

Elastisch bestimmte und elastisch unbestimmte Systeme

1. In der Theorie der elastischen Systeme trifft man neben solchen Fällen, bei denen sich irgendein zusammengesetzter Belastungszustand mit völlig genügender Annäherung durch Überlagerung der einfachen Belastungszustände aufbauen läßt, aus denen er besteht, auch Fälle von solcher Art an, bei denen ein derartiges Verfahren in keiner Weise zulässig wäre. Ich bin mir völlig bewußt, mit den folgenden Ausführungen nichts grundsätzlich Neues zu bringen, denn Beispiele für die zweite Art von Fällen sind bereits vielfach behandelt, ich nenne nur das Ausnahmefachwerk, die dünne ebene Platte, den auf gleichzeitige Biegung und Knickung beanspruchten Stab. Trotzdem schien mir eine Behandlung von solchen Fällen von einem gemeinsamen Gesichtspunkt aus wünschenswert. Neu dürfte das zweite der behandelten Beispiele sein.

Ein wesentliches Merkmal der hier zu behandelnden besonderen Systeme ist, daß die zu irgendwelchen Lasten gehörigen Formänderungen und Spannungen von etwa vorhandenen Vorspannungen (Herstellungsspannungen, Wärmespannungen usw.) ganz wesentlich beeinflußt werden¹. Formänderungs- und Spannungszustand bleiben also bei gegebenen Lasten *unbestimmt*, wenn man über die Vorspannungen nicht zahlenmäßige Angaben zu machen vermag. Ich schlage deshalb vor, Systeme dieser Art „*elastisch unbestimmt*“ zu nennen, im Gegensatz zu den „*elastisch bestimmten Systemen*“, bei denen eine etwa vorhandene Vorspannung auf die durch die Wirkung der Lasten neu hinzukommenden Spannungen einen nennenswerten Einfluß nicht hat, d. h. sich den Lastspannungen einfach überlagert. Als Beispiele für die letztere Art kann man die meisten praktisch vorkommenden statisch unbestimmten Bauwerke anführen (bei den statisch bestimmten treten keine Vorspannungen auf). Beim Zweigelenkbogen z. B. überlagern sich die durch die Lasten hervorgerufenen Spannungen denen, die durch eine Entfernungsänderung der Auflager hervorgerufen werden, vollkommen, wenigstens innerhalb der üblichen Genauigkeitsgrenzen, wobei alle Formänderungswege so klein vorausgesetzt werden, daß die Kräftezerlegung am deformierten Bauwerk durch die am undeformierten ersetzt werden darf. Bei endlichen Formänderungswegen hört die Überlagerung in jedem Fall völlig auf; unsere Unterscheidung bezieht sich demnach ganz wesentlich auf die (praktisch meist allein vorkommenden)

¹ Im Falle der „Knickungsbiegung“ spielen die in der Richtung der Stabachse wirkenden Kräfte die Rolle der „Vorspannung“.

kleinen Formänderungen. — Als elastisch unbestimmtes Gegenbeispiel zum Zweigelenkbogen sei hier der gerade Balken mit zwei unverrückbaren gelenkigen Auflagern genannt, bei dem die Durchbiegung und das Biegemoment unter senkrechter Last von der Längskraft abhängt, die zwischen den Auflagern je nach der Balkentemperatur vorhanden ist und die von der Durchbiegung mit beeinflußt wird.

2. Um zu einem formelmäßigen Merkmal für die elastisch bestimmten und die elastisch unbestimmten Systeme zu gelangen, betrachten wir das Verhalten der Formänderungsarbeit bzw. der mit dieser im wesentlichen identischen elastischen Energie. Diese soll hier allerdings nicht, wie in der Statik gewöhnlich, als Funktion der Kräfte, sondern als Funktion der Formänderungswege der Kraftangriffspunkte behandelt werden. (Das erstere Verfahren eignet sich nur für die elastisch bestimmten Systeme!) Das System sei frei von Reibungen und unverschieblich gelagert. Sind n unabhängig voneinander elastisch verschiebliche Kraftangriffsstellen vorhanden — die festgelagerten Stellen liefern keine Verschiebungen, die von anderen kinematisch abhängigen sind zu eliminieren —, so wird die elastische Energie eine Funktion der Wege $y_1, y_2 \dots y_n$:

$$H = H(y_1 \dots y_n)^1.$$

Die Änderung der elastischen Energie, wenn y_i um δy_i geändert wird, während alle anderen y fest bleiben sollen, ist nun

