricielle), $r$ est le résidu égal à $A_h Z_h - b_h$, et $\mathrm{cond}(A_h)$ est le conditionnement de la matrice $A_h$. Ce conditionnement est égal au produit de la norme de $A_h$ par celle de son inverse, et est calculé en norme euclidienne dans le logiciel Scilab. Enfin, on fait une mise à l'échelle de la norme euclidienne par rapport à la dimension de l'espace sur lequel on résout notre système. Ainsi, l'estimation donnée dans le tableau correspond au quotient $\dfrac{\mathrm{cond}(A_h)|r|}{\sqrt{M}\|A_h\|}$ où $M$ est la dimension du vecteur $Z_h$.

La solution approchée $R(T_f)$ de l'équation différentielle (affichée dans le tableau ci-dessus) est obtenue à l'instant final $T_f = 300$, et est une matrice de taille $3 \times 3(N+2)$ autrement dit, en chaque nœud du maillage il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 3 ($N+2$ étant le nombre de nœuds du maillage). Comme la solution du problème continu d'évolution est une rotation, on souhaite donc que chaque

ième bloc de taille $3 \times 3$ de la matrice $R(T_f)$, noté $R(T_f)_i$ (correspondant au ième nœud du maillage), soit assez proche d'une rotation. Pour cette raison, on calcule $\|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ ainsi que $|\det(R^T(T_f)_i) - 1|$. On ne met dans le tableau que le maximum de ces valeurs aux différents nœuds.

On reprend les mêmes tests avec un matériau élastique souple noté matériau 2 et dont $\mu = 1358$ MPa et $\lambda = 2036$ MPa. Dans ce cas et pour rester dans les mêmes ordres de grandeur que celles du matériau 1 dont les constantes de Lamé sont plus grandes d'un facteur de 10, on prend $f = 2.5 * 10^9(1,1,1)$ et $g = -2.5 * 10^9(1,1,1)$ (mais on garde les mêmes valeurs de $h_{section}$, de $\eta$ et de $R^0$ du matériau 1). On obtient ainsi les résultats suivants.

| **Cas mécanique, matériau 2 fixé en** 0 | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 4.012E-13 | 9.061E-13 | 0.0000007 |
| 100 | 1.750E-12 | 8.177E-13 | 0.0000006 |
| 200 | 5.169E-12 | 7.922E-13 | 0.0000006 |

Les deux tableaux ci-dessus nous donnent de bons résultats non seulement au niveau du problème approché d'évolution mais également au niveau du problème discret de minimisation (l'ordre de l'« estimation » variant entre $10^{-12}$ et $10^{-13}$). Par ailleurs, en comparant les résultats de ces deux tableaux, il vient que ceux du problème de minimisation donnés par la valeur de l'« estimation » sont assez proches pour les deux matériaux. Alors que ce sont les résultats du matériau élastique souple (matériau 2) qui sont plus satisfaisants pour le problème d'évolution (car les erreurs affichées dans les deux dernières colonnes des tableaux sont plus petites pour le matériau 2).

Toutes les figures de ce chapitre ont été visualisées par le logiciel medit qui a été conçu et réalisé au laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie. On rappelle que le modèle viscoélastique qu'on a simulé est un problème unidimensionnel. Pour cette raison, il est bien de noter que ces figures correspondent à la déformation tridimensionnelle du fil obtenue à partir des solutions monodimensionnelles fournies par le code du problème couplé. Plus précisément, on insère les valeurs de $m$, de $\rho_\alpha$ et de $R_\alpha$ approchées par le code dans l'Ansatz

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = m(x_3) + \rho_1(x_3)R_1(x_3)x_1 + \rho_2(x_3)R_2(x_3)x_2.$$

On utilise des coordonnées polaires pour les variables $x_1$ et $x_2$ autrement dit, on prend $x_1 = \cos\theta$ et $x_2 = \sin\theta$ avec $\theta \in (0,2\pi)$ (pour un rayon égal à 1) et puis on discrétise l'intervalle $(0,2\pi)$. Notons de plus que l'on n'affiche que quelques sections du fil dont les première et dernière correspondent aux extrémités du fil, et les sections intermédiaires sont régulièrement réparties (en partie entière) entre ces

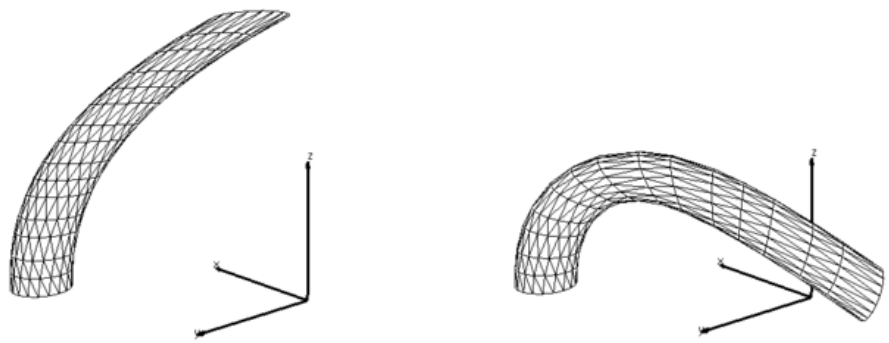

FIG. 8.1 – Cas mécanique, matériau 1 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

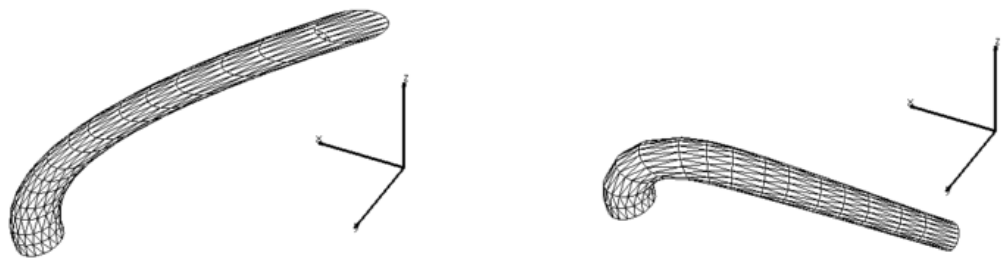

FIG. 8.2 – Cas mécanique, matériau 2 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

extrémités, et que par la suite les valeurs affichées de $m$, de $\rho_\alpha$ et de $R_\alpha$ correspondent à ces sections. Enfin, ces figures montrent l'aspect déformé du fil tridimensionnel, avec un coefficient d'homothétie dans la direction des sections pour mieux visualiser leur orientation.

Sauf mention contraire, toutes les figures de ce chapitre correspondent à $N = 50$ ($N$ étant le nombre de points du maillage). En effet, il n'y a pas de différence visuelle marquée entre $N = 50$ et les deux autres valeurs considérées de $N$, 100 et 200.

La figure 8.1 correspond au cas où le matériau synthétique rigide est fixé à l'extrémité zéro. Elle représente la configuration initiale (à gauche) correspondant à la première minimisation obtenue à l'aide de la rotation initiale avant toute discrétisation en temps, et la configuration finale (à droite) correspondant à la dernière itération (ici 300).

La figure 8.2 illustre de même les états initial et final (comme dans la figure 8.1) du matériau élastique souple fixé en zéro.

Notons qu'en comparant les figures 8.1 et 8.2, on retrouve le fait que le matériau élastique souple donne un meilleur résultat. En effet, les sections à l'instant final sont plus orthogonales à la ligne moyenne dans le cas du matériau 2.

Un travail similaire a été fait dans le cas où les deux extrémités du fil sont fixées.

