

In diesem Artikel berichten die Autoren, wie sie vor kurzem eine neue grundlegende Ungleichung entdeckt haben, mit der sich sowohl eine der fundamentalen Ungleichungen der Elektromagnetostatik als auch die der Elastoplastizität als Spezialfälle beschreiben lassen.

Eine Fusion in der Mathematik

Über das Verschmelzen zweier Kerngebiete der Angewandten Mathematik

Von Patrizio Neff und Dirk Pauly

Die Elektromagnetostatik als Teilgebiet der Elektrodynamik und die Elastoplastizität als Teilgebiet der Mechanik sind auf den ersten Blick zwei vollkommen unterschiedliche physikalische Phänomene und werden auch wissenschaftlich getrennt untersucht. So gibt es auf beiden Gebieten ausgewiesene Experten, die sich, sei es aus mathematischer, physikalischer oder ingenieurwissenschaftlicher Sicht, mit dem jeweiligen Phänomen beschäftigen. Interessant wird es, wenn zwischen scheinbar voneinander unabhängigen Theorien plötzlich ein Zusammenhang sichtbar wird, wenn zwei Theorien zumindest teilweise durch eine übergeordnete Theorie beschrieben werden können.

In diesem Artikel berichten wir, wie wir vor kurzem eine neue grundlegende Ungleichung entdeckt haben, mit der sich sowohl eine der

fundamentalen Ungleichungen der Elektromagnetostatik als auch die der Elastoplastizität als Spezialfälle beschreiben lassen.

Dazu führen wir kurz in die mathematischen Gebiete der Maxwell'schen Gleichungen (Elektromagnetismus) und der Elastoplastischen Theorie ein und beschreiben die Bedeutung der jeweiligen fundamentalen Ungleichungen. Danach stellen wir unsere neue fundamentale Ungleichung vor und formulieren ein neues Elastoplastisches Modell, zu dessen Lösungstheorie unsere neue Ungleichung benötigt wird.

Die Maxwell'schen Gleichungen

James Clerk Maxwell formulierte die nach ihm benannten Gleichungen zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene um 1864. Die Maxwell'schen Gleichungen stellen

eines der bedeutendsten Systeme der Mathematischen Physik dar.

Sie beschreiben die Interaktion zwischen elektrischen und magnetischen Feldern sowie deren Wechselwirkung mit Materie und liefern somit ein mathematisches Modell



(1) James Clerk Maxwell (* 13. Juni 1831 in Edinburgh; † 5. November 1879 in Cambridge).

Quelle: Wikipedia



Patrizio Neff. Foto: Max Greve

einer der vier fundamentalen Wechselwirkungskräfte. Elektromagnetische Felder oder Wellen, wie zum Beispiel Licht, Röntgenstrahlen oder die Infrarotstrahlen einer Fernbedienung, sind allgegenwärtig. Sie treten heutzutage generell in elektronischen Geräten wie Computern oder Smartphones, in der Medizintechnik (MRT) oder in Autos und Flugzeugen, kurz gesagt in elektrischen Maschinen auf.

Auch die berühmten Polarlichter entstehen beispielsweise durch die Abgabe elektromagnetischer Strahlung bei dem Eintritt geladener Teilchen der Sonne in die Erdatmosphäre entlang der Feldlinien des Erdmagnetfeldes. Dieses ist nämlich an den Polen gerade senkrecht zur Erdoberfläche und ermöglicht dadurch den Eintritt der Teilchen in die Atmosphäre. All diese physikalischen Phänomene und noch viele mehr lassen sich durch die Maxwell'schen Gleichungen beschreiben.

Eine vereinfachte Form dieses Systems liefert auch ein Modell für die Ausbreitung akustischer Wellen. So kann beispielsweise die Schallbelastung in der Fahrgastzelle eines Automobils durch dieses System mathematisch beschrieben und dann auch minimiert werden.

Maxwell erkannte wohl als Erster die Symmetrie zwischen elektrischem und magnetischem Feld (Symmetrie bis auf die Tatsache, dass es keine magnetischen Ladungen und Ströme gibt):

Ein sich zeitlich änderndes elektrisches (magnetisches) Feld erzeugt ein magnetisches (elektrisches) Wirbelfeld.

Der vollständige differentielle Feldgleichungssatz (ohne Randbedingungen) lautet

$$-\text{rot } H + \partial_t D = J, \quad (1a)$$

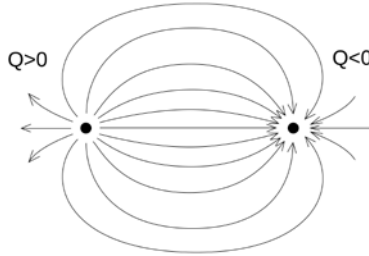
$$\text{rot } E + \partial_t B = 0, \quad (1b)$$

$$\text{div } D = \rho, \quad (1c)$$

$$\text{div } B = 0. \quad (1d)$$

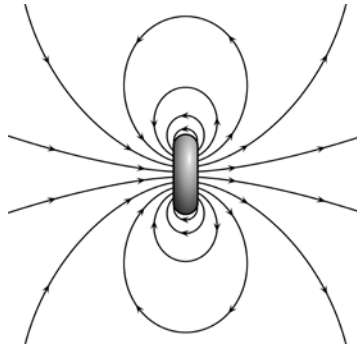
Dieses wichtige System¹ von partiellen Differentialgleichungen soll im Folgenden näher erläutert werden. Die erste Gleichung (1a)

heißt Amperesches oder Durchschusgesetz, die zweite (1b) Faradaysches oder Induktionsgesetz. Diese beiden Gleichungen drücken gerade die Erzeugung der Wirbelfelder aus.