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y_i;$$

die äußere Arbeit, die dabei geleistet wird, ist aber $= P_i \delta y_i$, weil alle übrigen Kraftangriffsstellen in Ruhe bleiben; da die äußere Arbeit der Änderung der aufgespeicherten Energie gleich sein muß, ist also

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = P_i.$$

P_i erscheint hier natürlich auch als Funktion der $y_1 \dots y_n$. Im Fall der Überlagerbarkeit (Superposition) muß es eine lineare Funktion sein. Dann ist aber jedes

$$\frac{\partial P_i}{\partial y_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} = \text{konst.}$$

Dies ist die Bedingung für elastische Bestimmtheit. Umgekehrt ist ein System elastisch unbestimmt, wenn irgendein zweiter Differential-

¹ Es empfiehlt sich, für die zwei Größen $A(P_1 \dots P_n)$ und $H(y_1 \dots y_n)$, die sich allerdings höchstens um eine additive Konstante unterscheiden, zwei verschiedene Buchstaben einzuführen; besonders bei Rechnungen, in denen von dem einen zum anderen System übergegangen werden soll, ist dies zweckmäßig.

quotient der elastischen Energie nach den Formänderungswegen sich als stark veränderlich erweist.

Genau genommen sind streng konstante $\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k}$ fast niemals vorhanden, sobald die Wege nicht unendlich klein sind, also müßte die Unterscheidung danach getroffen werden, ob die $\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k}$ alle nur schwach veränderlich oder einige auch stark veränderlich sind, wenn man den $y_1 \dots y_n$ Werte innerhalb der zulässigen Grenzen erteilt. Daß wir hier auf ein „stark“ oder „schwach“ kommen, statt auf ein „ja“ oder „nein“, darf uns nicht wundern, da ja bei endlichen Formänderungen, wie schon erwähnt, die Grenzen beider Gebiete ineinanderfließen. Bei der Kleinheit der Formänderungen, wie sie bei den praktischen Baustoffen vorkommen, scheiden sich die beiden Gebiete aber in durchaus auffälliger Weise.

3. Zu den einfachsten Beispielen für elastisch unbestimmte Systeme gehört das Gelenkviereck mit Federn an den Gelenken, die die beiden

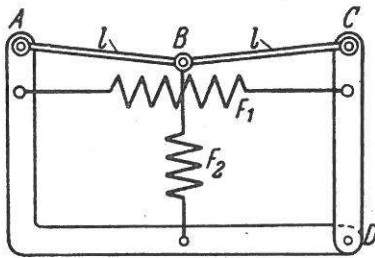


Abb. 1

durch das Gelenk verbundenen Glieder in einem bestimmten Winkel zueinander zu halten streben. Elastisch unbestimmt ist ein solches Gelenkviereck dann, wenn drei Gelenke nahezu in einer Geraden liegen und außerdem gewisse Größenordnungsbeziehungen bezüglich der Federstärken bestehen. Die Federn brauchen übrigens nicht gerade in der erwähnten Art angeordnet zu werden; die Anordnung nach Abb. 1 ergibt, ohne die

Allgemeinheit der Lösung wesentlich zu beeinträchtigen, besonders übersichtliche Verhältnisse und sei daher den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt.

Der senkrechte Weg des Punktes B von der Durchschlagslage nach unten sei y , der waagerechte von C nach links sei x (beide also in Richtung einer Verkürzung der Federn positiv). Wird, was für kleine x genügend genau zutrifft, eine Führung des Punktes C auf der Waagerechten $\overline{AC}$ angenommen, so liefert der kinematische Zusammenhang

$$x = 2l - 2\sqrt{l^2 - y^2} = 2l \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{l}\right)^2} \right).$$

Wird die Wurzel binomisch entwickelt, so erhält man

$$x = \frac{y^2}{l} + \frac{1}{4} \frac{y^4}{l^3} + \dots \quad (1)$$

Die beiden Federn mögen nun, für sich allein genommen, Gleichgewichtslagen bei $x = a$ bzw. $y = b$ ergeben; die Federkräfte seien