### Fixation aux deux extrémités

Ici, on décide de fixer le fil aux deux extrémités avec des conditions aux limites sur $m_h$ de types Dirichlet homogène en $x_3 = 0$ et non homogène en $x_3 = 1$, et ce tout en laissant toujours libres les coefficients rhos et les rotations. Dans ce cas, les espaces fonctionnels d'approximation des coefficients rhos ne diffèrent pas du paragraphe précédent ((8.4)), par contre ceux de la déformation de la ligne moyenne du fil deviennent

$$M_h^\alpha = \{v \in C([0,1]); v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq j \leq N, v(0) = 0 \text{ et } v(1) = 0\} \tag{8.8}$$

et

$$M_h^3 = \{v \in C([0,1]); v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq j \leq N, v(0) = 0 \text{ et } v(1) = b\}. \tag{8.9}$$

Les deux premiers espaces correspondent aux deux premières composantes de $m_h$, le dernier à sa troisième composante, en effet $m_h(1) = (0,0,b)$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Pour rendre homogène la condition en $x_3 = 1$, on a eu recours à un changement de variables autrement dit, on décompose la déformation discrétisée de la ligne moyenne du fil comme suit :

$$m_h(x_3) = ax_3 + \tilde{m}_h(x_3), \tag{8.10}$$

avec $a = m_h(1) \in \mathbb{R}^3$. La partie $x_3 \mapsto ax_3$ satisfait les conditions non homogènes et $\tilde{m}_h \in H_0^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, on résout le problème variationnel obtenu en remplaçant $m_h$ par $\tilde{m}_h = m_h(x_3) - ax_3$ qui satisfait des conditions de Dirichlet homogène, et en

faisant par la suite passer au second membre de la formulation variationnelle les termes correspondant à $x_3 \mapsto ax_3$. À la fin, on reconstitue $m_h$ à partir de $\tilde{m}_h$ par (8.10).

On donne comme précédemment quelques résultats numériques correspondants à $m_h(1) = (0,0,1)$ ($b = 1$) avec la même épaisseur du fil ($h_{\text{section}} = 0.1$) et la même valeur de $\eta$ ($\eta = 10^2$Pa) et ce pour les deux matériaux. On considère une rotation initiale donnée par (8.6) avec une valeur de $\theta$ égale à $\frac{\pi}{4}$, des forces $f = 10^{11}(1,0,0)$ et $N_s = -10^9(1,1.2,1)$ pour le matériau synthétique rigide (matériau 1), et $f = 10^{10}(1,0,0)$ et $N_s = -10^8(1,1.2,1)$ pour le matériau élastique souple (matériau 2). Les résultats sont affichés dans les deux tableaux suivants.

| **Cas mécanique, matériau 1 fixé aux deux extrémités** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 9.28E-14 | 7.274E-12 | 1.907E-06 |
| 100 | 3.978E-13 | 4.894E-12 | 1.564E-06 |
| 200 | 2.095E-12 | 4.67E-12 | 1.528E-06 |

| **Cas mécanique, matériau 2 fixé aux deux extrémités** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 2.148E-13 | 7.651E-13 | 6.185E-07 |
| 100 | 8.653E-13 | 5.3198E-13 | 5.157E-07 |
| 200 | 3.716E-12 | 5.131E-13 | 5.065E-07 |

Ces deux tableaux montrent de même la fiabilité du code du problème couplé approché. En effet, d'une part l'estimation d'erreur égale à

$$\frac{\text{cond}(A_h)|r|}{\sqrt{(\dim(Z_h))}\|A_h\|}$$

est très petite ce qui montre que le problème de minimisation est bien approché. D'autre part, la solution approchée de l'équation différentielle est assez proche d'une rotation (puisque c'est le cas en chaque nœud du maillage comme le montrent les résultats affichés dans les deux dernières colonnes des tableaux).

Enfin, on parvient aux mêmes conclusions que celles du cas où le fil était seulement fixé en 0. En effet, les résultats du matériau élastique souple (matériau 2) sont meilleurs que ceux du matériau synthétique rigide.

La figure 8.3 (respectivement 8.4) illustre le cas où le matériau synthétique rigide (respectivement élastique souple) est fixé aux deux extrémités avec les conditions aux limites $m_h(0) = (0,0,0)$ et $m_h(1) = (0,0,1)$. Notons également la tendance des sections à devenir orthogonales à la ligne moyenne au fur et à mesure

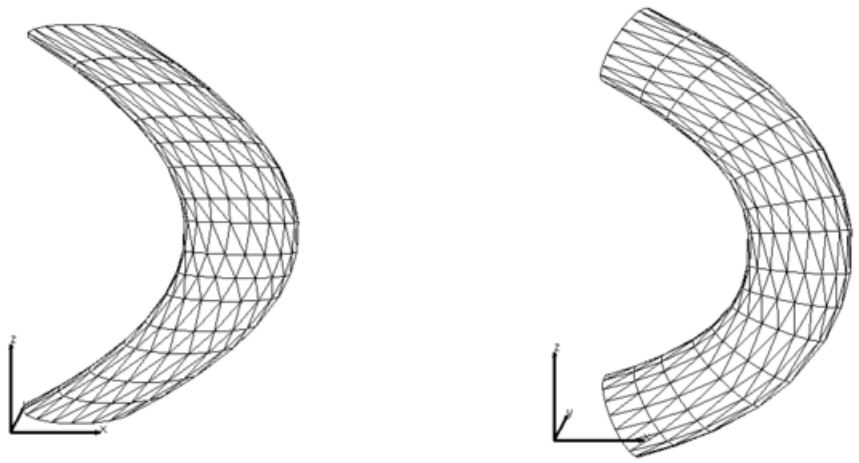

FIG. 8.3 – Cas mécanique, matériau 1 fixé aux deux extrémités, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

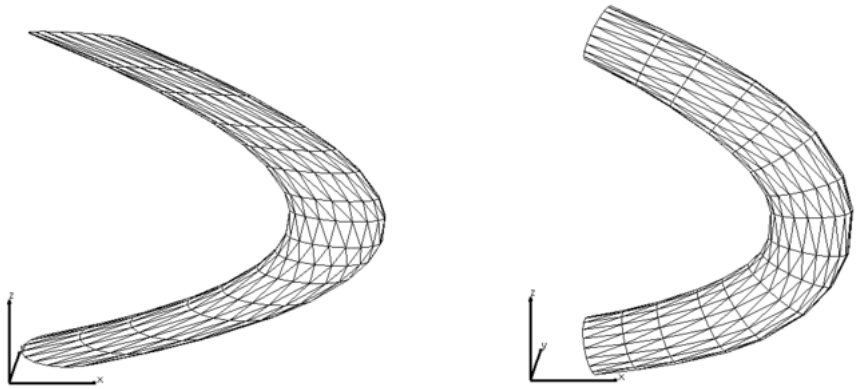

FIG. 8.4 – Cas mécanique, matériau 2 fixé aux deux extrémités, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

de l'évolution temporelle. Ce comportement est cohérent avec le fait que le fil se rapproche de sa condition d'équilibre. En effet, celle-ci est assurée par la condition $R_3 \wedge m' = 0$ (voir Section 7.1.2 du Chapitre 7), ce qui implique que $m'$ est orthogonale à $R_1$ et $R_2$ donc à la section du fil.

On donne un autre exemple avec la condition $m_h(1) = (0,0,0.5)$ autrement dit, on essaie de comprimer le fil en rapprochant ses extrémités. On prend comme précédemment $h_{\text{section}} = 0.1$, $\eta = 10^2$ et $R^0$ donnée par (8.6) avec $\theta = \pi/4$ (pour les deux matériaux), mais des forces volumiques $f = 10^{10}(1.8,0,0)$ pour le matériau 1, et $f = 10^9(1.8,0,0)$ pour le matériau 2. On a les résultats suivants.

| **Cas mécanique, matériau 1 en compression** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\lvert\det(R(T_f)_i) - 1\rvert\right)$ |
| 50 | 3.885E-14 | 3.447E-12 | 0.0000013 |
| 100 | 1.279E-13 | 3.350E-12 | 0.0000013 |
| 200 | 5.801D-13 | 3.211D-12 | 0.0000013 |

| **Cas mécanique, matériau 2 en compression** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\lvert\det(R(T_f)_i) - 1\rvert\right)$ |
| 50 | 6.813E-14 | 7.341E-11 | 0.0000061 |
| 100 | 2.448E-13 | 9.491E-11 | 0.0000069 |
| 200 | 1.062E-12 | 1.079E-10 | 0.0000073 |

On remarque de même que les résultats des deux tableaux correspondants au cas de compression du fil sont satisfaisants, tant au niveau de la minimisation (donnés par « estimation ») qu'à celui de l'évolution (affichés dans les 3ème et 4ème colonnes des tableaux).

Par ailleurs, notons que dans ce cas de compression, c'est le matériau synthétique rigide (matériau 1) qui donne de meilleurs résultats, ce qui n'était le cas ni quand le fil était fixé en 0 ni quand il était fixé aux deux extrémités avec $m_h(1) = (0,0,1)$.