(2) Feldlinien des elektrischen Feldes zwischen einer pos. und einer neg. Ladung. Quelle: Wikipedia

Die dritte und vierte Gleichung (1c) und (1d) sind die Gauß'schen Gesetze, die Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes und das Feld der magnetischen Flussdichte ist quellenfrei, es gibt also keine magnetischen Monopole.



(3) Feldlinien der magnetischen Flussdichte einer Spule. Quelle: Wikipedia

Dabei bezeichnet im System (1) das Symbol ∂_t die (partielle) Ableitung nach der Zeit, rot und div bezeichnen Operatoren, die grob gesprochen, mit der Ortsableitung zusammenhängen. Genauer gilt

$$\text{rot } E := \begin{bmatrix} \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 \\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 \\ \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 \end{bmatrix}$$

$$= \text{„}\nabla \times E\text{“},$$

$$\text{div } E := \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3$$

$$= \text{„}\nabla \cdot E\text{“}$$

mit dem so genannten Gradienten einer Funktion u

$$\nabla u := \begin{bmatrix} \partial_1 u \\ \partial_2 u \\ \partial_3 u \end{bmatrix} = (u')^\top.$$

Im System der Maxwell'schen Gleichungen (1) steht J für die negative Strom- und ρ für die Ladungsdichte. Die Größen D (elektrische Flussdichte) und E (elektrische Feldstärke) sowie B (magnetische Flussdichte) und H (magnetische Feldstärke) hängen durch die konstitutiven Gleichungen oder Materialeigenschaften²

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H$$

zusammen. Diese Gleichungen können linear oder aber auch nicht-linear sein, was vom betrachteten Medium abhängt. ϵ nennt man dielektrische Leitfähigkeit (auch Dielektrizität oder Permittivität) und μ magnetische Leitfähigkeit (auch magnetische Permeabilität oder Permeabilität) des Mediums. Im Vakuum sind $\epsilon = \epsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ Konstanten (konstante Zahlen/ Einheiten) und sie hängen durch

$$c_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_0 , also einer Naturkonstanten, zusammen. Die Permeabilität im Vakuum μ_0 nennt man auch magnetische Feldkonstante. Es gelten

$$c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \frac{[m]}{[s]},$$

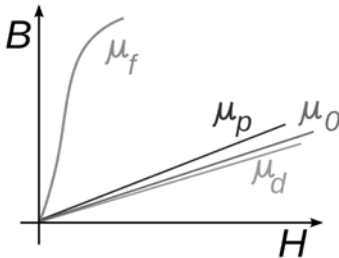
$$\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{[Vs]}{[Am]}$$

und daher

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0} \approx 9 \cdot 10^{-12} \frac{[As]}{[Vm]}.$$

In der Regel gibt man die Dielektrizität eines Mediums relativ zur Dielektrizität des Vakuums durch ϵ_r an. Dann ist im Vakuum $\epsilon_r = 1$ und

zum Beispiel $\epsilon_r \approx 100$ für Eis oder $\epsilon_r \approx 7$ für Glas. Analog gibt man die Permeabilität eines Mediums relativ zur Permeabilität des Vakuums durch μ_r an. Im Vakuum gilt also $\mu_r = 1$ und zum Beispiel $\mu_r \approx 0,9999936$ für Kupfer, $\mu_r \approx 8000$ für Eisen oder $\mu_r = 0$ für Supraleiter erster Art. Im allgemeinen unterscheidet man zwischen diamagnetischen ($0 \leq \mu_r < 1$, dabei heißt $\mu_r = 0$ ideal diamagnetisch), paramagnetischen ($\mu_r > 1$) und ferromagnetischen ($\mu_r \gg 1$) Materialien. Eisen ist beispielsweise ein ferromagnetisches Material, das üblicherweise ein nichtlineares aber monoton steigendes Verhalten von μ aufweist. Die anderen Materialklassen zeigen in der Regel ein lineares Verhalten von μ .



(4) Beispiele für lineares und nichtlineares Verhalten der Abbildung $\mu : H \rightarrow B$.
Quelle: Wikipedia

Wir wollen im Folgenden annehmen, dass ϵ und μ linear und zeitunabhängig sind. Dann ergibt sich zum Beispiel durch Differentiation nach der Zeit und Einsetzen aus (1a) und (1b)

$$\begin{aligned} \partial_t^2 E + \epsilon^{-1} \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} E &= F, \\ \partial_t^2 H + \mu^{-1} \operatorname{rot} \epsilon^{-1} \operatorname{rot} H &= G \end{aligned}$$

mit

$$F = \epsilon^{-1} \partial_t J, \quad G = -\mu^{-1} \operatorname{rot} \epsilon^{-1} J,$$

das heißt, E und H erfüllen Wellengleichungen, was den Wellencharakter elektromagnetischer Felder zeigt. Denn beispielsweise für

$$\epsilon = \mu = 1$$

und mit dem Zusammenhang

$$-\Delta = \operatorname{rot} \operatorname{rot} - \nabla \operatorname{div} \quad (2)$$

für den Vektor-Laplaceoperator sieht man durch weitere Umformungen, dass jede Komponente $u = E_n$ oder $u = H_n$ von E und H die skalare Wellengleichung

$$(\partial_t^2 - \Delta) u = f$$

löst, wobei f jeweils von J und ρ abhängt. Ferner liefert ein wellenförmiger oder zeitharmonischer Ansatz, das heißt, die Annahme einer komplexen Sinus- und Cosinus-Abhängigkeit der Felder bezüglich der Zeit und einer bestimmten Frequenz ω (z.B. $E(t; x) = \exp(i\omega t)E(x)$, wobei i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ bezeichnet), die Maxwell'schen Gleichungen im Fourierbild oder Frequenzraum