$= F_1(x - a)$ und $= F_2(y - b)$ (F_1 und F_2 = Federkonstanten); die elastische Energie ist dann, wenn die Glieder sämtlich als starr angesehen werden, einfach

$$H = \frac{1}{2} F_1(x - a)^2 + \frac{1}{2} F_2(y - b)^2.$$

Wir müssen hierin noch eine der beiden kinematisch voneinander abhängigen Größen fortschaffen; wenn wir uns für lotrechte Kräfte am Punkt B interessieren, werden wir daher x mittels Gl. (1) durch y ausdrücken und erhalten

$$H = \text{konst.} - F_2 b y + \frac{y^2}{2} \left(F_2 - \frac{2F_1 a}{l} \right) + \frac{F_1 y^4}{2l^2} \left(1 - \frac{a}{2l} \right) + \dots \quad (2)$$

und damit

$$P = \frac{\partial H}{\partial y} = F_2(y - b) - \frac{2F_1 a y}{l} + \frac{2F_1 y^3}{l^2} \left(1 - \frac{a}{2l} \right) + \dots, \quad (3)$$

also

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d^2 H}{dy^2} = F_2 - \frac{2F_1 a}{l} + \frac{6F_1 y^2}{l^2} \left(1 - \frac{a}{2l} \right) + \dots \quad (4)$$

Aus Gl. (4) ist zu erkennen, daß elastische Unbestimmtheit dann vorliegt, wenn das dritte Glied gegen die Summe der beiden ersten in Betracht kommt. Dies trifft vor allem zu, wenn $F_2 - \frac{2F_1 a}{l} = 0$ ist. In diesem Fall tritt dieselbe Wackeligkeit auf, wie man sie durch die Untersuchungen von A. FÖPPL beim Ausnahmefachwerk kennt; für $y = 0$ ist $\partial P / \partial y = 0$, und im Fall $b = 0$ ist P der dritten Potenz von y proportional.

Die elastische Unbestimmtheit tritt auch ohne genaue Einhaltung der Wackeligkeitsbedingung auf, wenn die Federkonstante F_1 sehr groß gegen F_2 und gegen $\frac{2F_1 a}{l}$ ist, so daß das dritte Glied in Gl. (3) und (4) bereits bei mäßigen y -Werten ins Gewicht fällt (in diesem Fall ist $a/2l$ im dritten Glied auch vernachlässigbar klein gegen 1!). Höhere Glieder der Reihe (3) kommen hier wegen der angenommenen Kleinheit von y/l nicht mehr in Betracht, für die zu einem gegebenen Wert von P gehörige Gleichgewichtslage y ergibt sich damit aus Gl. (3) eine Gleichung dritten Grades, die eine oder aber auch drei reelle Wurzeln hat, je nach dem Wert der Vorspannungen a und b . Am einfachsten sind die Verhältnisse für $P = -F_2 b$ (daher auch für $P = 0$; $b = 0$). Hier ist eine Wurzel $y = 0$; die anderen lauten genähert

$$y_{2,3} = \pm \sqrt{a l - \frac{F_2}{2F_1} l^2}.$$

Das Verschwinden der Wurzel führt wieder auf unsere Wackeligkeitsbedingung. Sind drei reelle Wurzeln vorhanden, dann sind die beiden äußeren stabil (dP/dy positiv), die mittlere labil (dP/dy negativ), wie Gl. (4) ausweist; ist nur eine reelle Wurzel vorhanden, dann ist diese stabil.

Die Bedingung für Wackeligkeit läßt sich übrigens auch noch anders deuten. Die Kraft in der vorgespannten Feder F_1 ist in der Durchschlagslage ($y = 0$) $= F_1 a$; diese Kraft kann auch durch eine waagerechte Druckkraft D von gleicher Größe am Punkt C unter Fortlassung der Vorspannung der Feder ersetzt werden. Die Wackeligkeitsbedingung kann jetzt auch $D = F_2 l/2$ geschrieben werden. D ist der Druck, der die von der Feder F_2 herrührende Steifigkeit des Gelenkes B aufhebt, also nichts anderes als die „Knicklast“, unter der kleine Durchbiegungen y in unbestimmter Größe auftreten. Daß für Überschreitung dieses kritischen Wertes von D (bzw. des entsprechenden von a) endliche, wenn auch recht beträchtliche Werte von y gefunden werden, entspricht auch dem Verhalten von genügend schlanken auf Knickung belasteten Stäben. Die Betrachtung von von Null verschiedenen Kräften P in unserem Beispiel führt zu Beziehungen, die denen bei der Knickungsbiegung völlig analog sind; eine nähere Untersuchung mag hier unterbleiben.