Tous les tableaux ci-dessus correspondaient à une épaisseur du fil égale à 0.1. On termine ce paragraphe en testant le code pour des fils plus minces autrement dit, en prenant par exemple $h_{\text{section}} = 0.001$. On considère les cas où le fil est fixé en 0, et où il est comprimé ($m_h(0) = (0,0,0)$ et $m_h(1) = (0,0,0.5)$), et ce avec les mêmes données que précédemment. Ainsi, on obtient les quatre tableaux suivants.

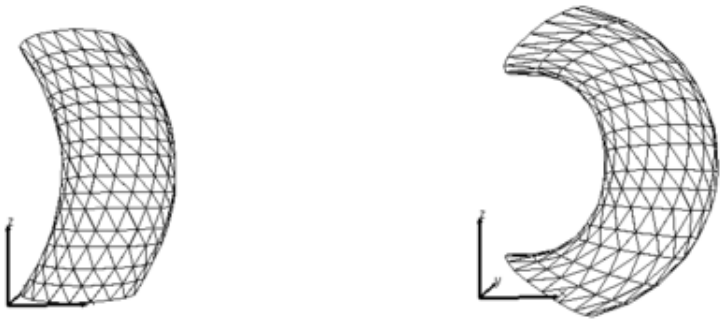

FIG. 8.5 – Cas mécanique, matériau 1 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

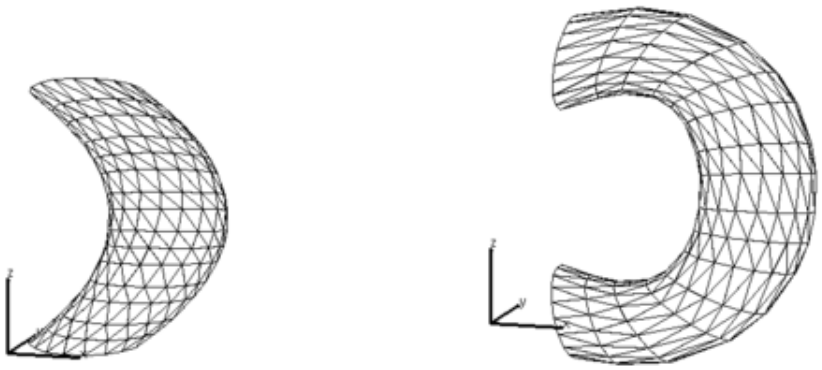

FIG. 8.6 – Cas mécanique, matériau 2 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

| **Cas mécanique, matériau 1 fixé en** $0$**,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 4.331E-09 | 8.941E-13 | 8.441E-11 | 0.0000065 |
| 100 | 1.124E-08 | 4.678E-12 | 7.256E-11 | 0.0000060 |
| 200 | 2.809D-08 | 1.713D-11 | 6.643D-11 | 0.0000058 |

| **Cas mécanique, matériau 2 fixé en** $0$**,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 2.286E-10 | 1.002E-12 | 9.142E-13 | 0.0000007 |
| 100 | 6.522E-10 | 4.995E-12 | 8.502E-13 | 0.0000007 |
| 200 | 1.404D-09 | 1.847D-11 | 8.440D-13 | 0.0000006 |

| **Cas mécanique, matériau 1 en compression,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 7.994E-10 | 1.449E-13 | 3.400E-12 | 0.0000013 |
| 100 | 1.269E-09 | 4.402E-13 | 3.315E-12 | 0.0000013 |
| 200 | 2.359D-09 | 1.576D-12 | 3.190D-12 | 0.0000013 |

| **Cas mécanique, matériau 2 en compression,** $h_{\textbf{section}} = 0.001$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 5.195E-11 | 2.250E-13 | 6.959E-11 | 0.0000059 |
| 100 | 1.180E-10 | 8.640E-13 | 8.966E-11 | 0.0000067 |
| 200 | 3.210D-10 | 3.194D-12 | 1.018D-10 | 0.0000071 |

Le « résidu » dans les quatre tableaux ci-dessus est calculé en norme $L^\infty$. Il correspond donc au terme $\|A_h Z_h - b_h\|_{L^\infty}$. On ne l'avait pas mis dans les tableaux précédents qui correspondaient à $h_{\text{section}} = 0.1$, car son ordre variait entre $10^{-4}$ et $10^{-6}$, alors que l'estimation était au moins de l'ordre de $10^{-12}$.

Par ailleurs, dans le cas où le fil est fixé en 0, on voit (d'après les deux premiers tableaux ci-dessus), que le matériau élastique souple (matériau 2) donne de meilleurs résultats sauf pour les valeurs de l'« estimation » qui sont en fait proches pour les deux matériaux. Par contre, en cas de compression, ce sont les résultats du matériau synthétique rigide (matériau 1) qui sont meilleurs (sauf pour l'« erreur »). On retrouve bien les mêmes conclusions que celles du cas où l'épaisseur du fil était égale à 0.1.

Enfin, en comparant les résultats correspondants aux deux épaisseurs $0,1$ et $0,001$ du fil, on remarque que les résultats sont proches sauf pour le résidu qui est meilleur pour l'épaisseur plus fine. De plus, on peut noter que les résultats du matériau 2 en compression sont légèrement plus satisfaisants au niveau du problème d'évolution pour $h_{\text{section}} = 0.001$.

Les figures 8.7 et 8.9 représentent les configurations initiale et finale du matériau synthétique rigide d'épaisseur 0.001 dans les cas de la fixation à l'origine et de compression respectivement. Les figures 8.8 et 8.10 illustrent les mêmes cas pour le matériau élastique souple d'épaisseur 0.001. Notons que l'affichage de ces quatres figures correspondent à une multiplication de l'épaisseur 0.001 du fil par un facteur de 60 dans le but d'améliorer la visualisation, d'où la notation $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$ dans les légendes des figures. Cette multiplication se fait juste au niveau de l'affichage de la déformation et n'a aucun effet sur les valeurs des erreurs représentées dans les tableux ci-dessus.

**Remarque 8.1.2.** Les figures correspondant à une épaisseur plus fine égale à 0.001 ont le même aspect que celui où $h_{\text{section}} = 0.1$ avec la seule différence normale dans les sections des fils.

**Remarque 8.1.3.** Comme nous l'avons signalé dans la Remarque 1.2.1 du Chapitre 1 de la thèse, P. Neff a montré la convergence en temps grand de la solution du problème tridimensionnel d'évolution vers la partie polaire du gradient de la déformation $F$, quand $F$ est fixé en temps. Pour cette raison, nous avons eu l'idée de calculer numériquement la partie polaire $R_p$ du gradient de la déformation réduit $A_m = (\rho_1 R_1 | \rho_2 R_2 | m')$ dans le but de la comparer à la solution approchée $R$ du problème d'évolution unidimensionnel. Mais, la norme $\|R - R_p\|_{L^\infty}$ trouvée est de l'ordre de $10^{-1}$. Ce qui n'est pas le résultat auquel on s'attendait. Plusieurs explications sont possibles qui demanderont des travaux ultérieurs : la microrotation pourrait converger vers une rotation prenant en compte non seulement la rotation polaire sur la ligne moyenne, mais également dans les sections ; dans le cas couplé, la déformation n'est pas constante ; le splitting peut induire une erreur numérique assez importante à ce niveau.

Passons à l'implémentation du problème couplé thermodynamique.

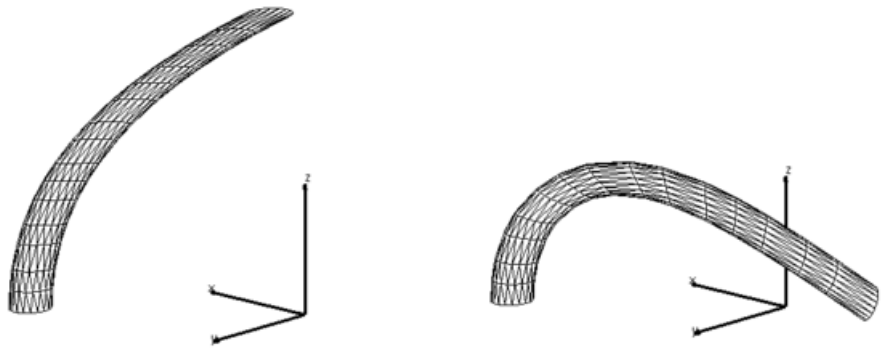

FIG. 8.7 – Cas mécanique, matériau 1 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

FIG. 8.8 – Cas mécanique, matériau 2 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

