FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

11.4.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 1. Übung

Hausaufgabe 1:

a) Gib verschiedene Metriken und Nicht-Metriken auf $X = \{\text{Fenster, Tür, Tafel, Kreidehalter, Lampe}\}$ an.

b) Definieren die folgenden Funktionen Metriken auf $\mathbb{R}$?
   i) $d(x,y) = |x-y|^p$ für $p \in \mathbb{R}$ (für welche p)?
   ii) $d(x,y) = \cos^2(x-y)$?
   iii) $d(x,y) = x - 2y$

c) Beweise oder widerlege: $d(x,y) = \left|\log|\frac{x}{y}|\right|$ ist Metrik auf $\mathbb{R}^+$.

Lösung:

a) Wie in Präsenzaufgabe 1 ist natürlich auch hier die *diskrete* Metrik eine mögliche Metrik auf X. Keine Metriken sind dagegen beispielsweise:

$$n : X^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ n(x,y) := \pi \ \text{ oder } \ m : X^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ m(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{gleicher Anfangsbuchstabe,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Definieren die folgenden Funktionen Metriken auf $\mathbb{R}$?
   i) Im Fall $p < 0$ ist d nicht wohldefiniert und daher keine Metrik. Sei also $p \in [0,\infty)$. Für $p = 0$ gilt

$$d(x,y) = |x-y|^p = 1,$$

also $d(x,x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher ist d auch in diesem Fall keine Metrik.
Ist $p \in (0,1)$, folgt für $x,y,z \in \mathbb{R}$:

(a) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y\,,$

(b) $d(x,y) = |x-y|^p = |y-x|^p = d(y,x)\,,$

(c) Zunächst einmal gilt für $x,y,z \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x-y|^p = |x-z+z-y|^p \leq \Big(|x-z| + |z-y|\Big)^p$$

und somit genügt es zu zeigen, dass

$$\Big(|x-z| + |z-y|\Big)^p \leq |x-z|^p + |z-y|p$$

bzw.

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \ \ \forall\, a,b \geq 0$$

ist. Für $b = 0$ ist dies offensichtlich. Im Fall $b > 0$ können wir $x := \frac{a}{b}$ setzen und die Behauptung reduziert sich auf

$$f(x) := 1 + x^p - (1+x)^p \geq 0 \ \ \forall\, x \geq 0\,.$$

Wegen

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1+x)^{p-1} \geq 0 \ \text{ für } \ p \in (0,1]$$

ist f monoton wachsend und daher tatsächlich $f(x) \geq f(0) = 0$ nach dem *Mittelwertsatz.*

Also ist $d(x,y) = |x-y|^p$ für $p \in (0,1]$ eine Metrik und es bleibt der Fall $p > 1$. Dann ist aber

$$d(-x,x) = |-x-x|^p = 2^p \cdot |x|^p \not\leq 2|x|^p = |-x|^p + |x|^p = d(-x,0) + d(0,x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und daher d keine Metrik.

ii) d ist keine Metrik, da

$$d\Big(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\Big) = 0 \quad \text{aber} \quad \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4}\,.$$

iii) Auch diese Abbildung ist keine Metrik, da

$$d(2,1) = 0 \quad \text{aber} \quad 2 \neq 1\,.$$

c) Für $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ist $d(x,y) \geq 0$ und

$$(1) \qquad d(x,y) = 0 \iff \log\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \iff x = y\,,$$

$$(2) \qquad d(x,y) = \left|\log\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \Big|\log(x) - \log(y)\Big| = \Big|\log(y) - \log(x)\Big| = \left|\log\left(\frac{y}{x}\right)\right| = d(y,x)\,,$$

$$\begin{aligned}(3) \qquad d(x,y) = \left|\log\left(\frac{x}{y}\right)\right| &= \Big|\log(x) - \log(y)\Big| \\ &\leq \Big|\log(x) - \log(z)\Big| + \Big|\log(z) - \log(y)\Big| \\ &\leq \left|\log\left(\frac{x}{z}\right)\right| + \left|\log\left(\frac{z}{y}\right)\right| = d(x,z) + d(z,y)\,.\end{aligned}$$

Also ist $(\mathbb{R}^+, d)$ ein metrischer Raum.

Hausaufgabe 2:

Für jede Norm wird durch $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik definiert. Ist $\big(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$ ein vollständiger metrischer Raum?

Lösung:

1. $(C^1([a,b]), d)$ *mit* $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ *ist ein metrischer Raum.*

   Offensichtlich ist d nach Definition *positiv definit* und *symmetrisch*. Darüber hinaus ist

   $$\forall\, f,g,h \in C^1([a,b]): \quad |f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$$

   und somit auch

   $$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-h(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h(x)-g(x)| = d(f,h) - d(h,g)$$

   für alle $f,g,h \in C^1([a,b])$.

2. $(C^1([a,b]), d)$ *ist nicht vollständig.*

   Betrachte dazu die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$f_n(x) := \sqrt{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}}\,, \qquad x \in [a,b]\,.$$

   Offensichtlich ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen die nicht differenzierbare Funktion $f \in C([a,b])$ mit

   $$f(x) := \left|x - \frac{a+b}{2}\right|$$

   konvergiert. Insbesondere ist daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Cauchyfolge* in $(C([a,b]), d)$ und damit auch in $(C^1([a,b]), d)$.

Hausaufgabe 3:
Welche Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ machen $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ zu einer Metrik auf $\mathbb{R}$?

Lösung:
Offensichtlich ist d nach Definition für beliebiges $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *symmetrisch* und erfüllt $d(x, y) \geq$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus gilt stets

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d(x, z) + d(z, y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,,$$

und

$$x = y \quad \Longrightarrow \quad d(x, y) = 0\,.$$

Kritisch ist lediglich die Bedingung

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}:\;\; d(x, y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Übersetzt bedeutet sie, dass f die Beziehung

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

erfüllen und daher *injektiv* sein muss.
Es sind also genau die injektiven Funktionen, die $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ zu einer Metrik auf $\mathbb{R}$ machen.

Hausaufgabe 4:
Sei $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R}\}$ und sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist, die Metrik d aber nicht von einer Norm erzeugt wird.
Tipp: Vgl. Ana I, WS 2011/12, Übung 1.

Lösung:
Offensichtlich ist d und für $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z := (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

und nach Übung 1, Analysis I im WS 2011/12

$$\begin{aligned}(2) \quad d(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} = d(x, z) + d(z, y)\,.\end{aligned}$$

Also ist (X, d) ein metrischer Raum. Würde dieser auch von einer Norm $\|.\|$ erzeugt, d. h. $d(x, y) = \|x - y\|$, so wäre für $x \neq y$

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\| = a\,\|x - y\| = a \cdot d(x, y) \quad \text{für} \quad a > 0$$

im Widerspruch zu

$$d(ax, ay) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|ax_n - ay_n|}{1 + |ax_n - ay_n|} = a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + a|x_n - y_n|} \neq a \cdot d(x, y)\,.$$