Setzt man beide Vorspannungen a und b gleich Null (nur a ist von elastisch unbestimmtem Charakter, d. h. hat wesentlichen Einfluß auf dP/dy ; b tritt in Gl. (4) nicht auf und ist somit elastisch bestimmter Natur), so wird Gl. (3)

$$P = F_2 y + \frac{2F_1}{l^2} y^3;$$

dies ist dieselbe Art von Zusammenhang zwischen Kraft und Durchbiegung, wie sie bei der ursprünglich spannungslosen elastischen Platte in der Theorie der Durchbiegungen von der Größenordnung der Plattendicke auftritt. Die Wirkungen von inneren Spannungen der Platten lassen sich im einfachsten Fall durch Hinzunahme eines positiven oder negativen a in unserem Beispiel veranschaulichen. Allerdings ist die Zuordnung der zu vergleichenden Größen wegen der ganz anderen geometrischen Anordnung schwer auszuführen; es soll sich hier aber auch nicht um einen Ersatz für quantitative Lösungen handeln, sondern um eine rein qualitative Veranschaulichung (die aber immerhin dazu dienen kann, für die Ordnung von Versuchsergebnissen Richtlinien zu liefern).

4. Für die besondere Aufgabe der Platte mit Vorspannung mag ein zweites Beispiel dienen, bei dem allerdings auch wieder die Vereinfachung des Mechanismus so weit getrieben wurde, als dies irgend möglich war.

Das unbelastete Gebilde soll ein einfach statisch unbestimmtes Fachwerk von der in Abb. 2 gegebenen Form sein, jedoch mit Gelenken, die eine räumliche Bewegung aus der Fachwerkebene heraus gestatten. Die Gelenke am mittleren Knotenpunkt 5 sollen dabei mit Blattfedern ausgerüstet sein, die dem Eintreten einer Winkelabweichung zwischen den Richtungen der Stäbe e und g und denen der Stäbe f und i widerstreben. Weiter sollen alle Stäbe elastisch dehnbar sein, und in einem der Außenstäbe soll sich ein Spannschloß befinden, durch das übrigens die Dehnbarkeit dieses Stabes gegenüber den anderen Außenstäben der Einfachheit halber nicht geändert sein soll. Das so beschriebene Gebilde wird, wenn es außen irgendwie aufgelagert und in der Mitte senkrecht zu seiner Ebene belastet wird, durch die Wirkung der Blattfedern sich bei sehr kleinen Durchbiegungen ähnlich wie eine elastische Platte verhalten. Bei größeren Durchbiegungen wird es jedoch durch die Dehnung der radialen Stäbe (wegen ihrer schrägen Lage) und die gleichzeitige Verkürzung der Umfangsstäbe Abweichungen vom einfachen Elastizitätsgesetz von der gleichen Art wie bei den Platten zeigen. Wird durch das Spannschloß eine (positive oder negative) Vorspannung in dem Fachwerk erzeugt, so zeigen sich die Durchbiegungen durch diese in derselben Weise beeinflusst, wie man das bei dünnen Platten sehen kann, denen man durch ungleichmäßiges Hämmern (entweder vorwiegend in der Mitte oder vorwiegend am Rand) Vorspannungen beigebracht hat.

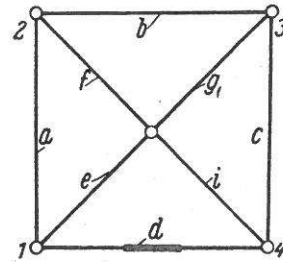


Abb. 2

Für die Durchführung dieser Aufgabe sind zunächst die kinematischen Verhältnisse aufzuklären. Die Längenänderungen der Stäbe a bis i mögen $\Delta a \dots \Delta i$ heißen. Die Änderungen der Projektionen der Stäbe auf die Fachwerkebene seien entsprechend $\Delta a' \dots \Delta i'$ genannt.