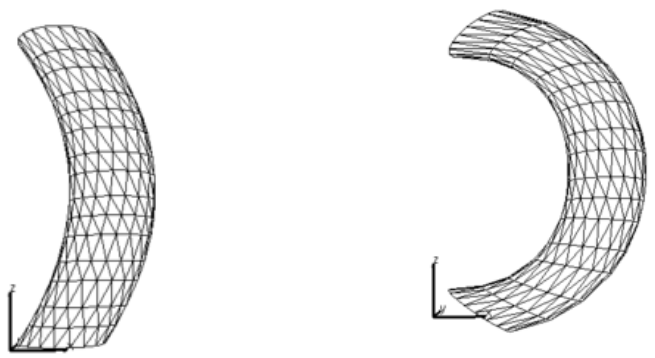

FIG. 8.9 – Cas mécanique, matériau 1 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

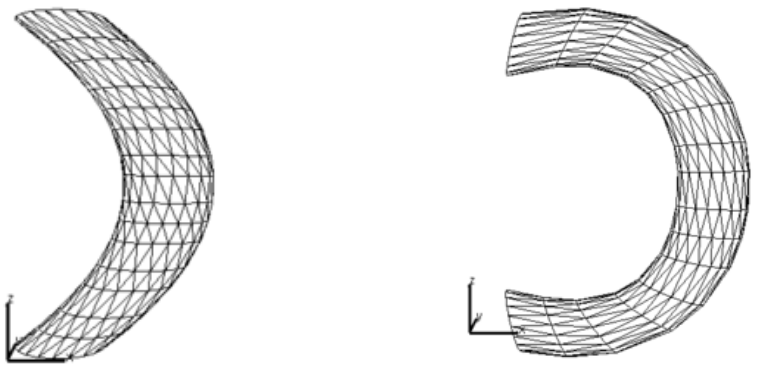

FIG. 8.10 – Cas mécanique, matériau 2 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

## 8.2 Cas thermodynamique

On rappelle que le modèle thermodynamique possède le même problème de minimisation du modèle mécanique dont la formulation variationnelle est donnée par (8.1), et que la différence entre les deux modèles réside dans le problème d'évolution. En fait, il s'agissait dans le cas mécanique d'une équation différentielle ordinaire alors que dans le cas thermodynamique, c'est une équation aux dérivées partielles que l'on souhaite approcher numériquement. On rappelle donc juste l'expression de cette équation différentielle partielle,

$$\frac{\partial}{\partial t}R(t,x_3) = \frac{1}{\eta}\Big(1+\Big\|\frac{\big(\bar{B}_{\text{thermo}}(t,x_3)\big)^a}{\sigma}\Big\|\Big)^2\big(\bar{B}_{\text{thermo}}(t,x_3)\big)^a R(t,x_3), \tag{8.11}$$

où la partie antisymétrique de la matrice $\bar{B}_{\text{thermo}}$ est

$$\begin{aligned}(\bar{B}_{\text{thermo}})^a = {}& (2\mu+3\lambda)(A_m R^T)^a - \mu\big((A_m R^T)^2\big)^a - \lambda\,\mathrm{tr}(A_m R^T)(A_m R^T)^a \\ & - \frac{J_\alpha^h}{a_h}\Big(\mu\big((A_\alpha R^T)^2\big)^a + \lambda\,\mathrm{tr}(A_\alpha R^T)(A_\alpha R^T)^a\Big),\end{aligned} \tag{8.12}$$

avec $A_m = (\rho_1 R_1|\rho_2 R_2|m')$ et $A_\alpha = (0|0|(\rho_\alpha R_\alpha)')$. La résolution numérique de cette équation se fait (comme celle de l'équation différentielle ordinaire du cas mécanique) à l'aide de la primitive « ode » du logiciel Scilab. Le second membre dans ce cas est un peu plus compliqué car il dépend non seulement de $m'_h$ (comme dans le cas mécanique) mais également de $\rho_{\alpha,h}$, $\rho'_{\alpha,h}$ et surtout de $R'_{\alpha,h}$. Pour l'écrire donc comme une fonction ne dépendant que de $R$ (pour pouvoir utiliser « ode »), on suit la même approche du paragraphe précédent, la moyenne, pour l'approximation de $m'_h$ et de $\rho'_{\alpha,h}$. Ayant les valeurs de $m'_h$, $\rho_{\alpha,h}$ et $\rho'_{\alpha,h}$, on utilise le code du problème d'évolution thermodynamique implémenté au Chapitre 7 (dans lequel les dérivées spatiales de $R_\alpha$ sont approchées à partir des valeurs de $R_\alpha$). La seule différence est que dans ce dernier chapitre on se donnait des valeurs à $m'_h$, $\rho_{\alpha,h}$ et $\rho'_{\alpha,h}$ alors qu'ici, ces valeurs ne sont autres que la solution approchée du problème discret de minimisation à chaque pas de temps.

Dans le cas thermodynamique, l'algorithme de résolution s'écrit comme suit :

$R_i^0$ donnée initiale
pour $k = 0,\dots,T/\delta t$
- Résolution du problème de minimisation avec $R_i^k$ comme donnée
- Calcul de $(m_{h,i}^k)'$, $\rho_{h,i}^k$, $(\rho_{h,i}^k)'$
- Résolution de l'équation différentielle sur l'intervalle $(k\delta t,(k+1)\delta t)$ (en approchant les dérivées spatiales $(R_{\alpha,i}^k)'$ à partir des valeurs de $R_{\alpha,i}^k$ aux nœuds)
- $R_i^0 = R_i^{k+1}$

fin

où $T$ est le temps final et $\delta t$ est le pas de temps du splitting.

### 8.2.1 Résultats numériques

#### Conditions aux limites

Étant donné qu'il s'agit, dans le cas thermodynamique, de la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles, on s'est demandé s'il est possible d'imposer des conditions aux limites sur la rotation $R_{\alpha,h}$ et donc sur les coefficients $\rho_{\alpha,h}$ (données par les équations de la Section 3.1.1 du Chapitre 3), et non seulement sur la ligne moyenne $m_h$ comme c'était le cas du modèle mécanique. La réponse est négative car on obtient toujours des couches limites. De plus, le rayon des sections intérieures devient, au cours des itérations, beaucoup plus grand que celui des sections aux extrémités. D'où l'idée de se débarasser des coefficients $\rho_{\alpha,h}$(étant ceux qui prennent en compte l'effet du poisson dans la section) autrement dit, on considère un nouveau Ansatz cinématique dans lequel les vecteurs directeurs sont supposés orthonormés :

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = m(x_3) + R_\alpha(x_3)x_\alpha \tag{8.13}$$

avec la sommation d'Einstein. Ainsi, on obtient un nouveau problème de minimisation dont l'étude mathématique est faite au Chapitre 5 et dont l'inconnue n'est que la ligne moyenne du fil. La formulation variationnelle associée à ce problème simplifié est donnée par

$$\begin{aligned}\int_0^1 a_h\big(\mu(m'\cdot n') + (\mu+\lambda)(R_3\cdot m')(R_3\cdot n')\big)\,dx_3 \\ = \int_0^1 \big((2\mu+3\lambda)a_h R_3\cdot n' + f_r\cdot n\big)\,dx_3 + g_r\cdot n(1).\end{aligned} \tag{8.14}$$

L'implémentation de ce problème de minimisation se déduit facilement de celle du cas général correspondant à la présence des $\rho_\alpha$.

On résout donc numériquement le problème couplé thermodynamique en imposant des conditions aux limites de type Dirichlet sur la rotation et sur la ligne moyenne (aux deux extrémités). Notons qu'en prenant compte de ces conditions aux limites, la formulation variationnelle (8.14) devient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 a_h\big(\mu(\tilde{m}'\cdot n') + (\mu+\lambda)(R_3\cdot \tilde{m}')(R_3\cdot n')\big)\,dx_3 \\ &= \int_0^1 \big((2\mu+3\lambda)a_h R_3\cdot n' + f_r\cdot n - \mu a_h m(1)\cdot n' - (\mu+\lambda)a_h(R_3\cdot m(1))(R_3\cdot n')\big)\,dx_3.\end{aligned}$$

avec $\tilde{m}(x_3) = m(x_3) - m(1)x_3 \in H_0^1(\mathbb{R}^3)$. Au début du calcul, les résultats sont meilleurs que ceux du cas général mais au bout d'une cinquantaine d'itérations un phénomène de couche limite réapparaît (figures 8.11). On en déduit donc qu'il est encore préférable de laisser les rotations libres aux extrémités du fil.