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} H + i\omega \epsilon E &= J, \\ \operatorname{rot} E + i\omega \mu H &= 0, \\ \operatorname{div} \epsilon E &= \rho, \\ \operatorname{div} \mu H &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Im statischen Fall, wenn die Frequenz ω Null ist, erhalten wir die beiden entkoppelten Systeme

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} \epsilon E = \rho, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} H = -J, \quad \operatorname{div} \mu H = 0 \quad (5)$$

für E und H . Gleichung (3) nennt man auch die zeitharmonischen und (4)–(5) die statischen Maxwell Gleichungen.

Ungleichungen

Sämtliche in diesem Text vorkommende Differentialoperatoren, also zum Beispiel ∇ , rot oder div , sind als distributionelle oder „schwache“ Ableitungen eines L^2 -basierten Sobolevraumes auf einem beschränkten, glatten Gebiet Ω im dreidimensionalen euklidischen Raum zu verstehen. Ferner werden wir die notwendigen Randbedingungen, skalare, tangential oder normale Spuren, ohne die alle vorgestellten Systeme von partiellen Differentialgleichungen unvollständig und sämtliche Ungleichungen und Theorien

schlicht weg falsch sind, nicht weiter erwähnen oder aufschreiben, um die Formeln kürzer und übersichtlicher zu halten.



(5) Sergei Lwowitsch Sobolew (* 6. Oktober 1908 in Sankt Petersburg; † 3. Januar 1989 in Moskau).

Quelle: Wikipedia

Zur Lösung der Systeme (1)–(5) sind nun zum einen für eine Funktion u die klassische Poincaré Ungleichung

$$|u|_{L^2} \lesssim |\nabla u|_{L^2} \quad (6)$$

(je nach Randbedingung auch Friedrichs oder Steklov Ungleichung genannt), zum anderen für ein Vektorfeld E die Maxwell Ungleichung (auch div - rot -Ungleichung genannt)

$$|E|_{L^2} \lesssim |\operatorname{rot} E|_{L^2} + |\operatorname{div} E|_{L^2} \quad (7)$$

zentrale Werkzeuge. Wir benutzen jeweils die Notation \lesssim statt des bekannten \leq , da die Ungleichungen Konstanten enthalten, die wir der Übersichtlichkeit halber nicht notieren wollen. Ferner schreiben wir alle L^2 -Normen und L^2 -Skalarprodukte nicht als Integrale, sondern benutzen die Schreibweisen

$$\begin{aligned} |u|_{L^2}^2 &:= \int_{\Omega} |u|^2, \\ \langle u, v \rangle_{L^2} &:= \int_{\Omega} u \cdot v. \end{aligned}$$



(6) Jules Henri Poincaré (* 29. April 1854 in Nancy; † 17. Juli 1912 in Paris), Kurt Otto Friedrichs (* 28. September 1901 in Kiel; † 31. Dezember 1982 in New Rochelle, New York) und Wladimir Andrejewitsch Steklow (* 9. Januar 1864 in Nizhny Novgorod; † 30. Mai 1926 in Gaspra, Krim).

Quelle: Wikipedia

Beide Ungleichungen (6) und (7) können als verallgemeinerte Poincaré Ungleichung

$$|\Phi|_{L^2} \lesssim |d\Phi|_{L^2} + |\delta\Phi|_{L^2}, \quad (8)$$

formuliert werden, wobei Φ eine Differentialform gewissen Ranges beschreibt. Die Ungleichungen (6) und (7) ergeben sich nun aus (8), wenn man als Rang der Differentialform Φ Null oder Eins wählt. Insofern stellt (8) eine gemeinsame Formulierung und eine Verallgemeinerung der klassischen Ungleichungen (6) und (7) dar.

Im eindimensionalen Raum fallen die Ungleichungen (6)–(8) zusammen. Es ergibt sich beispielsweise die klassische Poincaré-Wirtinger Ungleichung

$$\int_0^d |v|^2 \leq \frac{d^2}{\pi^2} \int_0^d |v'|^2$$

mit $v(0) = v(d) = 0$ für $d > 0$. (Hier haben wir ausnahmsweise die Randbedingungen und die Konstante angeführt.) Mit dieser (analytischen) Ungleichung kann die (geometrische) isoperimetrische Ungleichung bewiesen werden: Unter allen Teilflächen der zweidimensionalen Ebene \mathbb{R}^2 mit endlicher Ausdehnung und einem wohldefinierten gegebenen Umfang besitzt der Kreis den größten Flächeninhalt.

Hilbertraummethode

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist man zunächst daran interessiert, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu zeigen. Solche Existenzresultate liefern mitunter auch Hinweise für eine numerische Behandlung der Gleichungen. Die wesentlichen Hilfsmittel einer Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen (bzw. Systemen davon, wie eben den Maxwell'schen Gleichungen) sind häufig eine oder mehrere passende fundamentale Ungleichungen.

