FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

13.6.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 10. Übung

Hausaufgabe 1:

Sei H ein Hilbertraum und $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H. Für $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ sei $T \in L(H)$ definiert durch

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Zeige, dass T genau dann kompakt ist, wenn $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Bestimme T^*.

Lösung:

Es sei $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Approximiere T durch endlichdimensionale Operatoren

$$T_N x = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Dann ist

$$\|T_N x - Tx\| = \| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n\| \leq \sup_{n>N} \lambda_n \|x\|,$$

also $\|T_N - T\| \leq \sup_{n>N} \lambda_n \to 0$, die Menge der kompakten Operatoren ist abgeschlossen.
Sei λ_n nicht konvergent gegen null. e_n liefert (Rückrichtung!) eine Folge ohne konvergente Teilfolge im Bild, falls $\lambda_n \not\to 0$:

$$\|Te_n - Te_m\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2.$$

Zur Bestimmung der Adjungierten:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, y\rangle = \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle \overline{\lambda}_n e_n\rangle,$$

also $T^* y = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n \langle y, e_n\rangle e_n$.

Hausaufgabe 2:

H sei (immer noch) Hilbertraum und $A \in L(H)$. Zeige, dass $\ker(A^*) = \ker(AA^*)$ und $\overline{A(H)} = \overline{AA^*(H)}$

Lösung:

Sei $x \in \ker(A^*)$. Dann ist $AA^*x = A0 = 0$, also $x \in \ker(A^*)$. Sei $x \in \ker(AA^*)$. Dann ist $0 = \langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle$, also $A^*x = 0$ und damit $x \in \ker(A^*)$.
Für die Abschlüsse der Bilder nutzen wir das gerade Gezeigte sowie Satz 2.44:

$$\overline{AA^*(H)} = \ker((AA^*)^*)^\perp = \ker(AA^*)^\perp = \ker(A^*)^\perp = \overline{A(H)}.$$

Hausaufgabe 3:

Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Operator $U \in L(H)$ eines (du hast es erraten:) Hilbertraums H:

a) U ist isometrisch, also $\|Ux\| = \|x\|$.

b) Es gilt $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

Zeige ferner, dass unitäre Operatoren diese Eigenschaften haben.

Lösung:
Unitärität impliziert a): $\|Ux, Ux\| = \|U^*Ux, x\| = \|x, x\|$. a) impliziert b): Mit der Polarisationsformel: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|x + i^k y\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|U(x + i^k y)\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|Ux + i^k Uy)\|^2 = \langle Ux, Uy\rangle$. b) impliziert a): Setze $y = x$. b) impliziert fast, dass U unitär ist: $\langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle x, y, also $U^*Ux = x$ und damit $U^* = U^{-1}$ - vorausgesetzt, U hat ein Inverses. (Ansonsten fehlte noch $UU^* = I$.) Sicherstellen ließe sich das durch die Forderung danach, dass U dichtes Bild habe. (Oder gleich nach Surjektivität von U.)

Hausaufgabe 4:

Sei K ein kompakter selbstadjungierter Operator des Hilbertraums H. Zeige, dass $(I - K)x = y$ genau dann für alle $y \in H$ eindeutig lösbar ist, wenn $\ker(I - K) = \{0\}$.

Lösung:
Wenn $\ker(I - K) \neq \{0\}$ ist offenbar die Gleichung für $y = 0$ nicht eindeutig lösbar.
Sei $\ker(I - K) = \{0\}$. Zu zeigen ist Surjektivität von $I - K$. Es ist nach Satz 2.44 $\overline{im(I - K)} = \ker((I - K)^*)^\perp = \ker(I - K)^\perp = \{0\}^\perp = H$. Uns genügt es also, Abgeschlossenheit von $im(I - K)$ zu zeigen. Sei y_n eine Folge im Bild von $I - K$, die gegen $y \in H$ konvergiere. Es gibt also eine Folge x_n mit $y_n = (I - K)x_n = x_n - Kx_n$. Entlang einer Teilfolge (wir benennen sie nicht um) konvergiert Kx_n gegen ein $z \in H$, da K kompakt ist. Also gilt $x_n = y_n + Kx_n \to y + z$. Da K stetig ist, konvergiert Kx_n gegen $Kx = z$ und es gilt $y = x - z = x - Kx$, also $y \in im(I - K)$.

Hausaufgabe 5:

Bestimme die Adjungierte von $T : L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1]),\ f \longmapsto T_f$ mit

$$T_f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} xf(s)\,ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(s)\,ds\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(s)\,ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(s)\ \mathrm{d}s g(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (\chi_{[0,\frac{1}{2}]} sxf(s) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(s)x^2 f(s))\, g(x)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{2}]} sx - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(s)x^2\, g(x)\ \mathrm{d}x f(s)\ \mathrm{d}s \\
&= \langle f, T^*g\rangle
\end{aligned}$$

mit

$$T^*g(x) = \int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{2}]} xy - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x)y^2\, g(y)\ \mathrm{d}y.$$