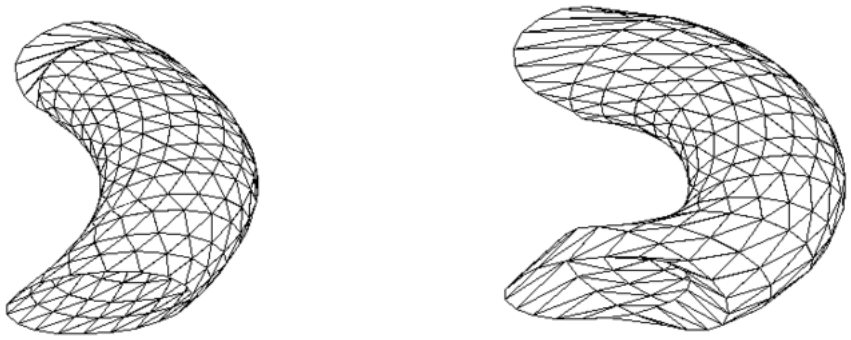

FIG. 8.11 – Cas thermodynamique simplifié, matériau 1 encastré (CL sur $R$ et $m$), configurations intiale (à gauche) et finale (à droite).

**Remarque 8.2.1.** On retrouve le même type de conditions aux limites de notre modèle mécanique unidimensionnel et de celui de P. Neff. En effet, P. Neff n'a traité que le modèle mécanique bidimensionnel dans lequel il n'impose des conditions aux limites que sur la surface moyenne $m$.

**Remarque 8.2.2.** On a introduit le modèle thermodynamique simplifié correspondant à l'absence des coefficients $\rho_\alpha$ dans le but de savoir s'il est possible d'encastrer le fil (en imposant des conditions aux limites sur $m$, $R_\alpha$ et $\rho_\alpha$). Mais comme on vient de s'apercevoir que cela n'est pas le cas, on considère dans toute la suite de ce chapitre le problème couplé thermodynamique général (dans lequel les $\rho_\alpha$ sont présents).

Nous donnons quelques résultats numériques dans le cas thermodynamique pour lesquels on laisse libres les coefficients décrivant la déformation de la section et les rotations aux extrémités, et on n'impose donc des conditions aux limites que sur $m_h$ (comme on l'avait fait pour le modèle mécanique). On prend les mêmes données que celles du cas mécanique pour pouvoir par la suite comparer les deux modèles.

**Remarque 8.2.3.** Dans le cas mécanique, le caractère visqueux apparaissait à partir du terme $\eta$ qu'on avait pris égal à $10^2$ Pa. Pour garder le même ordre de grandeur, on prend $\eta = 10^{11}$ Pa pour le cas thermodynamique. En effet, le matériau élastique souple a des constantes de Lamé de l'ordre de $10^9$. Ainsi, le second membre de l'équation aux dérivées partielles (8.11) devient de l'ordre de $10^{-2}$ en prenant $\sigma = 10^9$ (avec $\eta = 10^{11}$). On fixe alors dans toute la suite $\eta = 10^{11}$ Pa.

Par ailleurs, on prend $\sigma$ du même ordre que les constantes de Lamé du matériau en question. Plus précisément dans tout ce qui suit, on fixe $\sigma = 10^{10}$ Pa pour le matériau 1 alors qu'on prend $\sigma = 10^9$ Pa pour le matériau 2.

Dans le cas de la fixation du fil au point $x_3 = 0$, on prend $h_{section} = 0.1$ et une rotation initiale de la forme

$$R^0 = (R^0(x_0)|\dots|R^0(x_{N+1})),$$

avec

$$R^0(x_i) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}x_i) & -\sin(\frac{\pi}{3}x_i) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{3}x_i) & \cos(\frac{\pi}{3}x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que l'on note, pour alléger l'écriture, $x_i$ au lieu de $x_3(i)$ les points du maillage. On applique les mêmes forces que celles du cas mécanique. Ainsi, pour le matériau synthétique rigide (matériau 1), les forces sont $f = 2.5 * 10^9(1,1,1)$ et $g = -2.5 * 10^9(1,1,1)$, alors que pour le matériau élastique souple (matériau 2), on a $f = 2.5 * 10^{10}(1,1,1)$ et $g = -2.5 * 10^{10}(1,1,1)$. Avec ces données, on obtient respectivement les deux tableaux suivants.

| **Cas thermodynamique, Matériau 1 fixé à l'origine** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\lvert\det(R(T_f)_i) - 1\rvert\right)$ |
| 50 | 2.865E-13 | 1.687E-12 | 0.0000009 |
| 100 | 1.257E-12 | 1.725E-12 | 0.0000009 |
| 200 | 6.938D-12 | 1.726D-12 | 0.0000009 |

| **Cas thermodynamique, Matériau 2 fixé à l'origine** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\lvert\det(R(T_f)_i) - 1\rvert\right)$ |
| 50 | 2.985E-13 | 5.378E-13 | 0.0000005 |
| 100 | 1.408E-12 | 5.432E-13 | 0.0000005 |
| 200 | 7.135D-12 | 5.441D-13 | 0.0000005 |

Comme dans le cas mécanique, « estimation » (affichée dans les tableaux ci-dessus), correspond à la valeur du quotient

$$\frac{\mathrm{cond}(A_h)\,|A_h Z_h - b_h|}{\sqrt{\dim Z_h}\,\|A_h\|}$$

qui permet d'estimer la différence entre la solution exacte et la solution approchée du système discret $A_h Z_h = b_h$. De plus, la solution $R(T_f)$ de l'équation différentielle approchée est obtenue à l'instant final $T_f = 300$, et est une matrice de taille

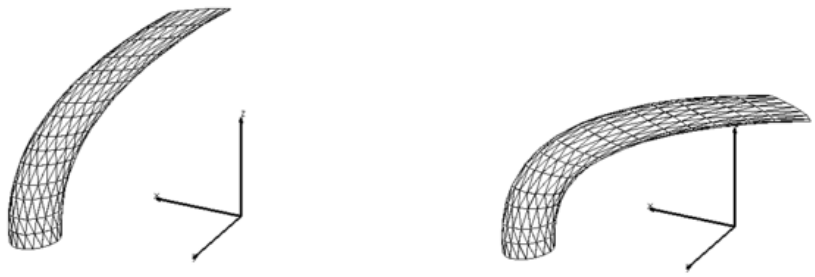

FIG. 8.12 – Cas thermodynamique, matériau 1 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

FIG. 8.13 – Cas thermodynamique, matériau 2 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

$3 \times 3(N+2)$. Le but est que les $N+2$ blocs (de taille $3 \times 3$ chacun) de cette matrice soient assez proches d'une rotation, ce que montrent bien les résultats ci-dessus.

Remarquons que les résultats du matériau élastique souple sont meilleurs que ceux du matériau synthétique rigide, ce qui était aussi le cas pour le modèle mécanique.

Dans le cas où le fil est fixé aux deux extrémités avec la condition de Dirichlet non homogène $(0,0,b)$ en $x_3 = 1$, il se déforme peu pour $b = 1$. Pour cette raison, on ne considérera que le cas en compression correspondant à $b = 0.5$. On prend les mêmes données que celles du modèle mécanique autrement dit, on a $f = 10^{10}(1.8,0,0)$ pour le matériau synthétique rigide (matériau 1), et $f = 10^{9}(1.8,0,0)$ pour le matériau elastique souple (matériau 2), une rotation initiale égale à

$$R^0 = (R^0(x_0)|\dots|R^0(x_{N+1})),$$

avec

$$R^0(x_i) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}x_i) & -\sin(\frac{\pi}{4}x_i) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}x_i) & \cos(\frac{\pi}{4}x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et $h_{\text{section}} = 0.1$ (pour les deux matériaux). On obtient ainsi les résultats suivants.

| **Cas thermodynamique, Matériau 1 en compression** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\lvert\det(R(T_f)_i) - 1\rvert\right)$ |
| 50 | 8.823E-14 | 2.379E-12 | 0.0000011 |
| 100 | 3.144E-13 | 2.352E-12 | 0.0000011 |

| **Cas thermodynamique, Matériau 2 en compression** | | | |
|---|---|---|---|
| N | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\lvert\det(R(T_f)_i) - 1\rvert\right)$ |
| 50 | 3.513E-14 | 2.039E-13 | 0.0000003 |
| 100 | 1.337E-13 | 1.446E-14 | 8.503E-08 |
| 200 | 5.009E-13 | 1.519E-14 | 8.714E-08 |

**Remarque 8.2.4.** Nous n'avons pas fait figurer les résultats pour $N = 200$ dans le cas où le matériau synthétique rigide (matériau 1) est en compression, car le fil se tord aux extrémités et ceci au bout des dernières itérations. Ce comportement peut-être lié au fait que le modèle est mieux approprié pour des fils de faible résistance à la flexion. Il est donc mieux adapté au matériau élastique souple qu'au matériau synthétique rigide. En effet, ce dernier a des constantes de Lamé plus grandes et résiste donc plus à la flexion.