Dies wollen wir ein wenig erläutern. Die Lösung des elek-

trastatischen Problems (4) lässt sich beispielsweise durch das Lösen einer Poissonsgleichung

$$-\Delta_\epsilon u := -\operatorname{div} \epsilon \nabla u = -\rho \quad (9)$$

finden. Multiplizieren wir diese elliptische partielle Differentialgleichung mit einer Testfunktion φ und integrieren partiell, also

$$-\langle \Delta_\epsilon u, \varphi \rangle_{L^2} = \langle \epsilon \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2},$$

so erhalten wir die verallgemeinerte, schwache oder variationelle Formulierung von (9), nämlich

$$\langle \epsilon \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2} = -\langle \rho, \varphi \rangle_{L^2}. \quad (10)$$

Die Beziehung (10) muss nun für bestimmte und hinreichend viele Testfunktionen φ gelten. Testfunktionen sind dabei immer sehr glatte (schöne, im Sinne von beliebig oft differenzierbare) Funktionen, die am Rand oder an Teilen des Randes des Gebietes Ω verschwinden.

Zur eindeutigen Lösung von (10) benötigt man nun genau die Poincaré Ungleichung (6). Mithilfe so genannter Hilbertraummethode ergibt sich, dass (10) eine eindeutige Lösung besitzt. Dabei nutzt man den Umstand, dass die linke Seite in (10) eine Bilinearform definiert, welche äquivalent zum inneren Produkt (Skalarprodukt) in dem entsprechenden Hilbertraum ist. Diese Äquivalenz wiederum wird gerade durch die Poincaré Ungleichung (6) hergestellt. Mit der Lösung u von (10) ergibt sich dann

$$E := \nabla u$$

als das gesuchte elektrische Feld. Die Lösung u nennt man auch (skalares) elektrisches Potenzial.

Analog, jedoch deutlich schwieriger und mit größerem Aufwand, können wir das magnetostatische Problem (5) durch Lösen des Systems partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \square_\mu U &:= \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} U = -J, \\ \operatorname{div} U &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

angehen, was nach (2) einer Vektor-Poissonsgleichung entspricht. Die variationelle Formulierung von (11) ist nun

$$\begin{aligned} \langle \mu^{-1} \operatorname{rot} U, \operatorname{rot} \Phi \rangle_{L^2} &= -\langle J, \Phi \rangle_{L^2}, \\ \langle U, \nabla \psi \rangle_{L^2} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

was wiederum für bestimmte und genügend viele Testvektorfelder Φ und Testfunktionen ψ gelten muss. Probleme dieser Art nennt man auch Sattelpunktprobleme. Zur eindeutigen Lösung von (12) benötigt man die Maxwell Ungleichung (7) und wiederum die Poincarésche Ungleichung (6). Aus der eindeutigen Lösung U von (12) ergibt sich sodann

$$H = \mu^{-1} \operatorname{rot} U$$

als das gesuchte magnetische Feld. Die Lösung U wird auch (vektorielles) magnetisches Potenzial genannt.



(7) David Hilbert (* 23. Januar 1862 in Königsberg; † 14. Februar 1943 in Göttingen).
Quelle: Wikipedia

Die hier skizzierten Hilbert-raummethoden sind elegante und äußerst mächtige Hilfsmittel bei der Lösung partieller Differentialgleichungen. Dabei werden stets Ungleichungen der hier diskutierten Art als fundamentale Resultate benötigt.

Lineare Elastizität

Die lineare Elastizitätstheorie als Teilgebiet der angewandten Mathematik ist im Wesentlichen eine abgeschlossene Theorie. Sie ist das Paradigma einer erfolgreichen Theoriebildung: Praktisch alle Konstruktionen und Bauwerke der letzten zwei Jahrhunderte wurden

nach ihren Vorhersagen ausgelegt. Dabei ist ein elastischer Körper ein solcher, bei dem unter Einwirkung deformierender Kräfte innere Spannungen auftreten, die zwischen den einzelnen Masseteilchen des Körpers wirken und versuchen, die entstandenen Verzerrungen zurückzubilden.

Ziel der Theorie ist also die Vorhersage des reversiblen Deformationsverhaltens eines Festkörpers unter Beanspruchung. Wichtig zu vermerken ist, dass die Theorie postuliert, dass der Körper nach Wegnahme der äußeren Belastung instantan, ohne bleibende Schädigung oder Verformung, vollständig in seinen Ursprungszustand zurückkehrt.

Das Gleichgewicht der Kräfte im Körper liefert die Gleichung

$$\operatorname{Div} \sigma = F.$$

Hierbei ist das Vektorfeld F die einwirkende Körperkraft (man denke an die Gravitationskraft) und das quadratische (3×3) -Matrixfeld σ ist der Spannungstensor, der es erlaubt, aus den lokalen Verzerrungen $\operatorname{sym} \nabla u$ die Spannungen zu berechnen. Dies geschieht im konstitutiven Gesetz, dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma = 2G \operatorname{sym} \nabla u + \Lambda \operatorname{tr}(\nabla u) \operatorname{id},$$

welches einen linearen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen postuliert. Hierbei bezeichnet das Vektorfeld u die Verschiebungen. Der Differentialoperator ∇ wirkt dabei komponentenweise auf u_n als transponierter Gradient, also ∇^T . Ebenso ist der Differentialoperator Div auf einer quadratischen Matrix zeilenweise als uns bereits bekannte Divergenz div erklärt. Ferner haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{sym} \sigma &:= \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^T), \\ \operatorname{tr} \sigma &:= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ \operatorname{id} &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit haben wir z.B.

$$\operatorname{tr}(\nabla u) = \operatorname{div} u.$$

Jedes Material hat seine Besonderheit, sei es Stahl, Gummi, Holz oder Beton. Der Übersichtlichkeit wegen nehmen wir an, dass unser Material keine ausgezeichneten Richtungen kennt. Einen solchen Körper nennt man isotrop. (Holz ist das typische Beispiel für einen Körper mit ausgezeichneten Richtungen: Holz verändert seine Eigenschaften, je nachdem ob man es in Faserrichtung oder senkrecht zur Faserrichtung belastet.) Im isotropen Fall sind die positiven Zahlen G und Λ die beiden einzigen Elastizitätskonstanten.