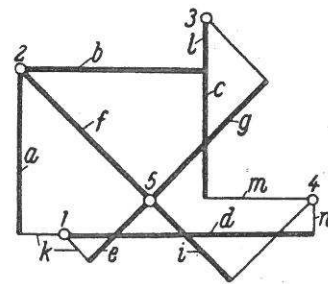


Abb. 3

Um zunächst den Zusammenhang dieser letzteren zu ermitteln (die ebene Fachwerksfigur ist einfach geometrisch überbestimmt), sei ein Verschiebungsplan gezeichnet. Die Strecken $\Delta a' \dots \Delta i'$ können dabei bis auf eine beliebig angenommen werden; der Übersichtlichkeit halber seien sie hier alle positiv angenommen. Geht man z. B. vom Knotenpunkt 5 aus und hält die Richtung des Stabes $52 = f$ fest, so erhält man eine Figur nach Abb. 3.

Statt $\Delta a'$ usw. sei dabei zur Vereinfachung a usw. geschrieben. Vergleicht man nun die Diagonalstrecken mit den Projektionen der senkrechten und waagerechten Strecken auf sie, so lassen sich aus Abb. 3

leicht die folgenden Beziehungen ablesen:

$$e + g = (a + b - k + l)/\sqrt{2},$$

$$e + g = (c + d + n - m)/\sqrt{2},$$

$$f + i = (b + c - l + m)/\sqrt{2},$$

$$f + i = (a + d + k - n)/\sqrt{2}.$$

Addiert man diese vier Gleichungen, so heben sich die Strecken k , l , m und n fort, und es ergibt sich die gesuchte Beziehung

$$e + f + g + h = (a + b + c + d)/\sqrt{2}, \quad (5)$$

wobei, wie gesagt, a usw. für $\Delta a'$ usw. steht. Der Zusammenhang von $\Delta a'$ und Δa ergibt sich nun ähnlich wie früher: es ist

$$(l + \Delta a)^2 = (l + \Delta a')^2 + (y_1 - y_2)^2$$

oder

$$2l\Delta a + \Delta a^2 = 2l\Delta a' + \Delta a'^2 + (y_1 - y_2)^2$$

oder bei kleinem $y_1 - y_2$, da jetzt der Unterschied von Δa und $\Delta a'$ klein von zweiter Ordnung ist, unter Vernachlässigung von $\Delta a^2 - \Delta a'^2$

$$\Delta a' = \Delta a - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2l} \quad (6)$$

und entsprechend für Δb bis Δi , wobei bei den Radialstäben $l/\sqrt{2}$ an Stelle von $2l$ tritt.

Weiter sind noch die statischen Verhältnisse der Stabspannungen zu klären, von denen die $\Delta a \dots \Delta i$ durch das Elastizitätsgesetz abhängen. Da wir uns auf kleine Formänderungen beschränken wollen, genügt es, das Gleichgewicht an dem undeformierten Fachwerk an Stelle des an dem räumlichen Gebilde zu betrachten. Da an den Knotenpunkten Kräfte in der Fachwerkebene nicht angreifen, liefert der Kräfteplan sofort, daß

$$S_a = S_b = S_c = S_d$$

und

$$S_e = S_f = S_g = S_i = -S_a/\sqrt{2}$$

ist.

Führt man die Abkürzungen

$$k_1 = \frac{E F_1}{l} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{E F_2}{l'}$$

ein (E = Elastizitätsmodul, F_1 und F_2 bzw. l und $l' = l/\sqrt{2}$ Querschnitte und Längen der Umfangsstäbe und der Radialstäbe), so wird

$S_a = k_1 \Delta a$ usw.; $S_e = k_2 \Delta e$ usw. Wegen der obigen Beziehungen über die Spannungen wird daher

$$\Delta b = \Delta c = \Delta a, \quad (7a)$$

$$\Delta e = \Delta f = \Delta g = \Delta i = -\frac{k_1}{k_2} \Delta a \sqrt{2}; \quad (7b)$$

eine Ausnahme macht der Stab mit dem Spannschloß, das um den Betrag s verlängert sei; hierfür wird

$$S_d = k_1 (\Delta d - s),$$

also wegen $S_d = S_a$

$$\Delta d = \Delta a + s. \quad (7c)$$

Über die senkrechten Formänderungswege der Knotenpunkte 1 bis 5 wollen wir, da wir nur symmetrische Belastungsfälle betrachten wollen, zur Vereinfachung der Rechnungen gleich solche Annahmen machen, daß die zu erwartende Symmetrie darin zum Ausdruck kommt. Die Bezeichnungen mögen dabei gleich so gewählt werden, wie es für die Rechnung am zweckmäßigsten ist. Wir setzen