**Remarque 8.2.5.** Le modèle étant mieux adapté aux fils minces, on a eu l'idée de comprimer un matériau synthétique rigide dont l'épaisseur est plus fine et égale à 0.001 (au lieu de 0.1 correspondant au tableau ci-dessus) tout en prenant $N = 200$. Les résultats sont meilleurs comme on le verra plus tard (voir figure 8.20).

De ces deux tableaux, on tire les mêmes conclusions que précédemment. Plus précisément, c'est le matériau élastique souple qui donne de meilleurs résultats (ce qui joint aussi le cas mécanique).

Comme on a fait pour le modèle mécanique, on présente des résultats correpondants à une épaisseur plus fine du fil et égale à $h_{\text{section}} = 0.001$, et ce avec les mêmes forces qu'on a appliquées précédemment (pour $h_{\text{section}} = 0.1$).

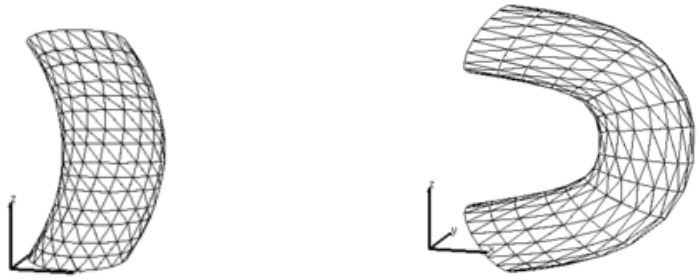

FIG. 8.14 – Cas thermodynamique, matériau 1 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

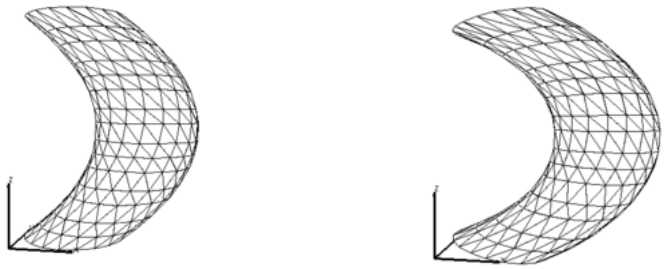

FIG. 8.15 – Cas thermodynamique, matériau 2 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.1$.

| **Cas thermodynamique, Matériau 1 fixé à l'origine, $h_{\text{section}} = 0.001$** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 4.840E-09 | 1.059E-12 | 1.609E-12 | 0.0000009 |
| 100 | 1.247E-08 | 4.202E-12 | 1.608E-12 | 0.0000009 |
| 200 | 2.236E-08 | 1.809E-11 | 1.6074E-12 | 8.964E-07 |

| **Cas thermodynamique, Matériau 2 fixé à l'origine, $h_{\text{section}} = 0.001$** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 1.977E-10 | 8.366E-13 | 5.215E-13 | 0.0000005 |
| 100 | 4.250E-10 | 3.637E-12 | 5.252E-13 | 0.0000005 |
| 200 | 1.157E-09 | 1.641E-11 | 5.305E-13 | 5.1504E-07 |

| **Cas thermodynamique, Matériau 1 en compression, $h_{\text{section}} = 0.001$** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 1.415E-09 | 2.757E-13 | 2.838E-12 | 0.0000012 |
| 100 | 2.719E-09 | 1.059E-12 | 2.788E-12 | 0.0000012 |
| 200 | 4.677E-09 | 4.498E-12 | 2.732E-12 | 1.169E-06 |

| **Cas thermodynamique, Matériau 2 en compression, $h_{\text{section}} = 0.001$** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | résidu | estimation | $\max \|R^T(T_f)_i R(T_f)_i - I_3\|^2$ | $\max\left(\|\det(R(T_f)_i) - 1\|\right)$ |
| 50 | 3.701E-11 | 1.210E-13 | 1.297E-14 | 8.053E-08 |
| 100 | 6.085E-11 | 4.012E-13 | 1.436E-14 | 8.474E-08 |
| 200 | 1.511E-10 | 1.668E-12 | 1.507E-14 | 8.679E-08 |

On rappelle que le « résidu » n'est autre que $\|A_h Z_h - b_h\|_{L^\infty}$ et il n'est pas affiché dans le cas où $h_{\text{section}} = 0.1$. En effet, la valeur de l'« estimation » était dans ce cas beaucoup plus intéréssante puisqu'elle était beaucoup plus petite que celle du résidu.

On remarque de même d'après les quatre tableaux ci-dessus, que le matériau élastique souple (matériau 2) donne de meilleurs résultats dans les cas où le fil est fixé en 0 et aux deux extrémités.

En comparant les résultats de l'épaisseur 0.1 à ceux de l'épaisseur 0.001, on retrouve les mêmes conclusions du modèle mécanique. En effet, les résultats sont proches sauf pour le résidu, et ce sont ceux du matériau élastique souple en compression qui sont plus satisfaisants (au sens où les erreurs sont plus petites) pour une épaisseur plus fine.

On termine ce paragraphe par une comparaison des deux modèles mécanique et thermodynamique, et ce pour une épaisseur du fil égale à 0.001. Tout d'abord, on remarque que les résultats du matériau élastique souple dans le cas thermodynamique sont plus satisfaisants que ceux du modèle mécanique, et ce quand le fil est fixé à l'origine et aux deux extrémités (en compression). Pour ce qui concerne le matériau synthétique rigide, il donne de meilleurs résultats au niveau du problème de minimisation (affichés par résidu et estimation) dans le cas mécanique. Par contre, au niveau du problème d'évolution, ce sont les résultats du cas thermodynamique qui sont meilleurs.

Enfin, comme les résultats du matériau élastique souple dans le cas thermodynamique sont plus satisfaisants (au sens où les erreurs affichées dans les tableaux sont plus petites) que ceux du matériau synthétique rigide, et ce quand le fil est fixé à l'origine et est comprimé, on en déduit donc que ce modèle est mieux adapté aux fils minces de faible résistance à la flexion.

Les figures 8.16 et 8.18 représentent le matériau synthétique rigide d'épaisseur 0.001 aux états initial et et final et ce dans les cas de la fixation à l'origine et de compression respectivement. Les figures 8.17 et 8.19 illustrent les memes cas pour le matériau élastique souple d'épaissuer 0.001. Notons que l'affichage de ces quatres figures correspondent à une multiplication de l'épaisseur 0.001 du fil par un facteur de 60 dans le but d'améliorer la visualisation (comme dans le cas mécanique). Cette multiplication se fait juste au niveau de l'affichage de la déformation et n'a aucun effet sur les valeurs des erreurs représentées dans les tableux ci-dessus.

La figure 8.20 illustre les configurations initiale et finale ($T_f = 300$) du matériau synthétique rigide en compression dont l'épaisseur est égale à 0.001 et ce pour un maillage à 200 nœuds. On voit bien qu'à la configuration initiale, le fil ne se tord pas comme c'était le cas pour l'épaisseur 0.1.

**Remarque 8.2.6.** Des films ont été réalisés pour les deux modèles viscoélastiques, mécanique et thermodynamique, et se trouvent sur le lien suivant

$$www.ann.jussieu.fr/\sim beyrouthy/sujets.html.$$

Ces films correspondent aux matériaux synthétique rigide et élastique souple, d'épaisseur 0.001 fixés à l'origine et aux deux extrémités (en compression).