Der Verzerrungstensor $\operatorname{sym} \nabla u$ bemisst bei gegebenen Verschiebungen u die Größe der Verzerrung. Im eindimensionalen Fall (gezogener Stab) sind die Verzerrungen einfach die Längenänderungen und die Spannungen sind die dazu notwendigen Kräfte.

Aus dem obigen Gleichungssystem ist nun die Verschiebung u der Teilchen zu bestimmen; hat man u gefunden, ist alles getan. Die (hoffentlich) eindeutige Lösung u lässt sich nun auch so charakterisieren: Das Verschiebungsfeld u „versucht“, die gespeicherte elastische Energie aufgrund von Verzerrungen möglichst klein zu halten (keine unnütze Verschwendung)

$$\begin{aligned} G |\operatorname{sym} \nabla u|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \Lambda |\operatorname{tr} \nabla u|_{L^2}^2 \\ \mapsto \min. \end{aligned}$$

Die Frage, ob es solche minimierenden Verschiebungsfelder tatsächlich gibt, ist eine Existenzfrage, welche mit der Kornschen Ungleichung komplett (und positiv) beantwortet wird. Dabei kommen dieselben Hilbertraumtechniken zum Einsatz wie zuvor skizziert.

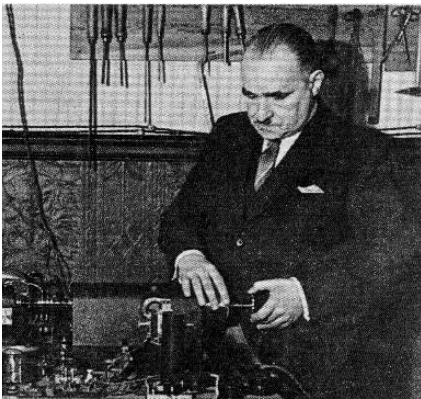
Die Kornsche Ungleichung lautet

$$|\nabla u|_{L^2} \lesssim |\operatorname{sym} \nabla u|_{L^2}. \quad (13)$$

Sie quantifiziert und erweitert mathematisch die Beobachtung, dass ein Körper, der an keiner Stelle einer Verzerrung unterworfen ist, also $\text{sym } \nabla u = 0$, und am Rand fixiert wird, nirgendwo Verschiebungen u aufweist, also $u = 0$.

Klassische Plastizitätstheorie

Die lineare Elastizitätstheorie kann per se nur kleine reversible Verformungen beschreiben. Man möchte jedoch auch die großen, irreversiblen Verformungen bei-



(8) Arthur Korn (* 20. Mai 1870 in Breslau; † 21. Dez. 1945 in New Jersey), Erfinder der Bildtelegraphie 1906
Quelle: Wikipedia

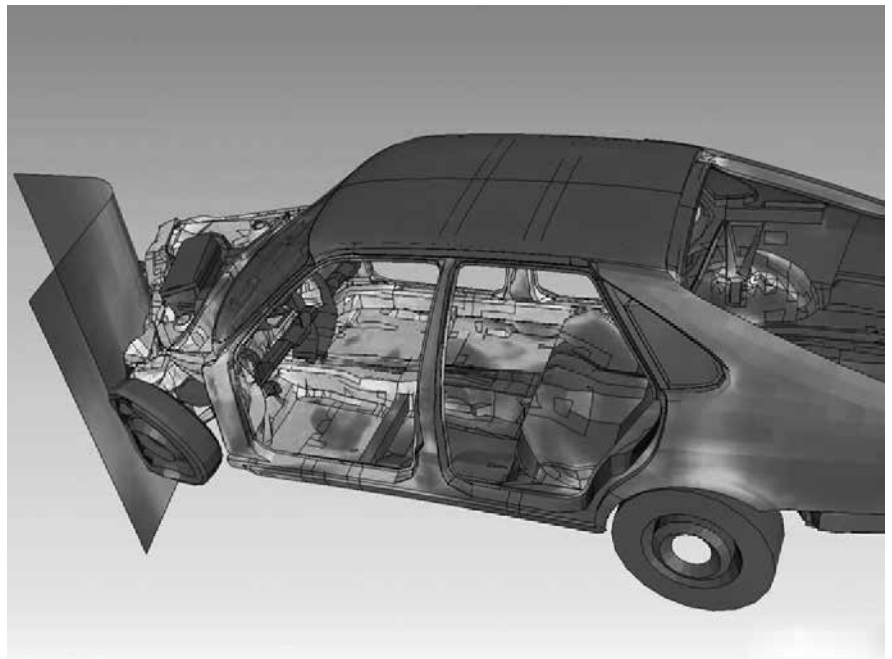
spielsweise von Stahl, wie in der Blechumformung oder beim Crashtest, mithilfe mathematischer Methoden beschreiben können.