$$y_1 = y_3 = 0; \quad y_2 = y_4 = 2h; \quad y_5 = h + z. \quad (8)$$

(Mit $h = 0$, $z \neq 0$ erhalten wir also lediglich in der Mitte eine Einsenkung, das Gebilde deformiert sich zu einer Pyramide; mit $z = 0$, $h \neq 0$ ergibt sich dagegen eine Gestalt, bei der die Knotenpunkte 1 und 3 um ebensoviel über dem mittleren Knotenpunkt 5 liegen wie 2 und 4 darunter, was eine Art Sattelform ergibt.)

Führt man die Annahmen (8) in die Gl. (6) ein und drückt vermöge der Beziehungen (7) alle Stabdehnungen durch Δa aus, so ergibt sich aus Gl. (5) nach kurzer Rechnung:

$$\Delta a = \frac{k_2}{k_2 + 2k_1} \left(\frac{h^2 - z^2}{l} - \frac{s}{4} \right). \quad (9)$$

Nun ist die elastische Energie zu formulieren. Die Umfangsstäbe tragen dazu $4 \cdot \frac{1}{2} k_1 \Delta a^2$ bei, die Radialstäbe $4 \cdot \frac{1}{2} k_2 \Delta e^2$ oder mit Gl. (7b) $4 \frac{k_1^2}{k_2} \Delta a^2$. Dies gibt zusammen, wenn Gl. (9) berücksichtigt wird,

$$K \left(\frac{h^2 - z^2}{l} - \frac{s}{4} \right)^2, \quad \text{wobei } K \text{ abkürzend für } \frac{2k_1 k_2}{k_2 + 2k_1}$$

steht. Hierzu kommt noch die Energie der Blattfedern am Knotenpunkt 5. Der Knickwinkel zwischen den Stäben e und g ist auf erste Ordnung durch

$$\frac{y_5 - y_1}{l'} + \frac{y_5 - y_3}{l'} = \frac{2}{l'} (h + z)$$

gegeben, entsprechend ist der Winkel zwischen f und i

$$\frac{y_5 - y_2}{l'} + \frac{y_5 - y_4}{l'} = \frac{2}{l'} (h - z).$$

Die Energie der Blattfedern kann demnach

$$= \frac{F}{2} [(h+z)^2 + (h-z)^2] = F(h^2 + z^2)$$

geschrieben werden. Damit ist also die gesamte elastische Energie

$$H = K \left(\frac{h^2 - z^2}{l} - \frac{s}{4} \right)^2 + F(h^2 + z^2). \quad (10)$$

Von den mannigfaltigen möglichen Belastungsfällen seien hier die folgenden untersucht:

a) *Alle vier Ecken aufgelagert, die Mitte mit P belastet.* Hier ist $h = 0$ und daher $y_5 = z$, also

$$P = \frac{dH}{dz} = z \left(\frac{Ks}{l} + 2F \right) + z^3 \frac{4K}{l^2}. \quad (11)$$

Der Bau dieser Gleichung ist völlig analog zu dem von Gl. (3), es gilt daher alles dort Gesagte entsprechend. Verschwindet die Klammer in Gl. (11), ist also $s = -\frac{2Fl}{K}$, so tritt Wackeligkeit ein. Wird das Spannschloß noch weiter verkürzt, so ergeben sich außer der Mittellage, die jetzt labil ist, noch zwei weitere stabile Gleichgewichtslagen des unbelasteten Gebildes bei

$$z = \pm \sqrt{-\frac{sl}{4} - \frac{Fl^2}{2K}}. \quad (12)$$

b) *Zwei Ecken aufgelagert, die beiden anderen gleich stark belastet, Mitte frei.* Hier sind h und z beide von Null verschieden. Bei der Ausführung der Differentiation ist zu beachten, daß h und z nicht unmittelbar die Formänderungswege sind. Die Kraft in der Mitte ist $P_5 = \partial H / \partial y_5$ bei festgehaltenem $y_2 = y_4$ ($y_1 = y_3 = 0$). Dabei ist $y_2 = 2h$ und $y_5 = h + z$. Man muß nun entweder vor dem Differenzieren h und z durch y_2 und y_5 ausdrücken, oder man verfährt wie folgt: Es ist

$$\frac{\partial H}{\partial y_5} = \frac{\partial H}{\partial h} \frac{dh}{dy_5} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dy_5}, \quad \text{bei } y_2 = \text{konst.}$$