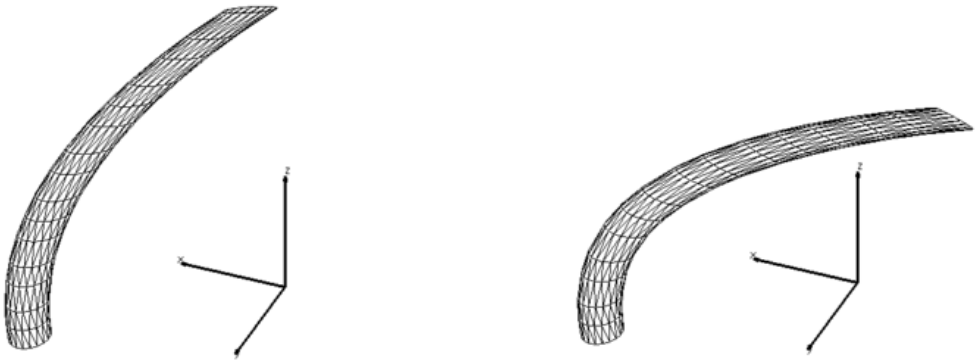

FIG. 8.16 – Cas thermodynamique, matériau 1 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

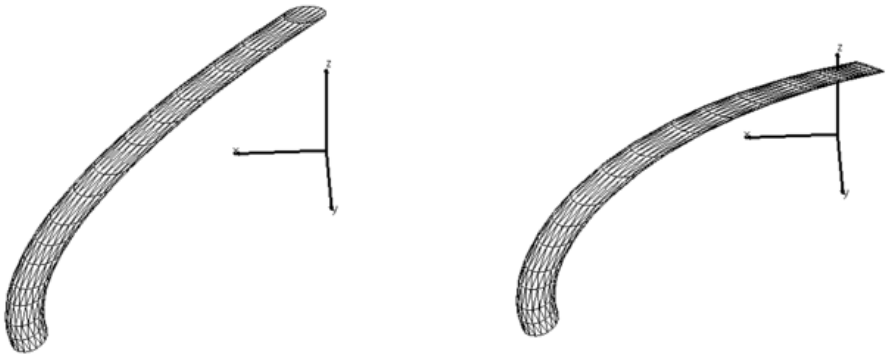

FIG. 8.17 – Cas thermodynamique, matériau 2 fixé à l'extrémité 0, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

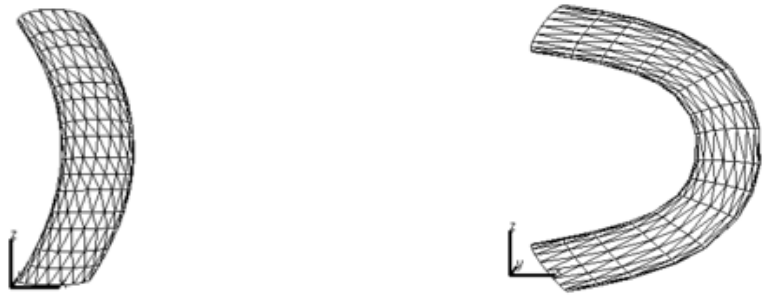

FIG. 8.18 – Cas thermodynamique, matériau 1 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

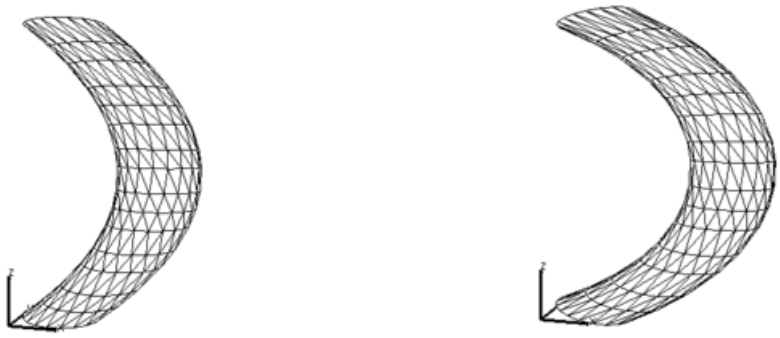

FIG. 8.19 – Cas thermodynamique, matériau 2 en compression, configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

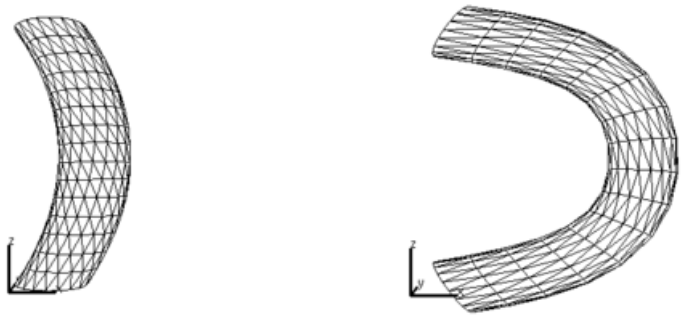

FIG. 8.20 – Cas thermodynamique, matériau 1 en compression ($N = 200$), configurations intiale (à gauche) et finale (à droite), $h_{\text{section}} = 0.001$ et $h_{\text{affichage}} = 60 * h_{\text{section}}$.

# Conclusion et perspectives

# Conclusion et perspectives

Dans la première partie de la thèse, nous avons réduit deux modèles tridimensionnels viscoélastiques en grandes déformations, le modèle mécanique et le modèle thermodynamique, en deux modèles unidimensionnels. Cette réduction 3D-1D a été basée sur l'Ansatz de Cosserat et obtenue essentiellement en moyennant sur la section du fil. Les modèles tridimensionnels ont été introduits par P. Neff qui s'est intéressé à la réduction 3D-2D. L'approche que nous avons proposée pour le passage 3D-1D est différente de celle de P. Neff. Elle consiste en effet à minimiser l'énergie non seulement par rapport à la déformation de la ligne moyenne du fil mais également par rapport aux normes des vecteurs directeurs décrivant la déformation de ses sections. Nous avons montré que le modèle mécanique réduit est bien posé.

En vue de développements futurs outre la considération d'Ansätze cinématiques plus généraux, nous souhaitons changer d'approche. En fait, il serait intéressant de réduire le modèle tridimensionnel viscoélastique à l'aide d'un développement asymptotique formel, en suivant par exemple les travaux de Alvarez-Dios et Viaño [5], Bermudez et Viaño [13], Trabucho et Viaño [41] et les travaux plus récents de Meunier [30]. Nous pourrions penser à l'autre approche asymptotique qui repose sur la méthode de la $\Gamma-$convergence en s'inspirant des travaux de Acerbi, Buttazzo et Percivale [1]. Mais il reste à voir s'il est possible d'étendre cette méthode aux problèmes dépendant du temps.

Par ailleurs, il serait également intéressant d'étudier la stabilité globale en temps du problème d'évolution, plus précisément de voir si la dynamique du système tridimensionnel converge vers la dynamique réduite pour les temps longs (voir [26]).

La seconde partie de la thèse est consacrée à la résolution numérique des deux modèles réduits, mécanique et thermodynamique. Nous avons testé le code pour un matériau synthétique rigide et pour un matériau élastique souple. Les résultats numériques nous permettent de conclure que c'est le matériau élastique souple dans le cas thermodynamique avec fixation de la ligne moyenne du fil à l'origine et aux deux extrémités qui donnent de meilleurs résultats au sens où il produit des erreurs plus petites. On peut en déduire que le modèle thermodynamique est mieux adapté aux fils minces de faible résistance à la flexion. Le même type de conclusion peut être retiré pour le modèle mécanique. Une remarque supplémentaire sur les résultats numériques de ces deux modèles se repose sur le fait que, dans le cas de la fixation de la ligne moyenne juste à l'origine, les matériaux résistent beaucoup plus dans le

cas thermodynamique que dans le cas mécanique. Par conséquent, nous souhaitons conclure que le modèle thermodynamique est le plus visqueux.

Finalement, il faut noter que l'on ne dispose pas de solution exacte de référence pour la solution des équations différentielles ordinaire (dans le cas mécanique) et partielle (dans le cas thermodynamique). Il faudrait alors chercher les points d'équilibre des problèmes couplés des points de vue théorique et numérique lesquels pourraient nous donner une idée de l'allure de la courbe représentative de la solution.

L'aspect analyse numérique des schémas proposés n'a pas été abordé dans ce travail. C'est également un axe de développements futurs avec des améliorations possibles en termes de précision et de performance.

# Bibliographie

# Bibliographie


[1] E. ACERBI, G. BUTTAZZO AND D. PERCIVALE. *A variational definition of the strain energy for an elastic string*, J. Elasticity **25** (1991), no. 2, 137–148.

[2] R.A. ADAMS. *Sobolev spaces*, Academic Press, New York-London, 1975.

[3] I. AGANOVIĆ, J. TAMBAČA AND Z. TUTEK. *Derivation of the model of elastic curved rods from three-dimensional micropolar elasticity*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **53** (2007), no. 2, 109–133.