Dies geschieht im Rahmen der infinitesimalen Plastizitätstheorie, welche sofort eine Nichtlinearität in die Gleichungssysteme einführt. Daher sind solche Gleichungen wesentlich schwerer zu knacken als die der linearen Elastizitätstheorie. Lösungen müssen hierbei nicht mehr unbedingt eindeutig sein, und auch die Existenztheorie ist wesentlich komplizierter. Dennoch gelingt es, und die Gleichungen haben jetzt die Form

$$\text{Div } \sigma = F, \quad (14a)$$

$$\partial_t P = \mathcal{F}(\sigma), \quad (14b)$$

$$\sigma = 2G \text{sym}(\nabla u - P) \quad (14c) \\ + \Lambda \text{tr}(\nabla u - P) \text{id}.$$



(9) Finite Elemente Simulation eines Crashtests.
Quelle: Wikipedia

Hierbei beschreibt die neu auftretende plastische Distorsion P (wieder ein (3×3) -Matrixfeld) die irreversiblen Verformungen im Massepunkt. Die plastischen Distorsionen werden „angetrieben“ von den herrschenden elastischen Spannungen σ im Massepunkt und zwar über eine stark nichtlineare Funktion \mathcal{F} . Das System besteht aus einer linearen partiellen Differentialgleichung (14a), gekoppelt mit einer gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichung in jedem Massepunkt (14b) sowie der konstitutiven Beziehung (14c). Der Spannungstensor σ hängt nun nur noch von einer effektiven elastischen Verzerrung $\text{sym}(\nabla u - P)$ ab.

Eine Fusion in der Mathematik

Wie wir gesehen haben, können Systeme partieller Differentialgleichungen, die in unterschiedlichen Bereichen der Mathematik oder mathematischen Physik auftreten, mit den gleichen mathematischen Werkzeugen (Hilbertraummethode) angegangen und gelöst werden.

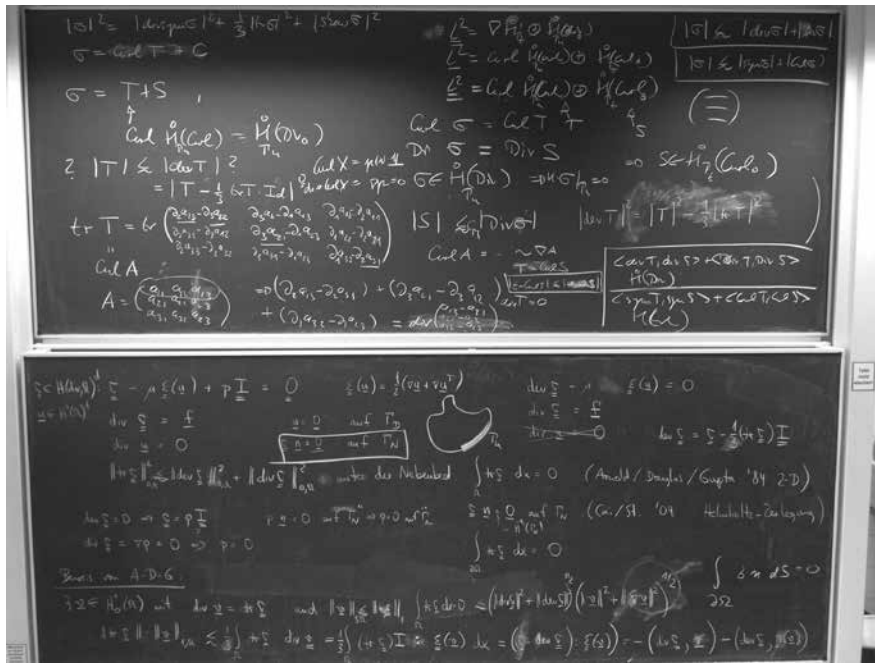
Bisher waren eine gemeinsame Formulierung oder ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den grundlegenden Ungleichungen (6)

und (13), also der Poincaréschen und der Kornschen Ungleichung, unbekannt. In den letzten Jahren ist es den Autoren zusammen mit ihrem UDE-Kollegen Prof. Karl-Josef Witsch gelungen, diese beiden klassischen Ungleichungen in einer gemeinsamen Form zu verallgemeinern. Es gilt nämlich die erstaunliche Ungleichung

$$|\tau|_{L^2} \lesssim |\text{sym } \tau|_{L^2} + |\text{Rot } \tau|_{L^2} \quad (15)$$

für ein quadratisches Matrixfeld τ , wobei analog zur Divergenz Div auch die Rotation Rot zeilenweise für das Matrixfeld τ als bekannte vektorielle Rotation rot definiert ist.

Unser Beweis dieser neuen Ungleichung benutzt dabei die klassische Kornsche Ungleichung (13), die klassische Maxwell Ungleichung (7) und weitere tiefe Resultate aus der elektromagnetischen Theorie wie zum Beispiel Helmholtzzerlegungen, also Zerlegungen eines Vektorfeldes in rotations- und divergenzfreie Anteile. Somit ist ein enger Zusammenhang zwischen den drei fundamentalen Ungleichungen der mathematischen Physik, nämlich Poincaré (oder Friedrichs/Steklov) (6), Korn (13) und Maxwell (7), offengelegt worden.



(10) Typisches Tafelbild in der Forschung; Das Foto stammt von Prof. Gerhard Starke während einer Diskussion zwischen ihm, Dr. Sebastian Bauer und den Autoren (alle Fakultät für Mathematik der UDE) für eine gemeinsame Publikation. Die Autoren bedanken sich herzlich bei Rektorat und Rektorat der UDE für die optimalen Arbeitsbedingungen in der neu zusammengeführten Fakultät für Mathematik im Mathematik Carree in Essen, insbesondere für die Ausstattung mit hochwertigen Kreidetafeln.