Damit ist aber wegen Gl. (8) auch $h = \text{konst.}$ und daher $dh/dy_5 = 0$; weiter ist

$$\frac{dz}{dy_5} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{\partial H}{\partial y_5} = \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Ferner ist

$$P_2 + P_4 = 2P_2 = \frac{\partial H}{\partial y_2}$$

bei $y_5 = \text{konst.}$; $h + z = \text{konst.}$ gibt aber

$$\frac{\partial z}{\partial y_2} = -\frac{dh}{dy_2};$$

ferner ist

$$\frac{dh}{dy_2} = \frac{1}{2},$$

also wird

$$2P_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial h} - \frac{\partial H}{\partial z} \right).$$

Soll die Kraft in der Mitte gleich Null sein, so ist also $\partial H / \partial z = 0$ zu setzen, d. h.

$$0 = z \left[K \left(\frac{s}{l} - \frac{4h^2}{l^2} \right) + 2F \right] + z^3 \frac{4K}{l^2}, \quad (13)$$

d. h. entweder $z = 0$ oder

$$z = \pm \sqrt{h^2 - \frac{sl}{4} - \frac{Fl^2}{2K}}. \quad (14)$$

Falls diese Wurzel reell ist, gibt es also wieder zwei stabile Lagen. Je nachdem die Spannschloßverkürzung $-s \lesseqgtr 2Fl/K$ ist, wird dabei $|z| \lesseqgtr |h|$, d. h. die verbogene Form ist unsymmetrisch sattelförmig oder dachförmig oder unsymmetrisch pyramidenförmig.

Die Kraft P_2 wird wegen $\partial H / \partial z = 0$

$$P_2 = \frac{1}{4} \frac{\partial H}{\partial h} = h \left[\frac{F}{2} - K \left(\frac{s}{4l} + \frac{z^2}{l^2} \right) \right] + h^3 \frac{K}{l^2}.$$

Je nachdem z den Wert Null oder den in Gl. (14) angegebenen Wert hat, erhält man

$$P_2 = h \left(\frac{F}{2} - \frac{Ks}{4l} \right) + \frac{Kh^3}{l^2} \quad (15a)$$

oder

$$P_2 = hF, \quad (15b)$$

also im Fall $z \neq 0$ (unsymmetrische Verbiegung) P_2 unabhängig von der Vorspannung s immer gleich dem doppelten Betrag, der durch die Blattfedern allein herauskäme (d. h. für $K = 0$, wobei z immer $= 0$ wäre).

Für genügend große s kann gemäß Gl. (15a) beim symmetrisch verbogenen Gebilde $P_2 = 0$ werden; dabei ist dann

$$h = \pm \sqrt{\frac{sl}{4} - \frac{Fl^2}{2K}}. \quad (16)$$

Es ergibt sich also als stabile Lage des *unbelasteten Gebildes* gemäß Gl. (12) und (16) für $|s| < \frac{2Fl}{K}$ die ebene Lage ($z = h = 0$); für negative s , d. h. Verkürzungen des Spannschlusses, die den Betrag $\frac{2Fl}{K}$ übersteigen, ergibt sich ein Heraustreten der Mitte ($z \neq 0, h = 0$); für positive s , d. h. Verlängerungen des Spannschlusses, die den Betrag $\frac{2Fl}{K}$ übersteigen, tritt die Sattelform ein ($z = 0, h \neq 0$). Dieses Ver-

halten ist in der Tat dem einer dünnen Platte analog, die durch Hämmern in Vorspannung versetzt ist. Sie wölbt sich in der Mitte vor, wenn die inneren Teile durch Hämmern hinreichend gestreckt sind; sie wölbt sich sattelförmig, wenn die Randpartien gestreckt sind. Die ebene Lage ist dann in beiden Fällen labil. Unser Modell liefert demnach wirklich die hauptsächlichsten Erscheinungen bei ebenen Platten mit und ohne Vorspannung in qualitativ richtiger Weise; dabei ist der Mechanismus der Erscheinungen hier sehr durchsichtig. Es dürfte sich daher empfehlen, das Modell zu Vorführungszwecken im Unterricht praktisch auszuführen.