[4] I. AGANOVIĆ, J. TAMBAČA AND Z. TUTEK. *Derivation and justification of the models of rods and plates from linearized three-dimensional micropolar elasticity*, J. Elasticity **84** (2006), no. 2, 131–152.

[5] J.A. ALVAREZ-DIOS AND J.M. VIAÑO. *An asymptotic bending model for a general planar curved rod*, Univ. Santiago de Compostela (1997), 11–15.

[6] S. ANICIC, H. LE DRET AND A. RAOULT. *The infinitesimal rigid displacement lemma in Lipschitz co-ordinates and application to shells with minimal regularity*, Math. Methods Appl. Sci. **27** (2004), no. 11, 1283–1299.

[7] S. ANTMAN. *Nonlinear Problems of Elasticity*, Second edition. Applied Mathematical Sciences, **107**. Springer, New York, 2005.

[8] S. ANTMAN. *Nonlinear Problems of Elasticity*, Applied Mathematical Sciences, **107**. Springer-Verlag, New York, 1995.

[9] J.M. BALL. *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **63** (1976/77), no. 4, 337–403.

[10] J. BEYROUTHY. *Réduction 3D-1D d'un modèle viscoélastique en grandes déformations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), no. 4, 239–243.

[11] J. BEYROUTHY AND H. LE DRET. *A large deformation, viscoelastic, thin rod model : derivation and analysis.* In preparation.

[12] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[13] A. BERMUDEZ AND J.M. VIAÑO. *Une justification des équations de la thermoélasticité des poutres à section variable par des méthodes asymptotiques*, Analyse Numérique **18** (1984), no. 4, 347–376.

[14] P.G. CIARLET. *Elasticité tridimensionnelle*, Recherches en Mathématiques Appliquées, 1. Masson, Paris, 1986.

[15] P.G. CIARLET. *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity. Studies in Mathematics and its Applications*, 20. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[16] P.G. CIARLET. *Mathematical elasticity. Vol. II. Theory of plates*, North Holland, Amsterdam, 1997.

[17] P.G. CIARLET. *Introduction to linear shell theory*, Series in Applied Mathematics, 1, Gauthier-Villars, Paris, 1998.

[18] H. COHEN AND C.-C. WANG. *A mathematical analysis of the simplest direct models for rods and shells*, Arch. Rational Mech. Anal. **108** (1989), no. 1, 35–81.

[19] E. COSSERAT AND F. COSSERAT. *Théorie des corps déformables*, Librairie Scientifique A.Hermann, Paris, 1909.

[20] B. DACOROGNA. *Direct methods in the calculus of variations*, Applied Mathematical Sciences, 78. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[21] W. DIEPOLDER, V. MANNL. AND H. LIPPMANN. *The Cosserat continuum, a model for grain rotations in metals ?*, International journal of plasticity, **7** (1991), no. 4, 313–328.

[22] A.E. GREEN, P.M. NAGHDI. AND W.L. WAINWRIGHT. *A general theory of a Cosserat surface*, Arch. Rational Mech. Anal. **20** (1965), 287–308.

[23] A.E. GREEN AND N. LAWS. *A general theory of rods*, Proc. Royal Soc. Lond. Series A. **293** (1966), 145–155.

[24] J. GARRIGUES. *Fondements de la mécanique des milieux continus*, Hermes, 2007.

[25] M.E. GURTIN. *An introduction to continuum mechanics*, Mathematics in Science and Engineering, 158. New York-London, 1981.

[26] J.K. HALE AND G.RAUGEL. *Reaction-diffusion equation on thin domains*, J. Math. Pures Appl. **9** (1992), 33–95.

[27] D. LACHNER, H. LIPPMANN AND L.S. TOTH. *On Cosserat plasticity and plastic spin for isotropic materials*, Archives of Mechanics. **46** (1994), 531–539.

[28] P. LE TALLEC. *Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity*, Handbook of numerical analysis, Vol. III, 465–622, Handb. Numer. Anal., III, North-Holland, Amsterdam, 1994.

[29] J.-L. LIONS. *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 323. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973

[30] N. MEUNIER. *Modélisation de fils en élasticité tridimensionnelle.* Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie-Curie, paris, 2003.

[31] P. NEFF. *Finite multiplicative plasticity for small elastic strains with linear balance equations and grain boundary relaxation*, Contin. Mech. Thermodyn. **15** (2003), no. 2, 161–195.

[32] P. NEFF. *Local existence and uniqueness for a geometrically exact membrane-plate with viscoelastic transverse shear resistance*, Math. Methods Appl. Sci. **28** (2005), no. 9, 1031–1060.

[33] P. NEFF. *A geometrically exact viscoplastic membrane-shell with viscoelastic transverse shear resistance avoiding degeneracy in the thin-shell limit. Part I : The viscoelastic membrane-plate*, Z. Angew. Math. Phys. **56** (2005), no. 1, 148–182.

[34] P. NEFF. *On Korn's first inequality with non-constant coefficients*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **132** (2002), no. 1, 221–243.

[35] P. NEFF AND K. WEINBERG. *A geometrically exact thin membrane model-investigation of large deformations and wrinkling*, Submitted to : International Journal of Numerical Mechanics in Engineering.

[36] O. PANTZ. *Quelques problèmes de modélisation en élasticité non linéaire.* Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie-Curie, paris, 2001.

[37] J.C. SIMO AND L. VU QUOC. *Three Dimensional Finite Strain Rod Model Part II : Computational Aspects*, EECS Department, University of California, Berkeley, 1985.

[38] J.C. SIMO AND L. VU-QUOC. *On the dynamics of flexible beams under large overall motions, the plane case : Part I and Part II*, ASME Journal of Applied Mechanics, **53** (1986), 849–863.

[39] J.C. SIMO AND L. VU-QUOC. *The role of nonlinear theories in transient dynamics analysis of flexible structures*, Journal of Sound and Vibration, **119** (1986), no.3, 487–508.

[40] J.C. SIMO AND L. VU-QUOC. *A geometrically-exact beam model incorporating shear and torsion warping deformation*, International Journal of Solids and Structures, **27** (1991), no.3, 371–393.

[41] L. TRABUCHO AND J.M VIAÑO. *Mathematical modelling of rods*, Handbook of numerical analysis, Vol. IV, 487–974, North-Holland, Amsterdam, 1996.

# Résumé

Dans la première partie de cette thèse, nous présentons une réduction dimensionnelle 3D-1D pour deux modèles viscoélastiques en grandes déformations, mécanique et thermodynamique, introduits par P. Neff. Notre réduction est effectuée à l'aide d'un Ansatz de Cosserat qui est basé sur l'introduction de vecteurs directeurs. Les problèmes unidimensionnels sont des problèmes couplés minimisation/évolution. L'étude mathématique, l'existence et l'unicité de la solution, n'a été faite que pour le problème réduit mécanique en raison de sa complexité dans le cas thermodynamique. Par contre, la seconde partie de ce travail est consacrée à la résolution numérique des deux modèles, faite par une méthode de splitting. On commence par approcher le problème de minimisation par une méthode des éléments finis de Lagrange de type $\mathbb{P}_1$. Ensuite la solution de ce problème sert à résoudre d'un pas de temps le problème d'évolution (une équation différentielle ordinaire dans le cas mécanique et une équation aux dérivées partielles dans le cas thermodynamique). Enfin, les deux modèles satisfont le principe d'indifférence matérielle.



**Mots-clés :** réduction dimensionnelle, fils minces, viscoélasticité non linéaire, minimisation d'énergie, calcul des variations, méthode des éléments finis.



# Abstract

The first part of this thesis is concerned with a Cosserat-based 3D-1D dimensional reduction for two viscoelastic finite strain models, called mechanical and thermodynamic ones, introduced by P. Neff. The two reduced models are coupled minimization/evolution problems. We only establish the existence and uniqueness of the solution of the mechanical coupled problem. On the other hand, the second part of this work is concerned with the numerical resolution of both reduced viscoelastic models. This resolution is based on a splitting method. We start by approximating the minimization problem using the finite element method with $\mathbb{P}_1$ Lagrange elements. Then the solution of this problem allows us within each time step to solve the evolution problem (an ordinary differential equation for the mechanical problem and a partial differential equation for the thermodynamic one). Finally, note that the two reduced 1D models preserve observer invariance.



**Keywords :** dimension reduction, rods, nonlinear viscoelasticity, energy minimization, calculus of variations, finite elements method.