Man erhält die Kornsche Ungleichung (13) aus (15) durch die spezielle Wahl

$$\tau_u = \nabla u$$

zurück, denn es gilt $\text{Rot } \tau_u = 0$, da τ_u ein Gradient ist. Die Poincarésche Ungleichung (6) taucht zum Beispiel durch die Wahl

$$\tau_y = \begin{bmatrix} 0 & -y & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

aus (15) wieder auf, denn $\text{sym } \tau_y = 0$ und $\text{Rot } \tau_y \sim \nabla y$, da τ_y schiefssymmetrisch ist.

Die Ungleichung (15) ist aber nicht nur eine mathematische oder intellektuelle Spielerei. Vielmehr liefert sie das Fundament für ein neues Modell der Elastoplastizität, das wir im Folgenden vorstellen wollen.

Gradientenplastizität

In letzter Zeit haben die Bedürfnisse nach Miniaturisierung dazu geführt, auch Bauteile im Nanome-

terbereich und deren Plastizität zu untersuchen. Im Gegensatz zur klassischen Theorie spielen nun Größen- oder Skaleneffekte eine wesentliche Rolle: Kleinere Bauteile sind im Regelfalle verhältnismäßig steifer. Bei größeren Bauteilen ist es aber irgendwann gleich, ob das Bauteil groß oder sehr groß ist. Diese zusätzlichen Effekte finden ihren Niederschlag in dem erweiterten Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{Div } \sigma &= F, & (16a) \\ \partial_t P &= \mathcal{F}(\sigma - \text{Rot Rot } P), & (16b) \\ \sigma &= 2G \text{sym}(\nabla u - P) + \Lambda \text{tr}(\nabla u - P) \text{id}. & (16c) \end{aligned}$$

Im Vergleich zum System (14) ist aus der gewöhnlichen Differentialgleichung (14b) nun selbst eine nichtlineare partielle Differentialgleichung in Zeit und Ort (!) geworden (16b). Es stellt sich die Frage, warum in (16b) die Ortsableitungen ausschließlich in der Kombination $\text{Rot Rot } P$ auftreten. Dies ist ein zwingendes Ergebnis unserer Kenntnis des Aufbaus der Materie: Träger der plastischen Verformung sind die so

genannten Versetzungen im Material, und die zugehörige Größe ist $\text{Rot } P$, der so genannte Versetzungsdichtentensor.

Die natürlicherweise dem System zugeordnete elastische Energie ist nun gerade

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, P) &= G |\text{sym}(\nabla u - P)|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda |\text{tr}(\nabla u - P)|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |\text{Rot } P|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Wenn man zeigen kann, dass durch Kontrolle der Energie \mathcal{E} auch die elastische Distorsion

$$\tau := \nabla u - P$$

kontrolliert wird, dann hat man eine vollständige Lösungstheorie für das System (16) des neuen Modells zur Hand. In dieser Form stellte sich die Frage nach der neuen Ungleichung (15) zuerst.

Mit dieser Ungleichung liegt die Antwort nun auf der Hand. Wir schreiben $\mathcal{E}(\tau) = \mathcal{E}(u, P)$, also

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tau) &= G |\text{sym } \tau|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \Lambda |\text{tr } \tau|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |\text{Rot } \tau|_{L^2}^2 \\ &\gtrsim |\text{sym } \tau|_{L^2}^2 + |\text{Rot } \tau|_{L^2}^2 \\ &\gtrsim |\tau|_{L^2}^2 + |\text{Rot } \tau|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

denn $\text{Rot } \nabla u = 0$. Die Tensoren P und τ nennt man auch inkompatibel, da sie kein Gradient eines Vektorfeldes sind.

Das neue Modell: Alberichs Tarnkappe

Wir sind sogar in der Lage, ein neues und flexibles linear elastisches Modell für die Wellenausbreitung in mikrostrukturierten Materialien anzugeben. Die Gleichungen haben jetzt die prinzipielle Form

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \text{Div } \sigma &= F, \\ \partial_t^2 P + \text{Rot Rot } P &= \sigma, \\ 2G \text{sym } \tau + \Lambda (\text{tr } \tau) \text{id} &= \sigma, \\ \nabla u - P &= \tau. \end{aligned}$$

Eine Besonderheit des Modells ist, dass Wellenformen vorhergesagt werden, welche im Material geschluckt werden können, so genannte „band gaps“. Das heißt also, dass gewisse Wellenformen nicht reflektiert werden und damit das streuende Objekt für den Beobachter unsichtbar bleibt. Solche Effekte werden im Experiment für bestimmte, künstlich hergestellte Materialien beobachtet, konnten aber bislang nicht durch ein Kontinuumsmodell erklärt werden. Auch hier hängt die mathematische Theorie an der neu gefundenen Ungleichung (15).

Summary

In our results we uncover a deep connection between the seemingly unrelated theories of electromagnetism and gradient-elastoplasticity. Both theories are formulated as a system of linear or nonlinear partial differential equations. We present them in a simplified setting and highlight the important role of general a priori inequalities for the solution of the equations. As it turns out, there is one, hitherto unknown inequality, to rule two of the three needed inequalities: Korn's inequality for incompatible tensor fields. We describe this new inequality and the way in which we have found it. Possible further applications are indicated.

Anmerkungen

- 1) Im System (1) ist ρ eine skalare Größe, also eine Funktion, und E, H, B, D sowie J sind vektorielle Größen, also Vektorfelder.
- 2) Die Materialeigenschaften ϵ und μ sind (3x3)-Matrixfelder.

Literatur

– Sebastian Bauer, Patrizio Neff, Dirk Pauly, Gerhard Starke. New Poincaré Type Inequalities. *Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences Paris, Ser. I*, 352, 163–166, (2014).

- Sebastian Bauer, Patrizio Neff, Dirk Pauly, Gerhard Starke. Dev-Div and DevSym-DevCurl Inequalities for Incompatible Square Tensor Fields with Mixed Boundary Conditions. (2014), submitted.
- Rolf Leis. Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics. Teubner, Stuttgart, (1986).
- Angela Madeo, Patrizio Neff, Ionel-Dumitrel Ghiba, Luca Placid, Giuseppe Rosi. Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps. *Cont. Mech. Thermodyn.*, (2013), accepted.
- Patrizio Neff, Dirk Pauly, Karl-Josef Witsch. A Canonical Extension of Korn's First Inequality to $H(\text{Curl})$ motivated by Gradient Plasticity with Plastic Spin. *Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences Paris, Ser. I*, 349, 1251–1254, (2011).
- Patrizio Neff, Dirk Pauly, Karl-Josef Witsch. On a Canonical Extension of Korn's First and Poincaré's Inequality to $H(\text{Curl})$. *Zapiski POMI*, 397, (2011), 115–125, *Journal of Mathematical Sciences (Springer New York)*, 185 (1), 64–70, (2012).
- Patrizio Neff, Dirk Pauly, Karl-Josef Witsch. Maxwell meets Korn: A New Coercive Inequality for Tensor Fields in $\mathbb{R}^{N \times N}$ with Square-Integrable Exterior Derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35 (1), 65–71, (2012).
- Patrizio Neff, Dirk Pauly, Karl-Josef Witsch. Poincaré meets Korn via Maxwell: Extending Korn's First Inequality to Incompatible Tensor Fields. (2014), submitted.
- Patrizio Neff, Dirk Pauly, Karl-Josef Witsch. On an Extension of the First Korn Inequality to Incompatible Tensor Fields on Domains of Arbitrary Dimensions. *Modeling, Simulation and Optimization in Science and Technology (2 Workshops honoring Jacques Priaux and Roland Glowinski on the occasion of their 70th and 75th birthdays)*, Springer, (2014), accepted.
- Dirk Pauly. On the Maxwell Inequalities for Bounded and Convex Domains. (2013), submitted.
- Dirk Pauly. On Maxwell's and Poincaré's Constants. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series S*, (2014), accepted.
- Rainer Picard, Norbert Weck, Karl-Josef Witsch. Time-Harmonic Maxwell Equations in the Exterior of Perfectly Conducting, Irregular Obstacles. *Analysis (Munich)*, 21, 231–263, (2013).

Die Autoren

Patrizio Neff studierte Mathematik, Philosophie und Geschichte an der TU Darmstadt, erlangte die Zwischenprüfung im Lehramt Mathematik/Geschichte und das Diplom in Mathematik 1996. Nach seiner Promotion über mathematische Aspekte der Plastizitätstheorie 2000 war er Visiting Associate Professor am California Institute of Technology in Pasadena. Er habilitierte sich 2003 an der TUD mit einem Thema zu Cosserat Modellen. Es folgten Dozentenjahre an der TUD,

unterbrochen von einer Lehrstuhlvertretung an der UDE im Wintersemester 2004/2005. Seit 2009 ist er Inhaber des Lehrstuhles für Nichtlineare Analysis und Modellierung an der UDE. Er war Studiendekan von 2010 bis 2012, Mitglied der Kommission KLSW und ist Mitinitiator und Sprecher der MINT-Vorstudienphase im Rahmen des Bund-Länder Programms „Qualität der Lehre“. Patrizio Neff unterhält enge internationale Kooperationen nach Italien, Frankreich, England, Polen, USA, Japan, Südafrika und über die Mathematik hinaus zu den Ingenieurwissenschaften an der UDE. Seine Arbeitsschwerpunkte sind die mathematische Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen und deren Analysis (Elastizitätstheorie, Plastizitätstheorie, Theorie der Schalen und Platten, erweiterte Kontinuums-theorien, Matrixanalysis, Variationsrechnung). Neff hat fundamentale Resultate auf dem Gebiet der nichtlinearen Elastizitätstheorie (polykonvexe anisotrope Funktionen, zusammen mit Professor Jörg Schröder, Baumechanik, UDE) und erweiterte Kornsche Ungleichungen gezeigt. Er hat mehr als 70 Zeitschriftenbeiträge und zwei Monographien verfasst. Zudem ist er Mitglied des Editorial-Boards bei *Z. f. Angew. Math. Physik (Springer)*, *Math. Mech. Solids (Berkeley)*, *Math. Mech. of Complex Systems (Rom)*.

Dirk Pauly studierte Mathematik, Informatik und Physik an der Universität Essen, an der er 2003 in Mathematik promovierte. Nach mehrjährigen Aufenthalten als Gastprofessor an der Universität Jyväskylä in Finnland habilitierte er sich 2010 an dieser und an der UDE. Seit 2010 ist er Professor für Angewandte Mathematik an der Universität Jyväskylä, und 2013 nahm er einen Ruf auf eine Professur für Mathematik an der UDE an. Dirk Pauly arbeitet auf dem Gebiet der Analysis partieller Differentialgleichungen, speziell der Maxwell'schen Gleichungen. Er hat enge Kontakte zu Kooperationspartnern im Inland und nach Finnland, Frankreich, Österreich, Russland und den Vereinigten Staaten.



Dirk Pauly. Foto: Max Greve